

Пояснительная записка

Настоящее пособие предназначено для преподавателя и студентов. Содержание пособия соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности: «Сестринское дело». Данное пособие включает следующие разделы математики: «Решение показательных уравнений», «Решение логарифмических уравнений», «Решение показательных и логарифмических неравенств».

С его помощью можно организовать работу на уроке по изучению нового материала; работу студентов дома, если эта тема была пропущена в колледже. Пособие служит для оказания помощи в подготовке к занятиям, для закрепления полученных знаний, умений и навыков. Пособие будет полезно студентам, как справочный материал, позволяющее быстро восстановить в памяти то, что было изучено ранее.

В конце каждой темы даны образцы решения примеров. Примеры дифференцированы по уровням возрастания сложности. После примеров с подробным решением идут упражнения, которые студенты выполняют для самоконтроля.

Упражнения составлены таким образом, чтобы студент, впервые столкнувшийся с этой темой, мог выполнить задание без посторонней помощи, т.е. только пользуясь материалом, изложенным в пособии. Это пособие – самоучитель.

Как пользоваться пособием для самостоятельного изучения темы. Сначала следует прочитать теоретическую часть, разобрать примеры и выполнить упражнения самостоятельно.

Задача пособия – оказать помощь студентам в усвоении знаний раздела.

Решение показательных уравнений.

Уравнение, содержащее переменную в показателе степени, называется показательным: $a^x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $a^x > 0$).

Уравнение при любом положительном a , отличном от 1 , и $b > 0$ имеет единственный корень. Для того чтобы его найти, надо b представить в виде $a^c = a^c$. Очевидно, что c является решением.

Примеры:

Решить уравнения:

1. $2^x = 8$

$$2^x = 2^3$$

$$x = 3.$$

Ответ: 3.

2. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$x = -1$$

Ответ: -1.

3. $3^x = 5$

Уравнение можно записать: $3^x = 3^{\log_3 5}$

$$x = \log_3 5$$

Ответ: $\log_3 5$.

4. $25^x = -25$

Так как $-25 < 0$, то это уравнение не имеет корней.

Ответ: нет корней.

5. $7^{x-2} = \sqrt[3]{49}$

$$7^{x-2} = \sqrt[3]{7^2}$$

$$7^{x-2} = 7^{\frac{2}{3}}$$

$$x - 2 = \frac{2}{3}$$

$$x = 2\frac{2}{3}$$

Ответ: $2\frac{2}{3}$.

6. $5^{x^2-2x-1} = 25$

$$5^{x^2-2x-1} = 5^2$$

$$x^2 - 2x - 1 = 2$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x_1 = -1; x_2 = 3.$$

Ответ: -1; 3.

7. $6^{x+1} + 35 \cdot 6^{x-1} = 71$

$$6^x \cdot 6^1 + 35 \cdot \frac{6^x}{6^1} = 71$$

$$6^x \left(6 + \frac{35}{6}\right) = 71$$

$$6^x \left(\frac{36+35}{6}\right) = 71$$

$$6^x \cdot \frac{71}{6} = 71$$

$$6^x = 71: \frac{71}{6}$$

$$6^x = 6$$

$$x = 1$$

Ответ: 1.

8. $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$

$$2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$$

Пусть $2^x = t$, тогда

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$t_1 = 1; \quad t_2 = 2$$

Обратная замена:

$$2^x = 1$$

$$2^x = 2$$

$$2^x = 2^0$$

$$2^x = 2^1$$

$$x = 0$$

$$x = 1$$

Ответ: 0; 1.

Упражнения:

Решить уравнения:

1. $27^x = 3$

2. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8$

3. $2^x = 7$

4. $5^{x+2} - 2 \cdot 5^x - 3 \cdot 5^{x+1} = 200$

5. $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$

Решение логарифмических уравнений.

Уравнение вида $\log_a x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$) называется простейшим логарифмическим уравнением. Для любого b данное уравнение имеет, и притом только одно, решение. Из определения логарифма следует, что a^b является таким решением.

Примеры:

1. $\log_3 x = 4$

Найдем область определения уравнения:

$$x > 0$$

$$\log_3 x = \log_3 81$$

$$x = 81$$

Ответ: 81

2. $\log_2(x - 5) = 3$

Найдем область определения уравнения:

$$x - 5 > 0$$

$$x > 5$$

$$\log_2(x - 5) = \log_2 8$$

$$x - 5 = 8$$

$$x = 13$$

Ответ: 13.

3. $\lg(x - 3) + \lg(x - 2) = \lg 2$

Найдем область определения уравнения:

$$\begin{cases} x - 3 > 0, \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$$

$$\lg(x - 3) \cdot (x - 2) = \lg 2$$

$$(x - 3) \cdot (x - 2) = 2$$

$$x^2 - 5x + 6 = 2$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x_1 = 1 \text{ — не удовлетворяет области определения,} \quad x_2 = 4$$

Ответ: 4.

4. $\log_5(2x + 3) = \log_5(x + 1)$

$$\begin{cases} 2x + 3 > 0, \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > -3, \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1,5, \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x > -1.$$

$$2x + 3 = x + 1$$

$x = -2$ не удовлетворяет области определения.

Ответ: нет корней.

Упражнения:

1. $\log_4 x = 3$

2. $\log_{\frac{1}{3}} x = -2$

3. $\log_2(4x - 3) = 3$

4. $\log_3(x^2 + 2x + 3) = \log_3 6$

5. $\lg^2 x - \lg x - 12 = 0$

Решение показательных и логарифмических неравенств.

Примеры:

1. $2^x > 8$

$$2^x > 2^3$$

$a = 2, a > 1$, функция $y = 2^x$ возрастает.

$$x > 3.$$

Ответ: $(3; +\infty)$.

2. $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 27$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$$

$a = \frac{1}{3}, 0 < a < 1$, функция $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ убывает.

$$x \leq -3.$$

Ответ: $(-\infty; -3]$.

3. $0,5^{2x+1} < 0,25$

$$0,5^{2x+1} < 0,5^2$$

$0 < 0,5 < 1$, функция убывает.

$$2x + 1 > 2$$

$$2x > 1$$

$$x > \frac{1}{2}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

4. $\log_{\frac{1}{3}}(5 - 2x) > -2$

Найдем область определения:

$$5 - 2x > 0$$

$$-2x > -5$$

$$x < 2,5$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(5 - 2x) > \log_{\frac{1}{3}} 9$$

$0 < \frac{1}{3} < 1$, функция убывает.

$$5 - 2x < 9$$

$$-2x < 4$$

$$x > -2$$

Ответ: $(-2; +2,5]$.

5. $\log_5(3x + 1) \leq 2$

Найдем область определения:

$$3x + 1 > 0$$

$$3x > -1$$

$$x > -\frac{1}{3}$$

$$\log_5(3x + 1) \leq \log_5 25$$

$a = 5 > 1$, функция возрастает.

$$3x + 1 \leq 25$$

$$3x \leq 24$$

$$x \leq 8$$

Ответ: $(-\frac{1}{3}; 8]$

Упражнения:

1. $5^x > 125$

2. $3^{2x-4} \leq 27$

3. $0,3^{4x+3} \geq 0,3^{6x-1}$

4. $\log_4 x > 2$

5. $\log_{\frac{1}{2}}(x - 3) \leq -4$

6. $\log_5 x > \log_5(3x - 4)$

Эталон ответов:

Упражнения на стр.6

1) $\frac{1}{3}$;

2) -3 ;

3) $\log_2 7$;

4) 2 ;

5) 3

Упражнения на стр.8

- 1) 64;
- 2) 9;
- 3) 2,75;
- 4) – 1 и 3;
- 5) 10000 и 0,001

Упражнения на стр.10

- 1) $(3; +\infty)$;
- 2) $(-\infty; 3,5]$;
- 3) $[2; +\infty)$;
- 4) $(16; +\infty)$;
- 5) $[19; +\infty)$;
- 6) $(\frac{4}{3}; 2)$

Используемая литература:

1. А.Г.Луканкин. Математика: учебник для учащихся учреждений среднего профессионального образования. Москва, ГЭОТАР - Медиа, 2023г.
2. Н.В.Богомолов, П.И.Самойленко. Математика. Москва, ООО «Дрофа», 2018.
3. Н.В.Богомолов. Сборник задач по математике. Москва, ООО «Дрофа», 2018.
4. А.Н.Колмогоров. Алгебра и начала анализа. Москва, издательство «Просвещение», 2017.