Приложения

Решения и ответы к задачам

Раунд 2: «Лабиринт логики»

1. Задача на взвешивание (9 монет):

- **Решение:** Разделим 9 монет на 3 кучки по 3 монеты.

1. **Первое взвешивание:** Кладём на чаши весов по 3 монеты. Возможны два случая:
   - **Весы уравновесились.** Значит, фальшивая (лёгкая) монета среди трёх, оставшихся на столе.
   - **Одна чаша легче.** Значит, фальшивая монета среди тех трёх, что на более лёгкой чаше.
2. **Второе взвешивание:** У нас есть 3 «подозрительные» монеты. Кладём на чаши весов по 1 монете из них. Возможны аналогично два случая:
   - **Весы уравновесились.** Значит, фальшивая — та, что осталась на столе.
   - **Одна чаша легче.** Значит, фальшивая — та монета, что на более лёгкой чаше.

- **Ответ:** За два взвешивания.

2. Задача на переливание (сосуды 5 и 7 литров, получить 4 литра):

- **Решение (один из алгоритмов):**

1. Наполнить сосуд на 5 литров.
2. Перелить из 5-литрового в 7-литровый (в 7-литровом теперь 5 литров).
3. Снова наполнить сосуд на 5 литров.
4. Долить из 5-литрового в 7-литровый до краёв. В 7-литровый войдёт 2 литра (7-5=2). Значит, в 5-литровом останется ровно 3 литра.
5. Освободить 7-литровый сосуд.
6. Перелить 3 литра из 5-литрового в 7-литровый (в 7-литровом теперь 3 литра).
7. Наполнить сосуд на 5 литров.
8. Долить из 5-литрового в 7-литровый (где уже есть 3 литра) до краёв. Потребуется 4 литра (7-3=4). Следовательно, в 5-литровом сосуде после долива останется ровно **1 литр**, а в 7-литровом будет полных 7 литров. Это не то.
   Правильное продолжение после пункта 6:
9. Наполнить 5-литровый сосуд.
10. Перелить из 5-литрового в 7-литровый (где 3 литра) до его заполнения. Можно перелить 4 литра. Значит, в 5-литровом останется **1 литр** (5-4=1).
11. Вылить воду из 7-литрового сосуда.
12. Перелить 1 литр из 5-литрового в 7-литровый.
13. Наполнить 5-литровый сосуд.
14. Перелить эти 5 литров в 7-литровый, где уже есть 1 литр. В итоге в 7-литровом сосуде будет **1+5=6 литров**. Опять не то.
   Более короткий и верный алгоритм:
15. Наполнить сосуд на 7 литров.
16. Перелить из 7-литрового в 5-литровый до краёв. В 7-литровом останется 2 литра.
17. Освободить 5-литровый сосуд.
18. Перелить 2 литра из 7-литрового в 5-литровый (в 5-литровом теперь 2 литра).
19. Наполнить сосуд на 7 литров.

20. Долить из 7-литрового в 5-литровый (где есть 2 литра) до краёв. Можно долить 3 литра. Значит, из 7-литрового мы отольём 3 литра, и в нём останется **7-3=4 литра**.

- **Ответ:** В 7-литровом сосуде будет 4 литра.

3. Логический парадокс («Я лгу»):

- **Решение:** Это классический парадокс Лжеца.
  - Если предположить, что Петя говорит правду («Я лгу» — правда), то получается, что он действительно лжёт. Но если он лжёт, то его утверждение ложно, а значит, он не лжёт (говорит правду). Мы попадаем в логический круг, где утверждение истинно только тогда, когда оно ложно, и наоборот.
- **Ответ:** Это высказывание не имеет классического логического значения «истина/ложь», оно является **парадоксом**.

Раунд 3: «Геометрический вернисаж»

1. Медианы треугольника:

- **Ответ:** У любого треугольника ровно **три медианы**. Медиана — это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны. У треугольника три вершины и три стороны, следовательно, три медианы. На чертеже нужно достроить третью медиану из оставшейся вершины к середине противоположной стороны.

2. Подсчёт треугольников на сложном рисунке:

- **Метод решения:** Чтобы не сбиться, нужно считать систематически: треугольники, состоящие из одного маленького элемента, из двух, из трёх и т.д. Конкретный ответ зависит от предложенного рисунка.
- **Пример для классической звезды в шестиугольнике:** Количество может быть 24, 32 и более. Для методички лучше использовать рисунок с явным ответом (например, 12 или 18).

3. Практическое задание (сложить пирамиду из А4):

- **Краткая инструкция (для квадратной пирамиды):**

1. Согнуть лист по диагонали, чтобы получить треугольник, отрезать лишнюю полосу. Развернуть — получится квадрат.
2. Согнуть квадрат по обеим диагоналям.
3. Загнуть три угла к центру квадрата (месту пересечения диагоналей) — получится основание с тремя треугольными стенками и одним отогнутым клапаном.
4. Поднять три стенки и соединить их вершины, склеив или заправив клапаны.

Раунд 4: «Практикум: Математика в жизни»

1. Задача на проценты (вклад):

- **Дано:** P = 10000 руб., r = 5% = 0.05, n = 2 года. Капитализация ежегодная.
- **Решение:** Используем формулу сложных процентов: `S = P * (1 + r)^n` `S = 10000 * (1 + 0.05)^2 = 10000 * (1.05)^2 = 10000 * 1.1025 = 11025`
- **Ответ: 11025 рублей.**

2. Задача на площадь (плитка для комнаты):

- **Метод решения:** Для комнаты неправильной формы (например, Г-образной) нужно разбить её на прямоугольники. Найти площадь каждого прямоугольника (длина * ширина). Сложить площади. Разделить полученную общую площадь комнаты на площадь одной плитки. Результат округлить **в большую** сторону до целого числа упаковок.
- **Пример:** Комната: прямоугольник 4x5 м и прямоугольник 2x3 м. Площадь = (4*5) + (2*3) = 20 + 6 = 26 м². Площадь 1 плитки = 0.25 м² (0.5x0.5). Нужно плиток: 26 / 0.25 = 104 шт. В упаковке 10 плиток. Значит, упаковок: 104 / 10 = 10.4 → **11 упаковок**.

3. Задача на вероятность (карты):

- **Дано:** Колода 36 карт. Событие A — вытянуть первым туза (их 4). Событие B — вытянуть вторым короля (их 4), при условии, что первого туза не вернули.
- **Решение:** Это зависимые события. Вероятность вытянуть туза: P(A) = 4/36 = 1/9. После этого в колоде осталось 35 карт, королей по-прежнему 4. Вероятность вытянуть короля: P(B|A) = 4/35.
  Вероятность совместного события: P = P(A) * P(B|A) = (4/36) * (4/35) = (1/9) * (4/35) = 4 / 315.
  Ответ: Вероятность равна **4/315** (или приблизительно 0.0127 ≈ 1.27%).

Раунд 5: «Финальный штурм: Чёрный ящик»

Загадка про предмет:

- **Текст:** «В чёрном ящике лежит предмет... Он имеет форму, площадь которой вычисляется по формуле $S = \pi R^2$... Его главная характеристика — длина окружности...»
- **Анализ подсказок:**

1. $S = \pi R^2$ — это площадь **круга**.
2. Главная характеристика — длина окружности ($L=2\pi R$).
3. Изобретён в древности, используется в школе.
4. Может быть из пластика или металла.

- **Логическое заключение:** Предмет, основная рабочая часть которого представляет собой круг, а его функция напрямую связана с радиусом/диаметром этого круга. Это **циркуль** (одна ножка фиксирует центр — радиус, вторая чертит окружность).
  Ответ: Циркуль.

Решения и комментарии для жюри (ключевые моменты):

Раунд 2:

1. **12 монет:** Алгоритм сложный. Первое взвешивание: 4 на 4. Далее анализ случаев, где весы уравнялись или одна чаша тяжелее. Требует построения схемы.
2. **Шахматный турнир:** Уравнение $C(n,2)=n(n-1)/2=45 \rightarrow n^2-n-90=0 \rightarrow n=10$.
3. **Принцип Дирихле:** Рассмотрим одного человека. Среди оставшихся 5 по принципу Дирихле либо ≥3 знакомы с ним, либо ≥3 не знакомы. Разбираем оба случая.

Раунд 3:

1. **Построение касательной:** Алгоритм: 1) Соединить точку O (центр) и точку A. 2) Найти середину отрезка OA (построить серединный перпендикуляр). 3) Окружность с центром в середине OA и радиусом OA/2 пересечёт данную окружность в точках касания. Доказательство: угол, опирающийся на диаметр, прямой.

2. **Площадь треугольника:** Ключевое свойство: в прямоугольном треугольнике высота, проведённая к гипотенузе, есть среднее геометрическое проекций катетов: CH = √(AH*HB).

Раунд 4:

1. **Задача на оптимизацию:** Время $t = h/(v \sin\alpha) + (L - h \operatorname{ctg}\alpha * u?) / (u + v \cos\alpha)$? Нужно аккуратно вывести выражение для полного времени с учетом сноса. Минимум ищется через производную. Ответ: $\cos\alpha = u/v$ (угол, при котором скорость лодки относительно берега направлена прямо на противоположный пункт).
2. **Путь мяча:** Время и путь образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию. Первый член (падение вниз): H. Далее каждый подскок: высота $h_k = H*k^{2k}$, путь за подскок равен $2h_k$. Сумма $S = H + 2Hk^2/(1-k^2)$.

Раунд 5:

- **Исследование:** Предел — √2. Доказательство: $x_{n+1} - \sqrt{2} = (x_n - \sqrt{2})^2/(2x_n) \geq 0$, значит, все члены, начиная со второго, не меньше √2. Монотонность: при $x_n > \sqrt{2}$ последовательность убывает, при $0 < x_n < \sqrt{2}$ — возрастает.

Раунд 2: «Логический лабиринт» (12 минут)

Каждой команде выдаётся конверт с тремя задачами. Команды решают свои наборы одновременно.

Набор для КОМАНДЫ 1:

1. **Задача на взвешивание:** Имеются гири в 1, 3, 9, 27 грамм. Можно ли с их помощью взвесить любой целый вес от 1 до 40 грамм, кладя гири только на одну чашу весов? Ответ обоснуйте.
2. **Комбинаторная:** Сколько существует шестизначных чисел, у которых каждая следующая цифра меньше предыдущей?
3. **Логическая:** В классе 35 учеников. Из них 20 занимаются математикой, 11 – физикой, а 10 не занимаются ни тем, ни другим. Сколько человек занимаются и математикой, и физикой?

Набор для КОМАНДЫ 2:

1. **Задача на взвешивание:** Имеются гири в 1, 2, 4, 8, 16 грамм. Можно ли с их помощью взвесить любой целый вес от 1 до 31 грамма? Ответ обоснуйте и объясните принцип.
2. **Комбинаторная:** Сколько существует шестизначных чисел, у которых каждая следующая цифра больше предыдущей?
3. **Логическая:** В спортивной школе 45 учеников. Из них 25 играют в футбол, 20 – в баскетбол, а 8 не занимаются этими видами. Сколько человек играют и в футбол, и в баскетбол?

Набор для КОМАНДЫ 3:

1. **Задача на взвешивание (усложнённая):** Есть 8 монет, одна из которых фальшивая и легче. За два взвешивания на чашечных весах найдите её.
2. **Комбинаторная:** Сколько различных слов (не обязательно осмысленных) можно составить, переставляя буквы в слове "ЛОГАРИФМ"?
3. **Логическая (принцип Дирихле):** Докажите, что среди любых 6 человек всегда найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

(Решения для жюри в конце)

Раунд 3: «Геометрический конструктор» (12 минут)

Команды получают чертежи и условия на отдельных листах.

Задача 1 (для всех команд, но с разными данными):

- **Команда A:** В прямоугольном треугольнике ABC (∠C=90°) проведена высота CH. Известно, что AH=2, BH=8. Найдите площадь треугольника.
- **Команда B:** В прямоугольном треугольнике ABC (∠C=90°) проведена высота CH. Известно, что AH=3, BH=12. Найдите площадь треугольника.
- **Команда C:** В прямоугольном треугольнике ABC (∠C=90°) проведена высота CH. Известно, что AH=1, BH=9. Найдите площадь треугольника. *(Принцип решения одинаков: CH=√(AH*HB), S=½*(AH+HB)*CH)*

Задача 2 (стереометрическая, визуальная): *Каждой команде – разная развёртка куба с отмеченными точками. Вопрос: «Какое из предложенных попарных расстояний между точками A и B в собранном кубе будет наибольшим?» (Варианты ответов даны).*

Задача 3 (задача на доказательство/свойство):

- **Команда A:** Докажите, что в произвольном четырёхугольнике сумма квадратов длин диагоналей не превосходит суммы квадратов длин всех его сторон.
- **Команда B:** Докажите, что середины сторон произвольного четырёхугольника являются вершинами параллелограмма (лемма Вариньона).
- **Команда C:** Докажите, что во всяком треугольнике сумма медиан меньше периметра, но больше трёх четвертей периметра.

Раунд 4: «Практикум: Физика в математике» (12 минут)

Интегрированные задачи разного типа.

Набор для КОМАНДЫ 1:

1. **Оптимизация:** По какому закону должен меняться угол α броска тела с поверхности земли, чтобы при фиксированной начальной скорости V_0 дальность полёта была максимальной? Чему равен этот угол?

2. **Геометрическая прогрессия:** Мяч упал с высоты 2 м, и после каждого отскока поднимается на высоту, составляющую 75% от предыдущей. Найдите весь путь до остановки.
3. **Вероятность:** Игральный кубик бросают три раза. Какова вероятность, что сумма выпавших очков будет делиться на 3?

Набор для КОМАНДЫ 2:

1. **Оптимизация:** Каковы должны быть стороны прямоугольного участка заданного периметра P, чтобы его площадь была максимальной?
2. **Геометрическая прогрессия:** Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 12, а сумма квадратов её членов равна 48. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.
3. **Вероятность:** Из колоды в 36 карт наугад вынимают две карты. Какова вероятность, что это два туза?

Набор для КОМАНДЫ 3:

1. **Оптимизация:** Как нужно разрезать проволоку длиной 60 см на две части, чтобы, сделав из одной части квадрат, а из другой – правильный треугольник, сумма их площадей была минимальной?
2. **Геометрическая прогрессия:** Найдите сумму ряда: 1 + 11 + 111 + ... + 111...111 (n единиц).
3. **Вероятность:** Два стрелка независимо друг от друга стреляют по мишени. Вероятность попадания первого 0.7, второго – 0.8. Какова вероятность того, что в мишень попадёт ровно один стрелок?

Решения для жюри (выборочно, для новых задач):

Раунд 2:

- **Команда 1, задача 1:** Да, можно. Это троичная система с гирями 3^0, 3^1, 3^2, 3^3. Любое число до 40 представляется в виде суммы степеней тройки.
- **Команда 1, задача 2:** Это выбор 6 разных цифр из 10 (от 0 до 9), причём порядок строго убывающий. Как только цифры выбраны, их расстановка по убыванию однозначна. Ответ: C(10,6) = 210. Но т.к. число шестизначное, 0 не может быть на первом месте. Нужно вычесть комбинации, где 0 присутствует (они автоматически встают на последнее место). Комбинаций с 0: выбрать остальные 5 цифр из 9: C(9,5)=126. Итог: 210 - 126 = 84.
- **Команда 1, задача 3:** 35 - 10 = 25 человек занимаются. По формуле включений-исключений: 20+11 - X = 25 → X = 6.
- **Команда 2, задача 1:** Да, можно. Это двоичная система с гирями 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4.
- **Команда 2, задача 2:** Аналогично, но цифры идут по возрастанию. 0 может входить. Значит, просто выбор 6 разных цифр из 10: C(10,6)=210.

- **Команда 3, задача 2:** 8! / (2!) = 20160 (буква "Л" повторяется дважды).
- **Команда 3, задача 3:** Классическая задача. Рассматриваем одного человека. Среди оставшихся 5 по принципу Дирихле либо ≥ 3 знакомы с ним (случай А), либо ≥ 3 не знакомы (случай Б). В случае А: если среди этих троих есть хотя бы одна пара знакомых, то они + исходный человек дают искомую тройку. Если нет, то эти трое попарно незнакомы. Аналогично разбирается случай Б.

Раунд 4:

- **Команда 1, задача 1:** Угол 45°. Дальность $L = (V_0^2 * \sin(2\alpha))/g$. Максимум $\sin(2\alpha) = 1$ при $2\alpha=90° \rightarrow \alpha=45°$.
- **Команда 1, задача 2:** $S = 2 + 2*2*0.75/(1-0.75) = 2 + 4*0.75/0.25 = 2 + 12 = 14$ м.
- **Команда 2, задача 1:** Квадрат со стороной P/4.
- **Команда 2, задача 2:** Система: $b_1/(1-q)=12$; $(b_1^2/(1-q^2))=48$. Делим второе на квадрат первого: $(1-q)^2/(1-q^2)=48/144=1/3$. Решаем: $q=1/2$, $b_1=6$.
- **Команда 3, задача 1:** Пусть на квадрат идет x см, на треугольник (60-x). Сторона квадрата $a=x/4$, сторона треугольника $b=(60-x)/3$. Сумма площадей $S(x)= (x/4)^2 + (\sqrt{3}/4)*((60-x)/3)^2$. Найти минимум параболы.
- **Команда 3, задача 2:** Записать как $(10^n-1)/9$. Тогда ряд: $(1/9)*[(10-1)+(10^2-1)+...+(10^n-1)] = (1/9)*[(10^{(n+1)}-10)/9 - n]$.

Задача 1

На острове вы встретили двух жителей: A и B.
A говорит: «B — лжец».
B говорит: «Мы оба лжецы».
Кто из них рыцарь, а кто лжец?

Решение.
Предположим, что A — рыцарь. Тогда его утверждение истинно, значит, B — лжец. В этом случае B говорит: «Мы оба лжецы». Так как B лжец, это высказывание должно быть ложным. Действительно, фраза «мы оба лжецы» неверна, потому что A — рыцарь. Противоречий нет.
Теперь предположим, что A — лжец. Тогда его слова «B — лжец» ложны, значит, B на самом деле рыцарь. Но тогда B (рыцарь) говорит: «Мы оба лжецы» — это ложь (так как B рыцарь), а рыцарь не может лгать. Противоречие.
Следовательно, единственно возможный вариант: **A — рыцарь, B — лжец**.

Задача 2

Трое жителей A, B и C сделали заявления:
A: «B — лжец».
B: «C — лжец».

С: «А и В — лжецы».
Кто из них рыцарь?

Решение.
Проверим гипотезу, что А — рыцарь. Тогда В — лжец. Из слов В (лжеца) следует, что его утверждение «С — лжец» ложно, значит, С — рыцарь. Тогда С говорит: «А и В — лжецы». Но А рыцарь, поэтому это утверждение ложно, а С рыцарь не может лгать. Противоречие. Значит, А не рыцарь, а лжец.
Тогда утверждение А ложно, и В не является лжецом, то есть В — рыцарь. В говорит: «С — лжец» — это истина (так как В рыцарь), значит, С — лжец. Теперь проверяем С: он лжец и говорит «А и В — лжецы». На самом деле А лжец, но В рыцарь, поэтому утверждение ложно, что и требуется для лжеца.
Итак, **В — рыцарь**, А и С — лжецы.

Задача 3

Путешественник встретил двух аборигенов и спросил первого: «Вы рыцарь?» Тот ответил: «Да». Тогда второй сказал: «Первый — лжец». Определите, кто есть кто.

Решение.
Возможны два непротиворечивых варианта:

1. Первый — рыцарь. Тогда он сказал правду («да»), и второй, утверждая, что первый лжец, лжёт. Значит, второй — лжец.
2. Первый — лжец. Тогда он солгал, ответив «да» (на самом деле он не рыцарь), и второй говорит правду, называя его лжецом. Значит, второй — рыцарь.
   Оба варианта логически допустимы, поэтому задача имеет два решения: **либо первый рыцарь, второй лжец; либо первый лжец, второй рыцарь.**

Задача 4 (парадоксальная)

На острове вы встретили двух жителей. Один говорит: «Я лжец». Другой говорит: «Я рыцарь». Возможно ли это?

Решение.
Рассмотрим первого. Если он рыцарь, то его утверждение «я лжец» истинно, но рыцарь не может быть лжецом. Если он лжец, то его утверждение ложно, значит, он не лжец, то есть рыцарь — снова противоречие. Таким образом, первый не может быть ни рыцарем, ни лжецом. Следовательно, **такая ситуация невозможна** (при условии, что каждый — либо рыцарь, либо лжец). Эта задача демонстрирует логический парадокс самоотнесения.