ГЛАВА 1

Теоретическая часть.

1.1. История возникновения, применение аликвотных дробей.

Как известно, дроби появились еще в глубокой древности. Человек встретился с необходимостью ввести дроби при разделе добычи, измерении величин и нахождении их.

Первые дроби, с которыми нас знакомит история, это дроби вида $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$– так называемые **единичные** дроби, так как числитель этих дробей единица. Причиной появления этих дробей являлась необходимость разбить единицу на доли. Это нужно было для того:

- чтобы разделить добычу после охоты, ведь, нужно было знать, сколько частей составляет целое и кому какая часть добычи станет принадлежать.
- выразить результат измерения длины, времени, площади, массы и вести расчеты за товары

Эти дроби называли по-разному, но все вместе они назывались аликвотами. В переводе от латинского aliguot – «несколько».

Вот несколько названий таких дробей:

• $\frac{1}{100}$– процент

• $\frac{1}{1000}$ – промилли

• $\frac{1}{288}$– скрупулус

• $\frac{1}{24}$– семиунция

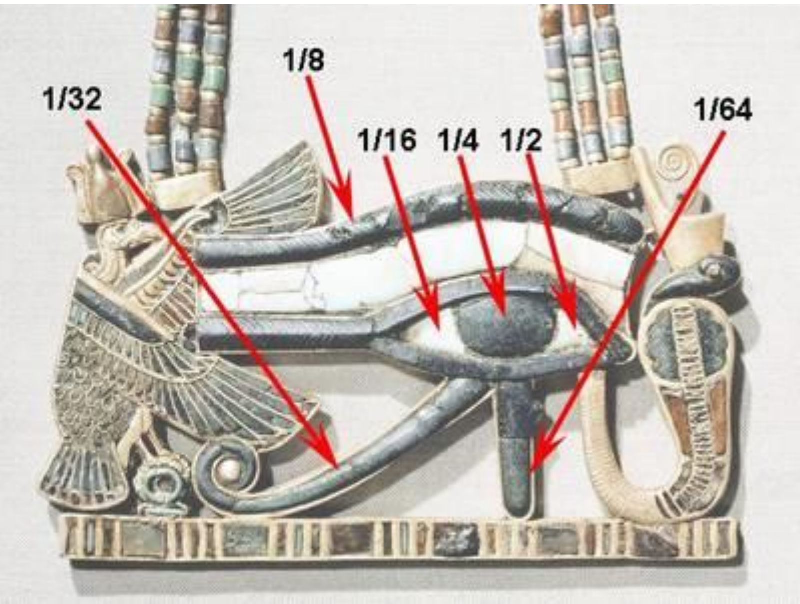
• $\frac{1}{8}$– сескунция

Аликвотные дроби появились раньше других дробей. С Древних времен эта тема считалась одной из самых сложных, поэтому, когда человек попадал в трудное положение, говорили «Попал в дроби».

Египтяне описывали единичные дроби в древнейших текстах о математике, им более 5000 лет – это древнеегипетские папирусы и вавилонские клинописные таблички.

В Древнем Египте математики «настоящими» считали только аликвотные дроби, поэтому египтяне все дроби старались записать как суммы единичных дробей (долей). Например, вместо $\frac{8}{15}$ они писали $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$. Дробь $\frac{7}{8}$ записывали в виде долей: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$.

Один из священных символов египтян – так называемое «око Хора» – также имеет математический смысл. Один из вариантов мифа о схватке между божеством ярости и разрушения Сетом и его племянником солнечным богом Хором гласит, что Сет выбил Хору левый глаз и разорвал или растоптал его. Боги восстановили глаз, но не полностью. Око Хора олицетворяло разные аспекты божественного порядка в мироустройстве, такие как идея плодородия или власть фараона. Изображение ока, почитавшегося как амулет, содержит элементы, обозначающие особый ряд чисел. Это дроби, каждая из которых вдвое меньше предыдущей: 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32 и 1/64. Символ божественного глаза, таким образом, представляет их сумму – 63/64. Некоторые историки-математики полагают, что в этом символе отражено понятие египтян о геометрической прогрессии. Составные части изображения ока Хора использовались в практических расчетах, например, при измерении объема сыпучих веществ, таких как зерно.



Важную работу по исследованию египетских дробей провёл математик XIII века Фибоначчи в своём труде «Liber Abaci».

Основная тема «Liber Abaci» - вычисления, использующие десятичные и обычные дроби, вытеснившие со временем египетские дроби. Фибоначчи использовал сложную запись дробей, включавшую запись чисел со смешанным основанием и запись в виде сумм дробей, часто использовались и египетские дроби. Также в книге были приведены алгоритмы перевода из обычных дробей в египетские.

А впоследствии математиками всего мира, применялись в решении задач аликвотные дроби. Хотя к ним предъявляли ряд замечаний. К примеру, Клавдий Птолемей говорил о неудобстве использования египетских дробей.

Методы использования единичных дробей перенимались одними народами у других. Например, греками от египтян, арабами от греков, а арабы научили Западную Европу считать в дробях. Но выполнять сложение, умножение и деление дробей было очень проблематично и неудобно.

1.2. Дроби на Руси.

В VII веке на Руси в писаниях о математике дроби сначала именовались как доли, а позже - «ломаными числами». Слово «дробь» в русском языке впервые упоминалось в VIII веке, это производное от «дробить» – разбивать на части или ломать. Числитель и знаменатель числа разделяла горизонтальная черта.

В старых руководствах есть следующие названия дробей на Руси:

$\frac{1}{2}$ – половина, полтина

$\frac{1}{3}$ – треть

$\frac{1}{4}$ – четь

$\frac{1}{5}$ – пятина

$\frac{1}{6}$ – полтреть

$\frac{1}{7}$ – седьмина

$\frac{1}{8}$ – полчеть

$\frac{1}{10}$– десятина

$\frac{1}{12}$– полполтреть

$\frac{1}{16}$– полполчеть

На Руси еще применялась земельная мера $\frac{1}{4}$и меньшая – получетверть, ее называли осьмина. Для точного измерения площади земли применялись именно такие дроби, но осьминой непозволительно измерять время или что-то другое. И только позже осьмина стала означать простую дробь $\frac{1}{8}$, через которую обозначали абсолютно любую величину.

1.3. Понятие аликвоты в других науках.

Аликвотные величины в настоящее время используются не только в математике. В музыке есть понятие аликвотных струн. Аликвотные или резонансные струны – это дополнительные струны, не используемые непосредственно исполнителем, а самовозбуждающиеся от колебания игровых струн. Аликвотные струны служат для обогащения тембра и усиления звучания.

Мы живем в мире звуков. Люди давно научились записывать различные звуки с помощью специальных знаков. Музыкальные звуки записываются с помощью нот. Какая же дробь, соответствует какой ноте определенной длительности?

Нота вдвое короче целой называется половинной. С точки зрения математики, целую ноту можно принять за единицу, половинная в два раза короче, значит, половинной ноте соответствует дробь $\frac{1}{2}$. Нота вдвое короче половинной называется четвертой. С точки зрения математики, половинной ноте соответствует дробь $\frac{1}{2}$, а четвертая в два раза короче, значит, четвертой ноте соответствует дробь $\frac{1}{4}$. Нота вдвое короче четвертой называется восьмой. С точки зрения математики, четвертой ноте соответствует дробь $\frac{1}{4}$, а восьмая в два раза короче, значит, восьмой ноте соответствует дробь $\frac{1}{8}$. Нота вдвое короче восьмой называется шестнадцатой. С точки зрения математики, восьмой ноте соответствует дробь $\frac{1}{8}$, а шестнадцатая в два раза короче, значит, шестнадцатой ноте соответствует дробь $\frac{1}{16}$.

В физике, химии и фармацевтике используется понятие аликвотная доля или аликвота – это точно известная часть раствора.

1.4. Выводы по теоретической части.

Итак, аликвотными дробями (лат. aliquoties, «несколько раз или несколько частей») называются дроби вида $\frac{1}{n}$, где числитель равен 1, а знаменатель n – натуральное число не равное единице.

Задачи с использованием аликвотных дробей составляют обширный класс нестандартных задач. Сюда относятся, прежде всего задачи, в которых требуется разделить какие-либо ресурсы на несколько частей с наименьшим количеством действий. Для этого необходимо представить какое-либо число в виде суммы аликвотных дробей.

Для разложения неединичных дробей на сумму единичных существовали готовые таблицы, которыми и пользовались египетские писцы для необходимых вычислений (Именно поэтому папирус Ахмеса начинается с таблицы, в которой все дроби такого вида от $\frac{2}{5}$до $\frac{2}{99}$записаны в виде сумм долей, т.е. в виде суммы двух, трёх или четырёх аликвот).

Складывать такие дроби было неудобно, т.к. в оба слагаемых могут входить одинаковые доли, и тогда при сложении появится дробь вида $\frac{2}{n}$. А таких дробей египтяне не допускали.

Представление аликвотной дроби вида 1/n в виде суммы двух аликвотных дробей:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$$

Доказать это равенство можно, приведя дроби в правой части равенства к общему знаменателю и после сокращений увидеть, что формула верна.

Отметим тот факт, что любая аликвотная дробь всегда меньше единицы.

Еще несколько формул, легко выводящихся и легко доказуемых (Так же, как в предыдущем случае, приводим дроби в правой части равенства к общему знаменателю и после сокращений видим, что формула верна.):

$$\frac{2}{(2n+1)} = \frac{1}{(2n+1)(n+1)}$$

$$\frac{1}{(mn)} = \frac{1}{n(m+n)} + \frac{1}{m(m+n)}$$

$$\frac{1}{(mn)} = \frac{1}{m(n-m)} - \frac{1}{n(n-m)}$$

$$\frac{1}{(mn)} = \frac{1}{n(m+1)} + \frac{1}{mn(m+1)}$$

$$\frac{1}{(mn)} = \frac{1}{m(n+1)} + \frac{1}{mn(n+1)}$$

ГЛАВА 2

Практическая часть

Поскольку понятие аликвотной дроби в современных российских школах не употребляется, задачи с применением данного термина на уроках и на олимпиадных соревнованиях не встретить. Но большое количество задач можно решить, используя знания по теории аликвотных дробей.

Задачи с использованием аликвотных дробей составляют обширный класс нестандартных задач, в том числе пришедших из глубины веков.

Приведем примеры таких задач, начиная с древних и заканчивая современными.

2.1. Задача египетского жреца и писаря Ахмеса.

Разделить 7 хлебов между 8 людьми, сделав как можно меньшее количество разрезов.

Решение:

Если разрезать каждый хлеб на 8 частей, придется провести 49 разрезов (7 хлебов по 7 надрезов в каждом хлебе). По-египетски эта задача решалась так: $\frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. Значит, каждому человеку нужно дать половину хлеба, четверть хлеба и восьмую часть хлеба. Придется сделать почти в три раза меньше разрезов.

2.2. Задача из сказки «1001 ночь».

В знаменитой книге «1001 ночь» мудрец задаёт юной деве следующую задачу: «Одна женщина отправилась в сад собирать яблоки. Чтобы выйти из сада, ей нужно было пройти через четыре двери, у каждой из которых стоял стражник. Стражнику у первых дверей женщина отдала половину сорванных ею яблок. Дойдя до второго стражника, женщина отдала ему половину от того, сколько осталось. Так же она поступила и с третьим стражником, а когда она поделилась яблоками с четвёртым стражником, у неё осталось 10 яблок. Сколько яблок она собрала в саду?»

Решение:

$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}$,

Значит, оставшаяся $\frac{1}{16}$часть равна 10 яблокам,

тогда x= 80+40+20+10+10= 160

2.3. Старинная персидская задача.

Персидский крестьянин завещал трем своим сыновьям 17 верблюдов, причем первый должен был получить $\frac{1}{2}$часть всех верблюдов, второй – $\frac{1}{3}$часть, а третий – $\frac{1}{9}$. Братья думали долго, но разделить наследство по завещанию отца так и не смогли. Мимо на верблюде проезжал Ходжа Насреддин. Он предложил присоединить к верблюдам еще и своего, и решить, таким образом, возникшую проблему. И действительно, братья смогли разделить верблюдов так, как наказал отец, причем Ходжа Насреддин получил своего верблюда обратно. Сколько верблюдов досталось каждому сыну?

Решение:

1. 17 + 1 = 18 верблюдов всего;

2. $18 \cdot \frac{1}{2} = 9$верблюдов получил первый сын;

3. $18 \cdot \frac{1}{3} = 6$ верблюдов получил второй сын;

4. $18 \cdot \frac{1}{9} = 2$верблюдов получил третий сын;

5. 18 – (9 + 6 + 2) = 1 верблюда вернули Ходже Насреддину.

Ответ: 9, 6, 2 верблюда

2.4. Олимпиадные задачи.

1) Представить число 1 в виде сумм различных дробей с числителем равным единице:

а) трёх слагаемых;

б) четырёх слагаемых;

в) пяти слагаемых;

г) шести слагаемых;

д) Возможно ли представить 1 в виде суммы двух аликвотных дробей с разными знаменателями?

Решение:

Мы знаем, что дробь с числителем 1 — это аликвотная дробь, поэтому воспользуемся формулой для разложения аликвотной дроби на сумму двух аликвотных дробей: $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$.

а) $1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$.

б) $1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{42}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$.

в) $1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{42}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$.

г) $1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{42}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\left(\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{56}\right)+\frac{1}{42}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}+\frac{1}{56}+\frac{1}{42}$.

д) Нет, так как найдя сумму самых больших аликвотных дробей ($\frac{1}{2}$ — самая большая и $\frac{1}{3}$ - вторая по величине), видим, что эта сумма меньше единицы.

2) Вот задача, которую придумал лично я:

Представьте дробь $\frac{1}{2023}$в виде суммы двух дробей с числителем 1.

Решение:

$\frac{1}{2023} = \frac{1}{2024} + \frac{1}{2023 \cdot 2024} = \frac{1}{2024} + \frac{1}{4094552}$.

3) Тоже мной придуманная задача. Представьте дробь $\frac{1}{2024}$в виде разности двух различных аликвотых дробей, у которых знаменатель не равен 2024.

Решение: воспользуемся формулой $\frac{1}{a(a+b)}=\frac{1}{ab} - \frac{1}{b(a+b)}$, но для этого представим $\frac{1}{2024}$ в виде $\frac{1}{a(a+b)}$: пусть a=2, тогда b=2024:2-2=1010.

Подставляем наши значения под эту формулу:

$\frac{1}{2(2*1010)}=\frac{1}{2*1010}-\frac{1}{1010(2+1010)}$. После подставления мы получаем, что

$\frac{1}{2024}=\frac{1}{2020}-\frac{1}{1\,022\,120}$. Задача решена!

4) Найти сумму $\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}+\frac{1}{132}$.

Решение: Заметим, что знаменатели представляют собой произведения последовательных чисел (20=4*5, 30=5*6, 42=6*7 и т.д.), итак, воспользуемся преобразованной формулой для разложения аликвотной дроби $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$:

$\frac{1}{20} = \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$;

$\frac{1}{30} = \frac{1}{5 \cdot 6} = \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$;

$\frac{1}{42} = \frac{1}{6 \cdot 7} = \frac{1}{6} - \frac{1}{7}$;

$\frac{1}{56} = \frac{1}{7 \cdot 8} = \frac{1}{7} - \frac{1}{8}$;

$\frac{1}{72} = \frac{1}{8 \cdot 9} = \frac{1}{8} - \frac{1}{9}$;

$\frac{1}{90} = \frac{1}{9 \cdot 10} = \frac{1}{9} - \frac{1}{10}$;

$\frac{1}{110} = \frac{1}{10 \cdot 11} = \frac{1}{10} - \frac{1}{11}$;

$\frac{1}{132} = \frac{1}{11 \cdot 12} = \frac{1}{11} - \frac{1}{12}$;

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Ответ: $\frac{1}{6}$

5) Решить уравнение

$\left(\frac{1}{25 \cdot 26} + \frac{1}{26 \cdot 27} + \frac{1}{27 \cdot 28} + \frac{1}{28 \cdot 29} + \frac{1}{29 \cdot 30}\right) \cdot 150 + 1{,}03 : \left(10{,}3(x-1)\right) = 11.$

Решение:

Упростим уравнение и найдем сумму аликвотных дробей:

$\frac{1}{25 \cdot 26} + \frac{1}{26 \cdot 27} + \frac{1}{27 \cdot 28} + \frac{1}{28 \cdot 29} + \frac{1}{29 \cdot 30}$.

Представим каждую дробь в виде разности аликвотных дробей

$\frac{1}{25 \cdot 26} = \frac{1}{25} - \frac{1}{26}$;

$\frac{1}{26 \cdot 27} = \frac{1}{26} - \frac{1}{27}$;

$\frac{1}{27 \cdot 28} = \frac{1}{27} - \frac{1}{28}$;

$\frac{1}{28 \cdot 29} = \frac{1}{28} - \frac{1}{29}$;

$\frac{1}{29 \cdot 30} = \frac{1}{29} - \frac{1}{30}$;

$\frac{1}{25} - \frac{1}{26} + \frac{1}{26} - \frac{1}{27} + \frac{1}{27} - \frac{1}{28} + \frac{1}{28} - \frac{1}{29} + \frac{1}{29} - \frac{1}{30} = \frac{1}{25} - \frac{1}{30} = \frac{1}{150}$;

$\frac{1}{25 \cdot 26} + \frac{1}{26 \cdot 27} + \frac{1}{27 \cdot 28} + \frac{1}{28 \cdot 29} + \frac{1}{29 \cdot 30} = \frac{1}{150}$.

После нахождения суммы, уравнение примет следующий вид

$$\frac{1}{150} \cdot 150 + 1{,}03 : \left(10{,}3(x-1)\right) = 11$$

$$1 + 1{,}03 : \left(10{,}3(x-1)\right) = 11$$

$$1{,}03 : \left(10{,}3(x-1)\right) = 10$$

$$\left(10{,}3(x-1)\right) = 1{,}03 : 10$$

$$10{,}3(x-1) = 0{,}103$$

$$(x-1) = 0{,}103 : 10{,}3$$

$$x - 1 = 0{,}01$$

$$x = 1{,}01$$

Ответ: 1,01

6) Найти сумму $\frac{1}{10\cdot 11} + \frac{1}{11\cdot 12} + \ldots + \frac{1}{98\cdot 99} + \frac{1}{99\cdot 100}$

Решение:

Чтобы найти решение данной задачи, можно найти сумму

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{98\cdot 99} + \frac{1}{99\cdot 100} = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$$

И вычесть из нее сумму

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{8\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 10} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

$$\frac{99}{100} - \frac{9}{10} = \frac{99}{100} - \frac{90}{100} = \frac{9}{100} = 0{,}09$$

А можно сразу разложить каждое слагаемое в виде разности аликвотных дробей. Придем к тому же ответу.

7) а) Доказать, что $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} < 1$

б) На сколько сумма аликвотных дробей, записанных в левой части неравенства, отличается от 1?

в) Будет ли неравенство по-прежнему верным, если сумма в левой части неравенства, построенная по тому же закону, содержит 100 слагаемых?

Решение:

а) По рисунку 1 видно, что сумма $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + 1/64 < 1$.

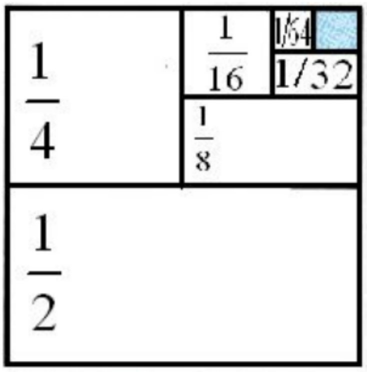


рисунок 1. Иллюстрация решения задачи

Что и требовалось доказать.

б) $1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}\right) = \frac{1}{64}$. Видно из рисунка.

в) Даже если сумма в левой части неравенства, построенная по тому же закону, содержит 100 слагаемых, неравенство по-прежнему будет верным. (Используем тот же принцип разбиения квадрата).

2.5. Задачи из ЕГЭ.

Пересмотрев большое количество задач из ЕГЭ разных лет, я убедился, что аликвотные дроби встречаются довольно часто, просто термин «Аликвотная дробь» не употребляется. Вот примеры таких задач:

1). ЕГЭ 2018 год — задача под номером 19.

Будем называть дробь «простой», если её числитель равен 1, а знаменатель — натуральное число.

а) Запишите число 1 в виде трёх различных простых дробей.

б) Можно ли записать число 1 в виде двух различных простых дробей?

Решение данной задачи представлено в моей работе в разделе «Олимпиадные задачи»

2). Тренировочный вариант ЕГЭ 2018 год — задача под номером 19.

Представьте число 1 в виде суммы семи различных рациональных дробей, все числители которых равны 1.

3). ЕГЭ 2018 год — задача под номером 19.

Представьте число $\frac{15}{91}$ в виде суммы нескольких дробей, все числители которых — единица, а знаменатели — попарно различные натуральные числа.

Решение, которое предложено методистами:

Нужно найти все делители знаменателя 91 и из суммы всех или некоторых из них получить 15 (то есть значение числителя), D(91)=1, 7, 13, 91. Как мы видим, найти такую сумму невозможно, поэтому домножим числитель и знаменатель дроби на одно и то же число, например, 2. С полученной дробью $\frac{30}{182}$проведем ту же манипуляцию: D(182)=1, 2, 7, 13, 14, 26, 91, 182. 30 получим так: 14+13+2+1. Тогда дробь $\frac{30}{182}$представляем в виде суммы таких дробей: $\frac{30}{182}=\frac{14}{182}+\frac{13}{182}+\frac{2}{182}+\frac{1}{182}$. Сокращаем дроби, получаем: й: $\frac{30}{182}=\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{91}+\frac{1}{182}$. Это ответ.

Решение, которое предлагаю я (с помощью знаний об аликвотных дробях):

Зная, что 91=13*7, представим числитель в виде суммы 13(самый большой из простых делителей)+2(значение разности числителя и самого большого делителя знаменателя): $\frac{15}{91}=\frac{13}{91}+\frac{2}{91}$. $\frac{13}{91}$сокращаем, а $\frac{2}{91}=\frac{1}{91}+\frac{1}{91}$.$\frac{1}{91}$раскладываем по формуле на сумму двух аликвотных дробей и получаем: $\frac{15}{91}=\frac{1}{7}+\frac{1}{91}+\frac{1}{92}+\frac{1}{91*92}=\frac{1}{7}+\frac{1}{91}+\frac{1}{92}+\frac{1}{8372}$. Это ответ.

Как мы видим, данное решение намного короче известного ранее и проще для понимания школьников.

4). ЕГЭ 2018 год — задача под номером 19.

Найдите все возможные пары натуральных чисел *m* и *n*, для которых и

Решение, которое предложено методистами:

Пусть $m = dp$, $n = dq$, где d — наибольший общий делитель чисел m и n. Тогда $\frac{1}{dp}+\frac{1}{dq}=\frac{1}{14}$; $14(p+q)= dpq$ Числа p, q и $p+q$ попарно взаимно простые, поэтому числа p и q являются взаимно простыми делителями числа 14. Получаем следующие варианты:

p	q	d	m	n
1	1	28	28	28
1	2	21	21	42
1	7	16	16	112
1	14	15	15	210
2	7	9	18	63

Ответ: 28 и 28, 21 и 42, 16 и 112, 15 и 210, 18 и 63.

Согласитесь, довольно сложное для понимания решение. А с помощью формул для разложения дроби на сумму двух аликвотных тот же ответ мы получаем намного быстрее:

$\frac{1}{14} = \frac{1}{28} + \frac{1}{28}$ (Из формулы: $\frac{1}{\mathrm{n}} = \frac{1}{2\mathrm{n}} + \frac{1}{2\mathrm{n}}$)

$\frac{1}{14} = \frac{1}{15} + \frac{1}{14*15}$ (Из формулы: $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$

$\frac{1}{14} = \frac{1}{7*3} + \frac{1}{14*3}$ (Из формулы: $\frac{1}{(mn)} = \frac{1}{n(m+1)} + \frac{1}{mn(m+1)}$)

$\frac{1}{14} = \frac{1}{2*8} + \frac{1}{14*8}$ (Из формулы: $\frac{1}{(mn)} = \frac{1}{m(n+1)} + \frac{1}{mn(n+1)}$)

$\frac{1}{14} = \frac{1}{7*9} + \frac{1}{2*9}$ (Из формулы: $\frac{1}{(mn)} = \frac{1}{n(m+n)} + \frac{1}{m(m+n)}$)

Еще достаточно много задач с похожими формулировками встречается на ЕГЭ и на олимпиадах. Так же самим можно составлять сколько угодно задач с такими условиями. Например:

Найдите все натуральные числа a и b такие, что $\frac{1}{2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Или:

Найдите все возможные разложения дроби $\frac{1}{6}$ на сумму двух аликвотных.

Или:

Сколько существует способов разложить дробь $\frac{1}{25}$ на сумму двух аликвотных дробей?

Или:

Разложите дробь $\frac{1}{7}$ на сумму двух, трех, четырех и т. д. аликвотных дробей.

Исследовательская часть

Методы исследования:

- Анализ литературы

Изучение книг, статей и научных публикаций, которые описывают историю аликвотных дробей. Это помогло создать теоретическую основу аликвотных и их применения.

- Эксперимент

Метод исследования, который позволяет изучать причинно-следственные связи, проверять гипотезы и выявлять новые закономерности. Он включает в себя:

- Сравнительный анализ

Сравнение результатов решения задач испытуемыми до и после объяснения теоретического материала.

Методы сбора информации:

Для моего исследования я использовал несколько методов сбора данных. Это помогло мне понять, какие игрушки были популярны в разные времена и как изменялись способы развлечения детей.

Экспериментальные методы:

- Проведение контролируемых экспериментов для сбора данных о взаимосвязях между переменными.

- Существующие данные:

- Использование доступных данных из опубликованных исследований, статистических организаций и других источников.

Графики и диаграммы:

- Визуализация данных для упрощения анализа и представления информации.

Статистический анализ:

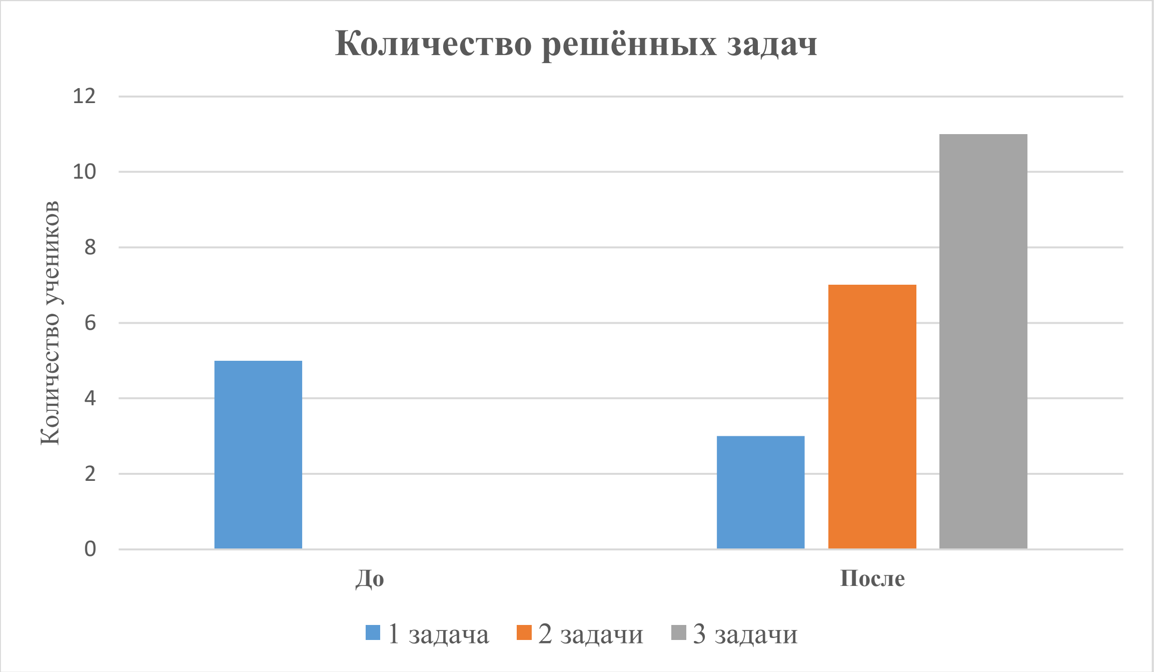
- Применение статистических методов для обработки и анализа собранной информации.

Экспериментальная часть

В рамках моего проекта был проведён эксперимент, чтобы выяснить насколько эффективно изучение теории аликвотных дробей для решения олимпиадных задач. Всего в эксперименте принимал участие 21 человек – обучающиеся моего класса. Участникам эксперимента были даны 3 задачи:

1. Разложить 1 на сумму пяти дробей с числителем 1.
2. Представьте дробь $\frac{1}{7}$ в виде двух дробей с числителем 1.
3. Представьте дробь $\frac{1}{12}$ в виде разности двух дробей с числителем 1.

На решение этих задач я дал 15 минут. Как указано в диаграмме, всего 5 учеников смогли решить по одной задаче.



После этого я коротко объяснил им теорию и дал немного изменённые задачи и 15 минут на их решение. После объяснения теории 3 задачи решили 11 учеников, 2 задачи – 7 учеников, а только одну задачу решили всего 3 ученика.

Вывод: знание теории об аликвотных дробях очень помогает при решении задач, связанных с темой аликвотных дробей. Количество обучающихся, успешно решающих задачи по данной теме, выросло в 4,2 раза.

Заключение

Таким образом, при разработке данной темы, я узнал, что первыми дробями, которыми оперировали люди, были аликвотные дроби. Задачи с использованием аликвотных дробей составляют обширный класс нестандартных задач. Аликвотные дроби используются тогда, когда требуется что-то разделить на несколько частей с наименьшим количеством действий для этого. Разложение дробей на две аликвотные дроби систематизировали в виде формул, преобразовав которые, легко решили сложные олимпиадные задачи и задачи ЕГЭ по математике разных лет. Решив проблему разложения аликвотных дробей на две аликвотные дроби, мы пришли к выводу, что разложение на три, четыре, пять и т.д. аликвотных дробей можно произвести, разложив одно из слагаемых на две дроби, следующее слагаемое еще на две аликвотные дроби и т.д.

Выдвинутая гипотеза оказалась верна: Зная аликвотные дроби и их свойства можно гораздо эффективнее решать некоторые олимпиадные задачи. Данная гипотеза подтверждена экспериментально.

Данный проект является долгосрочным. В 2024-2025 учебном году свой проект я дополнил задачами собственного сочинения, разработал рациональные методы их решения, значительно расширил знания своих одноклассников об аликвотных дробях и показал им практическую значимость применения аликвотных дробей в современной математике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вакульчик П.А. Задачи математических олимпиад школьников с решениями. - Минск: УниверсалПресс, 2006.
2. Гаврилова Т.Д. Занимательная математика, 5-11классы. - Волгоград: Учитель, 2008.
3. Кириллова Д.А., Белова О.Н. Методические аспекты обучения элементам исследовательской деятельности на уроках математики. – М.: Мир науки, 2019, с. 17-31.
4. Левитас Г.Г. Нестандартные задачи по математике. - М.: ИЛЕКСА, 2007.
5. Международный школьный научный вестник № 5, 2018, с. 799-813.
6. Фарков А. В. Математические олимпиады в школе, 5-11классы. – М.: Айрис-пресс, 2012.
7. Фарков А.В. Математические олимпиады 5-6 классы.- М: Издательство «Экзамен». – М.: 2019.
8. Интеренет-ресурсы (https://mathvox.ru/algebra; https://infourok.ru, https://ege.sdamgia.ru).