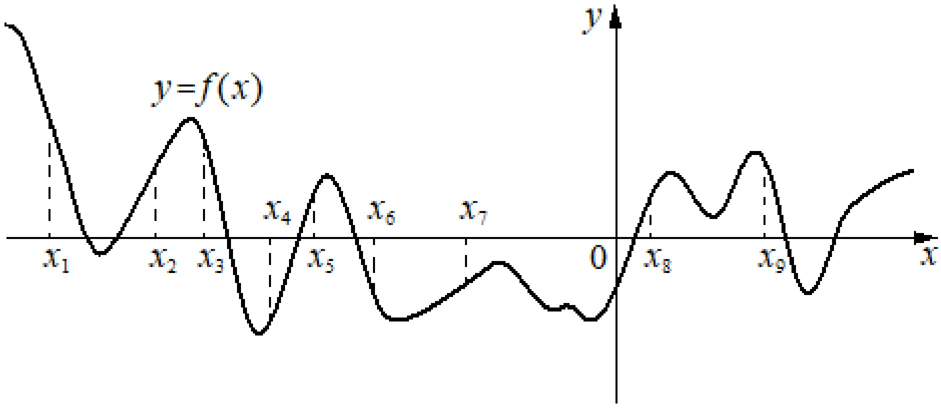
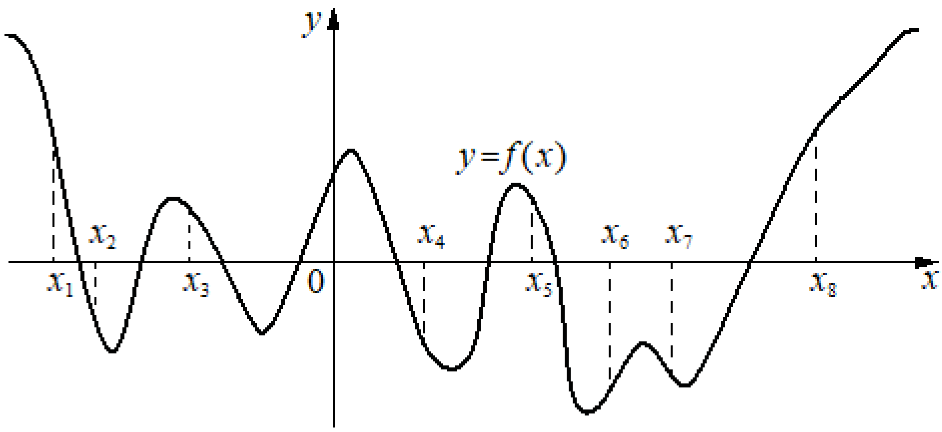
1. На рисунке изображён график функции y= f(x). На оси абсцисс отмечено девять точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9. Найдите количество отмеченных точек, в которых производная функции f(x) отрицательна.



Решение. Идём по графику слева направо. При переходе через точку x_1 карандаш спускается вниз, значит, в данной точке функция убывает и, следовательно, производная отрицательна. При переходе через точку x_2 рука идёт вверх, значит, в этой точке функция $f(x)$ возрастает, а производная $f'(x) > 0$. По условию задачи мы должны учесть те из отмеченных точек, где $f'(x) < 0,$ т.е. функция убывает. Удовлетворяющими условию задачи оказываются точки x_1, x_3, x_6, x_9. Их четыре.

Ответ: 4.

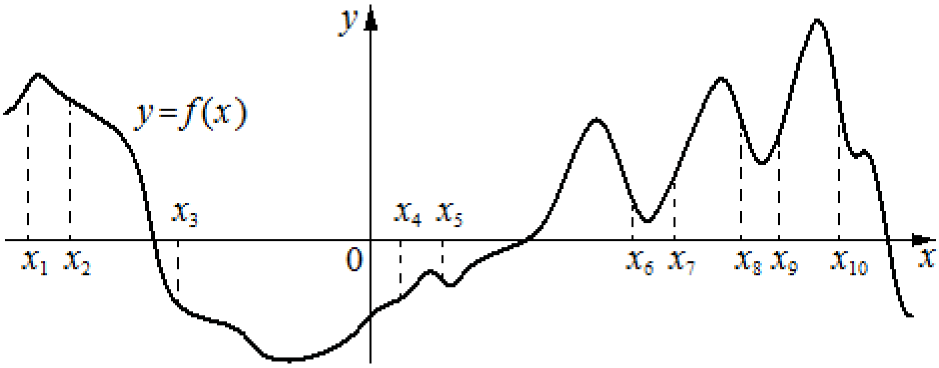
2. На рисунке изображён график функции y=f(x). На оси абсцисс отмечено восемь точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8. Найдите количество отмеченных точек, в которых производная функции f(x) положительна.



Решение. Идём по графику слева направо и «собираем» точки, при переходе через которые $f'(x) > 0.$ Помним, что при переходе через такие точки рука должна двигаться вверх. Это x_6, x_8. Их всего две.

Ответ: 2.

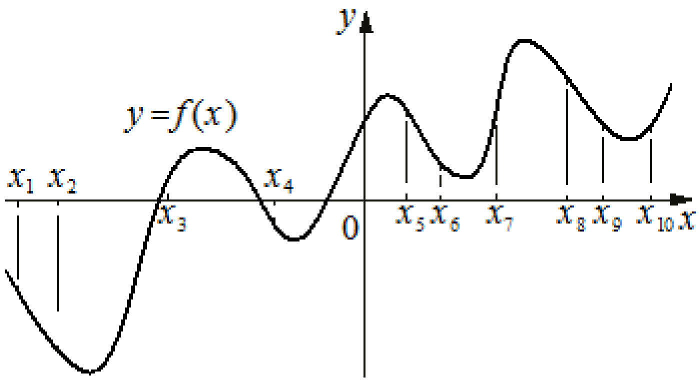
3. На рисунке изображён график функции y=f(x). На оси абсцисс отмечено десять точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}. Найдите количество отмеченных точек, в которых производная функции f(x) отрицательна.



Решение: $f'(x) < 0$ в тех точках, где функция f(x) убывает. Это точки: x_2,x_3,x_5,x_6,x_8,x_{10}. Их всего 6.

Ответ: 6.

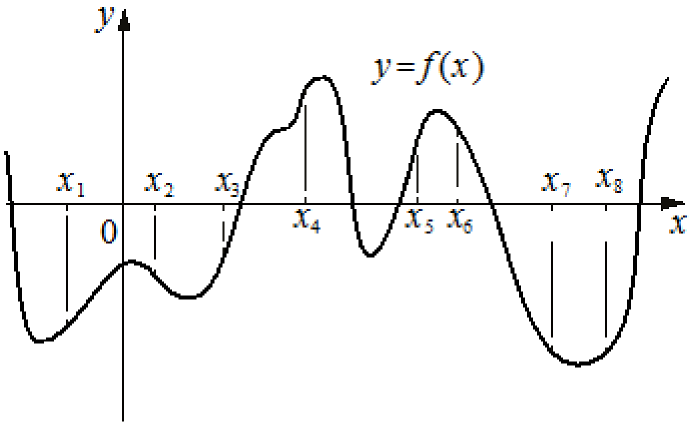
4. На рисунке изображён график функции y=f(x). На оси абсцисс отмечено десять точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10} . В ответе укажите количество точек (из отмеченных), в которых производная функции f(x) отрицательна.



Решение: $f'(x) < 0$ в тех точках, где функция f(x) убывает. Это точки: x_1,x_2,x_4,x_5,x_6,x_8,x_9. Их всего 7.

Ответ: 7.

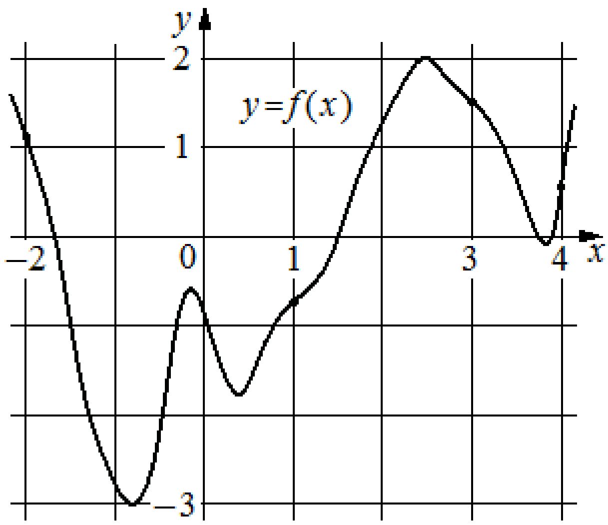
5. На рисунке изображён график функции y=f(x). На оси абсцисс отмечено восемь точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8. В ответе укажите количество точек (из отмеченных), в которых производная функции f(x) положительна.



Решение: $f'(x) > 0$ в тех точках, где функция f(x) возрастает. Это точки: x_1, x_3, x_4, x_5, x_8. Их 5.

Ответ: 5.

6. На рисунке изображён график функции y=f(x). На оси абсцисс отмечены точки − 2, 1, 3, 4. В какой из этих точек значение производной функции f(x) наибольшее? В ответе укажите эту точку.

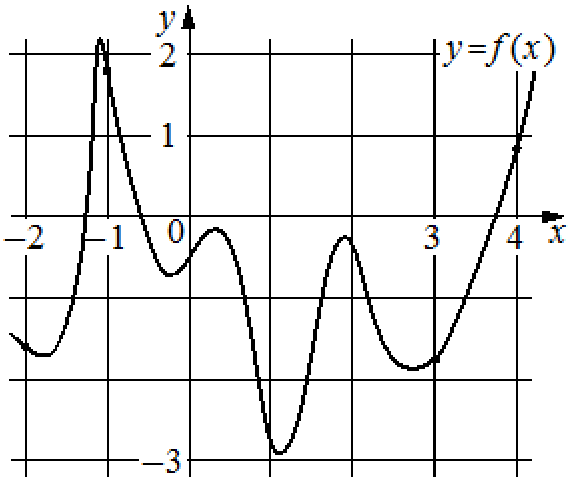


Решение: В указанных точках функция ведёт себя по-разному: она убывает в точках -2 и 3, а возрастает в точках 1 и 4. Понятно, что в точках -2 и 3 производная функции отрицательна, а в 1 и 4 – положительна. По условию задачи мы должны выбрать точку с наибольшим значением производной. Ясно, что точки -2 и 3 отпадают сразу. В точках 1 и 4 функция возрастает, производная в них положительна, но видно, что в точке 4 функция растёт быстрее, нежели в точке 1, и, значит, значение производной в точке 4 больше (график идёт круче).

Замечание: если сравнить угол наклона касательной к графику функции в точках 1и 4, то заметно, что в точке 4 он больше, а тангенс угла наклона касательной к оси Ох и есть значение производной в данной точке. Большему значению угла наклона касательной будет соответствовать большее значение производной.

Ответ:4.

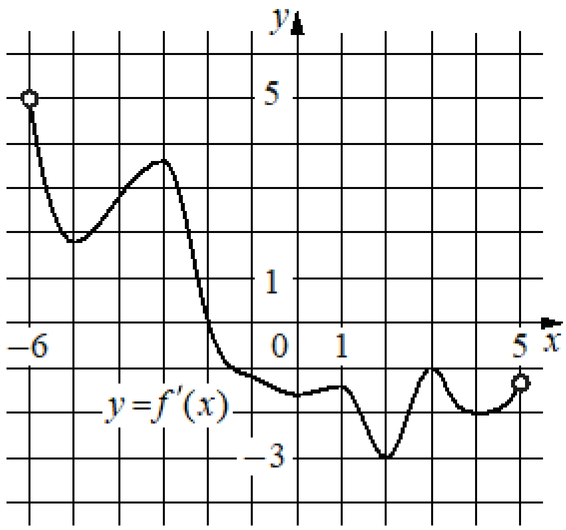
7. На рисунке изображён график функции $y=f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки $-2, -1, 3, 4$. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



Решение. В указанных точках функция ведёт себя по-разному: она убывает в точках -2 и -1, возрастает в точках 3 и 4. Понятно, что в точках -2 и -1 производная функции отрицательна, а в 3 и 4 – положительна. По условию задачи мы должны выбрать точку с наименьшим значением производной. Ясно, что точки 3 и 4 отпадают сразу. В точках -2 и -1 функция убывает, видно, что в точке -1 она убывает более стремительно, чем в точке -2. Значит, модуль производной в точке -1 больше, чем в -2, и, стало быть, и наименьшее значение производной достигается в точке -1.

Замечание. Знак производной «+», как мы помним, означает возрастание функции на интервале, знак «-« - убывание функции на интервале. Модуль же производной характеризует СКОРОСТЬ изменения (возрастания или убывания) функции. Чем модуль больше, тем быстрее изменяется (возрастает или убывает) функция.

8. На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 5)$. В какой точке отрезка $[-5; -2]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?

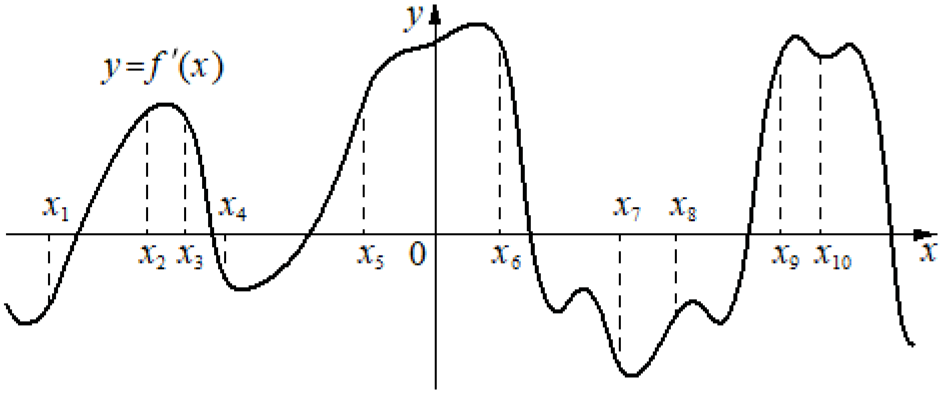


Решение. По приведённому графику производной видно, что на отрезке $[-5;-2]$ производная сохраняет знак + (за исключением точки -2, где она равна 0), а значит, на этом отрезке функция возрастает, следовательно, её наименьшее значение приходится на левую границу интервала, т.е. на точку -5.

Замечание. То, что на указанном отрезке значение производной меняется (она сначала возрастает, потом убывает) говорит лишь о том, что меняется скорость возрастания функции, в то время как характер монотонности ФУНКЦИИ (она возрастает) не изменяется. Согласно знаку «+» производной, функция возрастает на отрезке $[-5;-2]$.

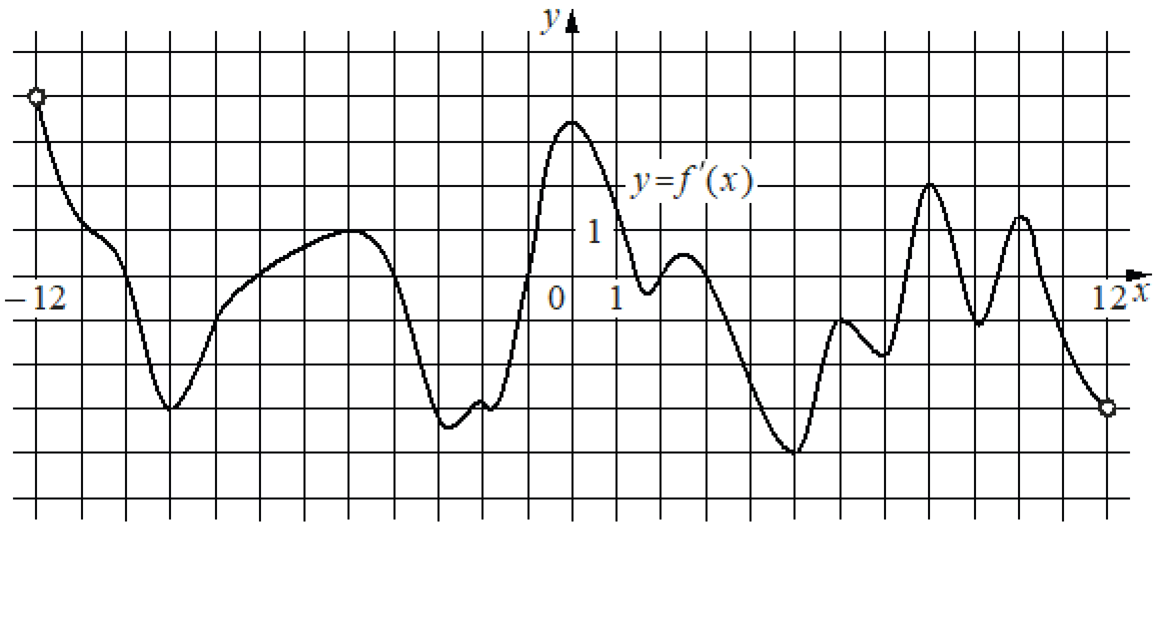
Ответ: -5.

9. На рисунке изображён график y=f'(x) — производной функции f(x). На оси абсцисс отмечено десять точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам возрастания функции f(x)?



Решение: Приведён график ПРОИЗВОДНОЙ функции. По знаку производной судим о монотонности (возрастании или убывании) самой функции. Нужно выделить точки, где ФУНКЦИЯ возрастает, значит, нужно выбирать точки, в которых ПРОИЗВОДНАЯ положительна, т.е. график производной располагается выше оси OX. Подходят точки: x_2, x_3, x_5, x_6, x_9, x_{10}. Их 6.
Ответ: 6.

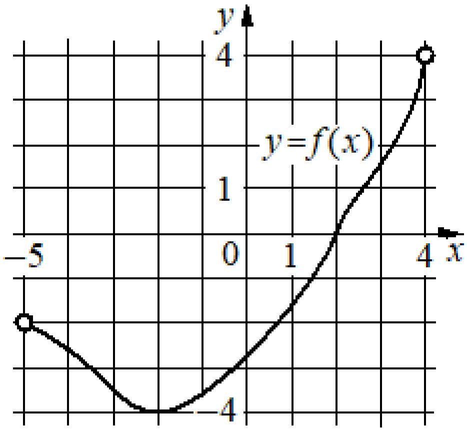
10. На рисунке изображён график y=f'(x) — производной функции f(x), определённой на интервале (− 12; 12). Найдите количество точек максимума функции f(x), принадлежащих отрезку [− 6; 11].



Решение: В КИМах есть смысл сразу выделить отрезок $[-6; 11]$. В точках максимума, как известно, производная меняет знак с «+» на «-«. Таких точек пять.

Ответ: 5.

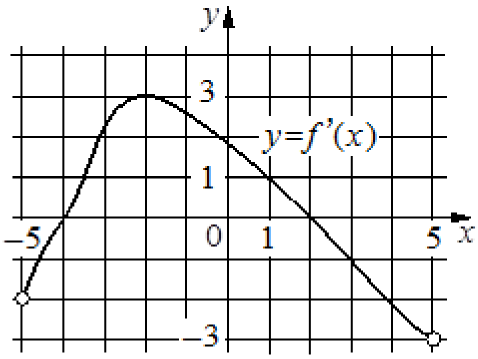
11. На рисунке изображён график функции y=f(x), определённой на интервале $(-5; 4)$. Найдите корень уравнения f'(x)=0.



Решение: Согласно теореме Ферма, в точках экстремума дифференцируемой функции $f'(x) = 0$. Т.е., если уравнение $f'(x) = 0$ корень имеет, то в точке x_0 должен наблюдаться локальный минимум (или максимум) дифференцируемой функции. На этом графике достигается только минимум функции. Он получается в точке x=-2.

Ответ: -2.

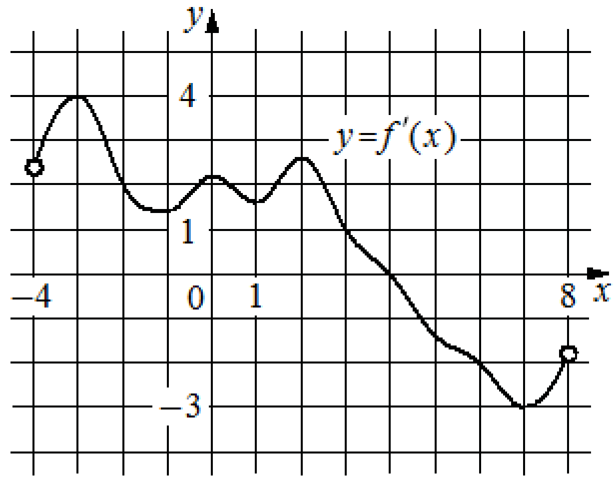
12. На рисунке изображён график y=f'(x) — производной функции f(x), определённой на интервале $(-5; 5)$. Найдите точку максимума функции f(x).



Решение: Функция f(x) будет иметь точку максимума там, где производная $f'(x)$ будет менять знак с плюса на минус (это достаточное условие экстремума дифференцируемой функции). Такая точка x=2.

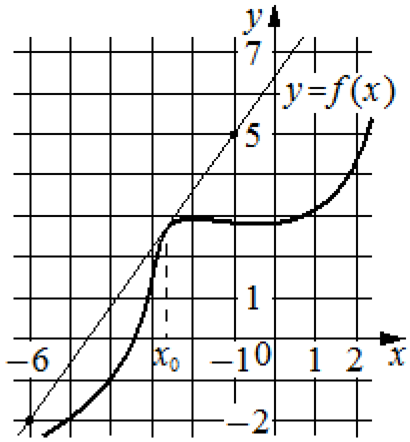
Ответ: 2.

13. На рисунке изображён график y=f'(x) — производной функции f(x), определённой на интервале $(-4; 8)$. Найдите точку экстремума функции f(x), принадлежащую отрезку [1; 6].



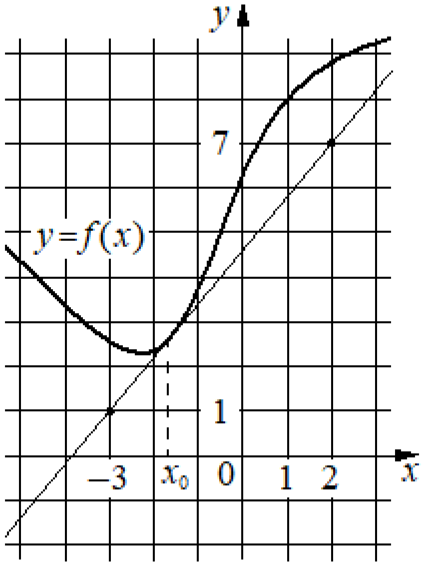
Решение: На отрезке [1; 6] производная меняет знак один раз. Это происходит в точке x=4, где она меняет знак с плюса на минус, и, следовательно, это будет точка экстремума (максимума) функции.
Ответ: 4.

14. На рисунке изображены график функции y=f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции f(x) в точке x_0.



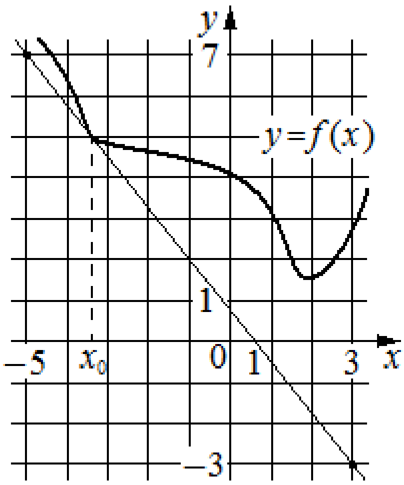
Решение: Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной в точке x_0, т.е. $f'(x_0)$ равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке (x_0; $f(x_0)$). Таким образом, задача сводится к нахождению тангенса угла наклона касательной к оси Ox. Помним, что тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету. Такой прямоугольный треугольник составители задачи нам практически построили, обозначив точки в узлах решетки. Достроив прямоугольный треугольник так, чтобы его гипотенуза была частью касательной, и разделив длину вертикального катета (7) на длину горизонтального катета (5), получим искомое значение тангенса угла наклона касательной к оси Ox, а значит, и значение $f'(x_0)=\frac{7}{5} = 1{,}4$.
Ответ:1,4.

15. На рисунке изображены график функции y=f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции f(x) в точке x_0.



Решение: $\frac{6}{5} = 1{,}2.$

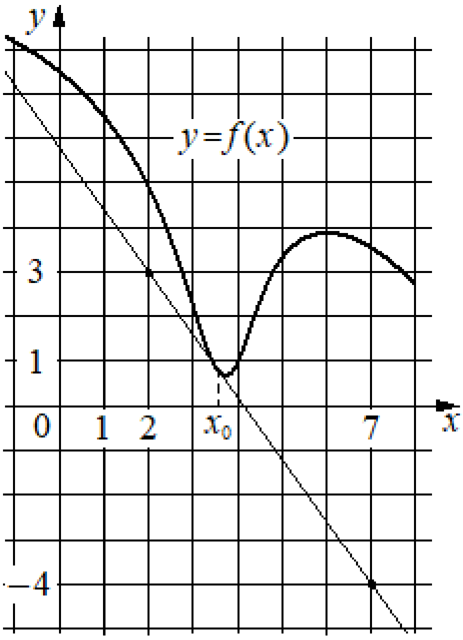
16. На рисунке изображены график функции y=f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции f(x) в точке x_0.



Решение: Обращаем внимание на тот факт, что функция в точке x_0 убывает, касательная, как и положено ей в этом случае, тоже представляет собой убывающую функцию, угол наклона касательной к оси Ох тупой, и, значит, тангенс его ОТРИЦАТЕЛЕН. Абсолютное значение производной вычисляем по-прежнему как отношение вертикального катета к горизонтальному катету. Не забываем о знаке: $-\frac{10}{8} = -1{,}25.$

Ответ: -1,25.

17. На рисунке изображены график функции y=f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции f(x) в точке x_0.



Ответ: -$\frac{7}{5} = -1{,}4$.