Ход урока

Организационный этап урока, взаимные приветствия

Показываем портрет учёного.  . Узнают Л.Эйлера. Вспоминают, в каких разделах курса теории вероятностей знакомились с этим великим российским (в общей сложности 30 лет работы в нашем городе) учёным. (Графы, диаграммы Эйлера-Венна).

Замечаем, что благодаря Даниилу и Николаю Бернулли, племянникам одного из самых известных швейцарских математиков, Якоба Бернулли, Леонард Эйлер был приглашён впервые на работу в наш город. У Якоба Бернулли отец Л. Эйлера брал уроки математики. Сегодня мы познакомимся с испытаниями, названными именем Бернулли.

Показываем портрет Якоба Бернулли. 

Актуализация знаний

Прошу дать определение элементарного события, противоположных событий.

Дают определение элементарного события как события случайного опыта, которые нельзя разделить на более простые; противоположных событий - как двух событий, которые в результате опыта одновременно произойти не могут, но одно из них обязательно произойдёт, приводят примеры.

(Познавательные УУД: умение структурировать собственные знания).

Постановка учебной задачи.

А) На столах размещены пластиковые стаканчики с игральными кубиками или монетами. Учащимся, на столах которых кубики, предлагается провести испытания до первого появления чётного числа очков, для тех, у кого монеты, - до первого появления орла. Учащиеся проводят испытания и с помощью выбранных ими символов записывают ход испытаний в тетрадях.

Несколько детей отвечают, какое количество опытов нужно было провести до достижения желаемого результата, какие обозначения были выбраны, что общего было в экспериментах тех, в чьём распоряжении были кубики и тех, кто располагал монетами. Можно ли в данном случае считать успехом выпадение чётного числа очков (или орла), а неудачей – нечётного (или решки)? Как в этом случае можно записать исход эксперимента? Как построить дерево эксперимента? Два ученика у доски строят дерево своего эксперимента, обозначая начальную точку буквой S, успех (У), неудачу (Н). Остальные ученики – в тетрадях.

(Личностные: регулятивные - прогнозирование - предвосхищение результата; регулятивные (контроль): в форме сличения способа

действия и его результата с заданным эталоном с целью обнаружения отклонений и отличий от эталона).

Б) Итак, нами проведён опыт, который может закончиться **успехом** (обозначим его вероятность p) или **неудачей** (обозначим её вероятность q). Такие испытания называются **испытаниями Бернулли**. Одно из важных требований к испытаниям Бернулли: вероятности успеха $(0 < p < 1)$ и неудачи (q) остаются **постоянными** в ходе эксперимента. Ещё важное требование – **независимость** испытаний, заключающееся в том, что результаты предыдущих испытаний никоим образом не влияют на результаты последующих.

Установите связь между p и q.

Высказать предположение: возможна ли в принципе бесконечно большая цепочка неудач при p>0. Как можно вычислить её вероятность? В случае затруднения подсказка: идти от противоположного события - бесконечная цепь неудач как событие противоположно тому, что успех может осуществиться либо при первом же испытании, либо при втором, и т.д.

Ищут вероятность события, что успех наступит либо в первом испытании, либо во втором, …, n-ом, …, пользуясь формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Называют теоремы, которыми пользовались, составляя формулу для вычисления этой вероятности. Делают вывод о вероятности наступления противоположного события (не будет успеха никогда). Получают значение q, равное 0. (Здесь самое время проявить здоровый оптимизм!)

(Познавательные: умение структурировать собственные знания; личностные: формирование позитивной самооценки, учатся принимать причины успеха (неуспеха); коммуникативные: умение вступать в диалог, участвовать в коллективном обсуждении ответа; регулятивные: умение

самостоятельно адекватно анализировать правильность выполнения действий и вносить необходимые коррективы).

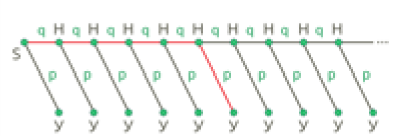
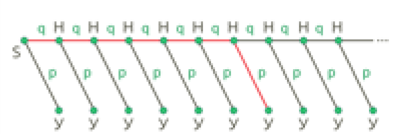
Открытие учащимися нового знания

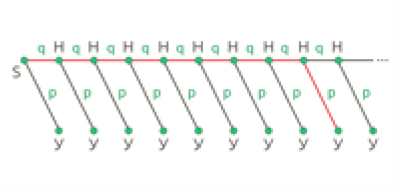
Обсуждение: привести примеры из жизни, что можно считать успехом, и что – неудачей. Можно ли их поменять местами в зависимости от условий? Если вероятность успеха $p = \frac{5}{7}$, то какова вероятность неудачи? Если считать успехом при бросании игрального кубика выпадение числа очков, не меньшее пяти, то что считать неудачей и каковы вероятности успеха и неудачи в этом случае? Если заявленный хладокомбинатом объём брикета мороженого 60 ± 3 (мл), то будет ли неудачей объём взятого на экспертизу брикета объёмом а) 55, б) 57, в) 60, г) 65мл?

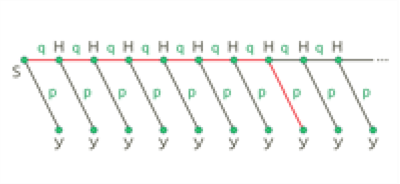
Как должна выглядеть формула для нахождения вероятности **элементарного (подчеркнуть!)** события, при котором успеху предшествовало **ровно k** неудач, т.е. события $\underbrace{ННН\ldots Н}_{k \text{ неудач}}У$? Должны получить формулу $P(ННН\ldots НУ) = q^k \cdot p$ и ответить на вопрос: «Какая теорема теории вероятностей была использована для вывода этой формулы?» - (умножения вероятностей для независимых событий).

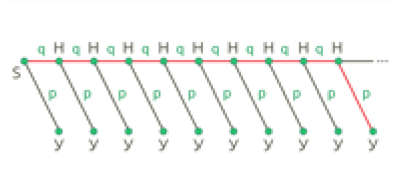
Ученикам раздаются карточки с заданиями по определению нужного дерева эксперимента. Вариант 1. Укажи соответствующее дерево испытаний вероятности элементарного события $P(ННННННННУ) = q^8 \cdot p$

Ответ:

- 1) 
- 2) 

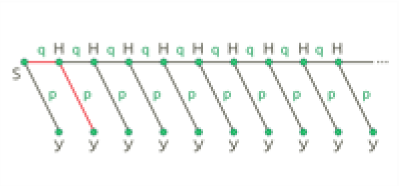
- 3) 

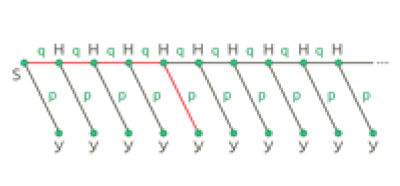
- 4) 

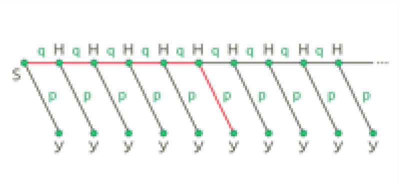
- 5) 

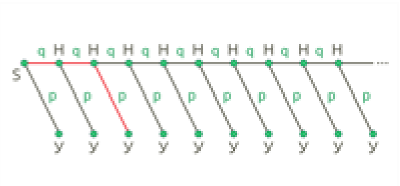
Вариант 2. Укажи соответствующее дерево испытаний вероятности элементарного события $P(НННHУ) = q^4 \cdot p$

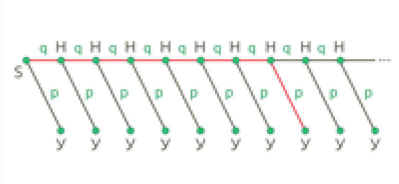
Ответ:

- 1) 

- 2) 

- 3) 

- 4) 

- 5) 

Соответствующие своему варианту формулы и деревья фиксируют в тетрадях. Результаты обсуждают с соседями по парте. Осуществляют взаимопроверку.

(*Коммуникативные УУД: умение вступать в диалог, участвовать в коллективном обсуждении ответа; регулятивные: умение самостоятельно адекватно анализировать правильность выполнения действий и вносить коррективы).*

Первичное осмысление и закрепление изучаемого материала

Предлагается решить задачу по предложенной схеме.

Задача. Вычислите вероятность того, что будет сделано ровно два броска в серии испытания по бросанию игральной кости до тех пор, пока не выпадет четвёрка.

Решение задачи по схеме:

1) вероятность успеха: $p = -$;
2) вероятность неудачи (неуспеха): $q = -$;
3) вероятность элементарного события, заключающегося в том, что перед успехом случилась ровно одна неудача: $-$.

   Ответ:

Самостоятельно решают задачу в тетрадях, затем самопроверка по эталону: 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{5}{6}$; 3) $\frac{5}{36}$.

(Регулятивные УУД: умение самостоятельно адекватно анализировать правильность выполнения действий и вносить коррективы; познавательные: выявление закономерностей).

Решение задачи 218(а) учебника.

Ученик у доски решает задачу, остальные - в тетради. Разрешено использование калькуляторов. Фиксируют решения задач в тетрадях.

(Регулятивные УУД: умение самостоятельно адекватно анализировать правильность выполнения действий и вносить коррективы).

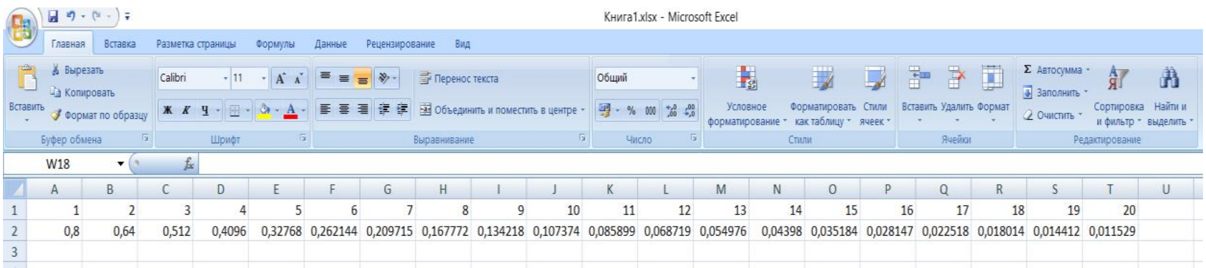
Решение задачи 217(б) учебника.

Ученик у доски решает задачу, остальные - в тетради. Разрешено использование калькуляторов. Фиксируют решения задач в тетрадях.

(*Познавательные УУД: выбор варианта решения задачи (использование теоремы сложения вероятностей несовместных событий, либо вычислять через вероятность события, противоположного искомому*).

Демонстрация возможности решения задачи 221 средствами Excel

Демонстрируем возможность решения задачи 221 средствами Excel. Согласно условию, p=0,8, значит, q=0,2. По условию требуемая вероятность передачи информации должна удовлетворять неравенству $P \geq 0{,}95$. Поскольку n неудачных попыток предшествовало удачной, то их количество (n) определяется неравенством $q^n \leq 0{,}05$. Разумеется, можно и «вручную» (с помощью калькулятора) найти решение неравенства $(0{,}8)^n \leq 0{,}05(*)$.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
2	0,8	0,64	0,512	0,4096	0,32768	0,262144	0,209715	0,167772	0,134218	0,107374	0,085899	0,068719	0,054976	0,04398	0,035184	0,028147	0,022518	0,018014	0,014412	0,011529	
3																					

Как видно, с точностью до сотых решению неравенства (*) удовлетворяет значение n=13. Таким образом, вероятность передачи информации не ниже 0,95, если количество выстрелов равно 14 (после 13 неудачных следует удачный выстрел). Ответ: 14.

Предлагаем ответить на вопросы: «Что представляют собой испытания Бернулли? Что является элементарным событием в испытаниях до первого успеха? Будет ли последовательность НУННУ элементарным событием? Если до достижения успеха прошло m неудач, то как нужно вычислить вероятность такого события? А что более вероятно, как вы считаете, сразу выбросить решку или выбросить её уже при втором броске?

(Коммуникативные УУД: умение вступать в диалог, участвовать в коллективном обсуждении ответа).

Предлагаем решить задачу, разбив учащихся на группы по 4 человека в каждой.

Задача: Монету бросают до тех пор, пока не выпадет орёл. Постройте дерево эксперимента. Укажите в дереве событие A и найдите его вероятность, если событие A состоит в том, что:

а) потребуется ровно два броска;

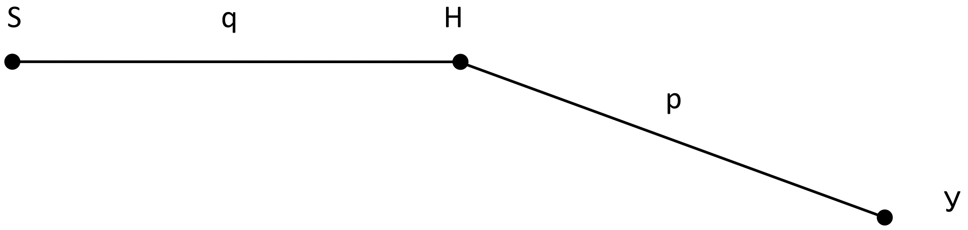
б) три раза выпадет решка, на четвёртый раз — орёл;

в) потребуется четыре или пять бросков, чтобы орёл появился;

г) первые четыре броска окончатся решкой.

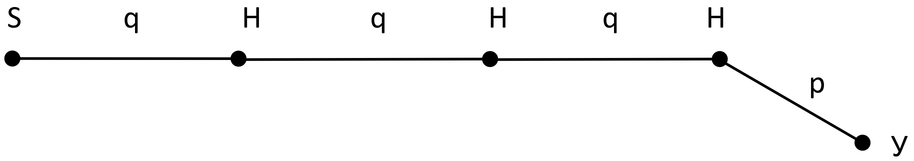
Решают задачу. Предлагают ответ от группы. Сравнивают с эталоном (выводится на доску):

а)



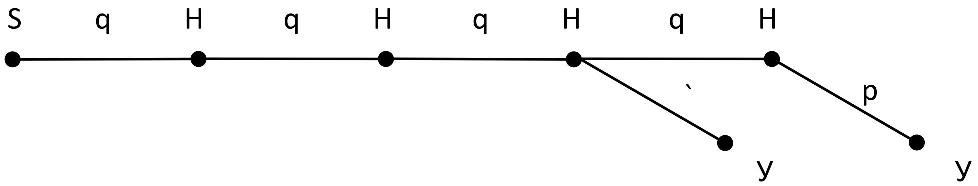
$$P(A) = q \cdot p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot$$

б)



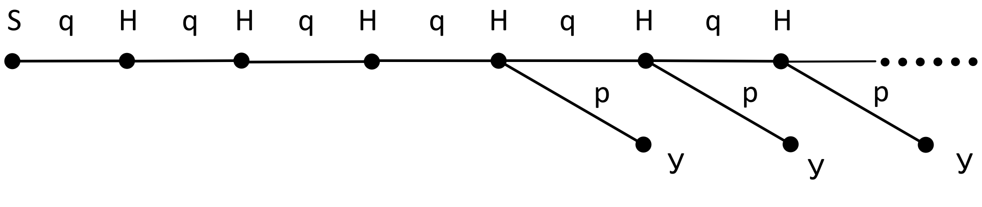
$$P(A) = q^3 \cdot p = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} \cdot$$

в)



$$P(A) = q^3 \cdot p + q^4 \cdot p = q^3 \cdot p \cdot (1 + q) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{32} \cdot$$

г)



$$P(A) = q^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \cdot$$

Анализируют ошибки (если есть).

(Личностные УУД: (формирование позитивной самооценки, учатся понимать причины успеха (неуспеха); коммуникативные: умение вступать в диалог, участвовать в коллективном обсуждении ответа).

Подведение итогов урока, рефлексия.

Заметим, что серии испытаний до первого успеха – вероятностная модель, используется при проектировании мобильной связи, при создании алгоритмов автоматической стрельбы, в расчётах надёжности бытовых приборов и во многих других видах деятельности.

Выставление отметок, ответы на заданные вопросы.

Домашнее задание: 211(в), 213(а, б), 215(б), 217(а), 218(б), 220.

Библиография

1. Лукичёва Е.Ю. Особенности обучения математике в контексте содержания ФГОС: учебно-методическое пособие. СПб.: СПб АППО, 2019.
2. ЯКласс.https://www.yaklass.ru/p/veroyatnost-i-statistika/9-klass/ispytaniia-bernulli-7365901/ispytanie-uspekh-i-neudacha-seriia-ispytanii-do-pervogo-uspekha-7332392
3. Высоцкий И.Р. Математика. Вероятность и статистика: 7-9-е классы: базовый уровень: учебник: в 2 частях/ И.Р. Высоцкий, И.В. Ященко. – Москва: Просвещение, 2023.
4. Универсальный многоуровневый сборник задач: 7-9-е классы/ И.Р. Высоцкий, И.В. Ященко. – Москва: Просвещение, 2024.
5. Вероятность в школе. https://ptlab.mccme.ru/system/files/private/9_12.pdf
6. Единое содержание общего образования. Конструктор рабочих программ. https://lesson.edu.ru/lesson/296348fa-09b3-43ef-8feb-3df682e383da.