Ход урока	
	«Математику нельзя изучать, наблюдая, как это делает сосед» *математик Айвен Нивен.*
Организационная часть:	Визуально определить готовность к уроку, сформулировать тему, цель.
Основные вопросы темы и последовательность их изложения:	1. Повторение. 2. Решение теста 3. Постановка проблемы 4. Историческая справка 5. Изложение нового материала 6. Закрепление формул. 7. Составление алгоритма решения задачи по формулам Крамера 8. Решение поставленной задачи 9. Самостоятельная работа студентов по индивидуальным карточкам 10. Рефлексия
Выводы урока:	Сегодня на уроке вы научились решать системы уравнений с помощью формул Крамера.
Источники	1. Макаров, С. И., Высшая математика: математический анализ и линейная алгебра : учебное пособие / С. И. Макаров. — Москва :КноРус, 2023. — 320 с. — ISBN 978-5-406-11035-5. — URL: https://book.ru/book/947276 (дата обращения: 03.10.2023). — Текст : электронный. 2. Гулиян, Б. Ш., Элементы высшей математики : учебное пособие / Б. Ш. Гулиян, Г. Б. Гулиян. — Москва :КноРус, 2023. — 436 с. — ISBN 978-5-406-11415-5. — URL: https://book.ru/book/949350 (дата обращения: 03.10.2023). — Текст : электронный. 3. Богомолов, Н.В. Математика: учебник для среднего профессионального образования / Н.В.Богомолов, П.И.Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 401 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-07878-7. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/469433, 2020

Тема урока: Решение систем линейных уравнений по правилу Крамера.

1.Опрос.

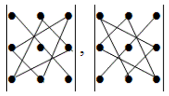
Что такое матрица?

Виды матриц.

Как обозначается размер матрицы?

Что представляет собой определитель матрицы?

Как найти определитель матрицы 3х3? (правило треугольника,



«+» «–»

Разложение определителя по строке или столбцу

Этот метод позволяет вычисление определителя свести к вычислению определителя более низкого порядка.

Для вычисления определителей четвертого порядка и выше применяется либо разложение по строке/столбцу, либо приведение к треугольному виду

2. Тест (ПРИЛОЖЕНИЕ 2)

3. Постановка проблемы

В нашем районе открылась фирма, системный администратор закупает оборудование трех типов: сервер – 95 ед., ноутбук – 100 ед., смартфон –185 ед. Для перевозки оборудования фирма может заказать три вида транспорта: Фургон, легковой автомобиль и газель. Количество оборудования каждого типа, вмещаемого на определенный вид транспорта, приведено в таблице:

Тип оборудования	Вид транспорта		
	Фургон	Легковой автомобиль	Газель
сервер ноутбук смартфон	3 4 3	2 1 5	1 2 4

Какое количество каждого вида транспорта необходимо при заданных условиях?

Запишем в математической форме условия полной перевозки оборудования

Введем обозначения:
x – это общее количество фургонов
y – общее количество легковых автомобилей
z – общее количество газелей
Запишем условия перевозки оборудования:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 95 \\ 4x + y + 2z = 100 \\ 3x + 5y + 4z = 185 \end{cases}$$

Как решить данную систему?

4. **Знакомство с биографией Крамера** *(выступление студента).*


Габриэль Крамер

Крамер является одним из создателей линейной алгебры. Одной из самых известных его работ является «Введение в анализ алгебраических кривых», опубликованный на французском языке в 1750 году. В ней Крамер строит систему линейных уравнений и решает её с помощью алгоритма, названного позже его именем – метод Крамера.

Габриэль Крамер родился 31 июля 1704 года в Женеве (Швейцария) в семье врача.

Уже в детстве он опережал своих сверстников в интеллектуальном развитии и демонстрировал завидные способности в области математики.

В 18 лет он успешно защитил диссертацию. Через 2 года Крамер выставил свою кандидатуру на должность преподавателя в Женевском университете. Учёный много путешествовал по Европе, перенимая опыт у знаменитых математиков своего времени – Иоганна Бернулли и Эйлера в Базеле, Галлея и де Муавра в Лондоне и других. Со многими из них он продолжал переписываться всю жизнь.

В 1729 году Крамер возобновляет преподавательскую работу в Женевском университете. В это время он участвует в конкурсе Парижской Академии и занимает второе место. Талантливый учёный написал множество статей на самые разные темы: геометрия, история, математика, философия. В 1730 году он опубликовал труд по небесной механике.

В 1740-е гг. Иоганн Бернулли поручает Крамеру подготовить к печати сборник своих работ. В 1742 году Крамер публикует сборник в 4-х томах. В 1744 году он выпускает посмертный сборник работ Якоба Бернулли (брата Иоганна Бернулли), а также двухтомник переписки Лейбница с Иоганном Бернулли. Эти работы вызвали большой интерес со стороны учёных всего мира.

Габриэль Крамер скончался 4 января 1752 года во Франции.

5. Новые знания. Формулы Крамера.

Метод Крамера

Метод Крамера основан на использовании определителей в решении систем линейных уравнений. Это значительно ускоряет процесс решения. Этот метод может быть использован в решении системы, в которой количество уравнений равно количеству неизвестных. А также , если определитель системы не равен нулю. В этом случае система будет иметь единственное решение.

Определение. Определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется определителем системы и обозначается Δ (дельта).

Определители по неизвестным $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}$

получаются путём замены коэффициентов при соответствующих неизвестных свободными членами:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - a_{12} b_2;$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - b_1 a_{21}.$$

Формулы Крамера для нахождения неизвестных:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}.$$

Найти значения x_1 и x_2 возможно только при условии, если

$\Delta \neq 0$.

Этот вывод следует из следующей теоремы.

Теорема Крамера . *Если определитель системы отличен от нуля, то система линейных уравнений имеет одно единственное решение, причём неизвестное равно отношению определителей. В знаменателе – определитель системы, а в числителе – определитель, полученный из определителя системы путём замены коэффициентов при этом неизвестном свободными членами. Эта теорема имеет место для системы линейных уравнений любого порядка.*

6. Закрепление материала

Решим систему для двух уравнений и двух неизвестных методом Крамера

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 2x - 3y = -4. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - 2 \cdot 2 = -3 - 4 = -7,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-3) - (-4) \cdot 2 = -15 + 8 = -7,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) - 2 \cdot 5 = -4 - 10 = -14.$$

Тогда $x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1; \quad y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-14}{-7} = 2.$

Ответ: **(1;2).**

из *теоремы Крамера*, при решении системы линейных уравнений могут встретиться три случая:

Первый случай: система линейных уравнений имеет единственное решение

Условия: $\Delta \neq 0,$

Второй случай: система линейных уравнений имеет бесчисленное множество решений

Условия: $\Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \ldots = \Delta_{x_n} = 0$,

т.е. коэффициенты при неизвестных и свободные члены пропорциональны.

Третий случай: система линейных уравнений решений не имеет

Условия: $\Delta = 0,$

$\Delta_{x_1} \neq 0,\ \Delta_{x_2} \neq 0, \ldots ,\Delta_{x_n} \neq 0$.

Итак, система *m* линейных уравнений с *n* переменными называется *несовместной*, если у неё нет ни одного решения, и *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. Совместная система уравнений, имеющая только одно решение, называется *определённой*, а более одного – *неопределённой*.

7. Составление алгоритма решения задачи по формулам Крамера

Студенты предлагают последовательность действий по решению системы линейных уравнений по правилу Крамера.

Алгоритм:

- ✓ Составьте систему линейных уравнений по условию задачи.
- ✓ Найдите главный определитель системы.
- ✓ Найдите вспомогательные определители системы.

- ✓ Найдите неизвестные, пользуясь формулами Крамера.
- ✓ Запишите ответ.

8. Решение поставленной задачи

Вернемся к нашей задаче

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 95 \\ 4x + y + 2z = 100 \\ 3x + 5y + 4z = 185 \end{cases}$$

Решение:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -21$$

Показать детальнее ход вычисления определителя матрицы

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 95 & 2 & 1 \\ 100 & 1 & 2 \\ 185 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -315$$

Показать детальнее ход вычисления определителя матрицы

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 95 & 1 \\ 4 & 100 & 2 \\ 3 & 185 & 4 \end{vmatrix} = -420$$

Показать детальнее ход вычисления определителя матрицы

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 95 \\ 4 & 1 & 100 \\ 3 & 5 & 185 \end{vmatrix} = -210$$

Показать детальнее ход вычисления определителя матрицы

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-315}{-21} = 15$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-420}{-21} = 20$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-210}{-21} = 10$$

9.Самостоятельная работа студентов по индивидуальным карточкам, (Приложение 1) предложенным преподавателем (Решение практических задач по группам)

Приложение 1.

Задания для практической работы

Задание для группы №1

- Частным лицом куплены три пакета акций общей стоимостью 485 ден. ед., причем акции первой группы куплены по 5 ден. ед. за акцию, второй – по 20, третьей – по 13.
- Через месяц стоимость акций первой, второй и третьей групп составила соответственно 6, 14 и 19 ден. ед., а стоимость всего пакета была 550 ден. ед.

- Еще через месяц они стоили по 8, 22 и 20 ден. ед. соответственно, а весь пакет стоил 660 ден. ед.

Задание для группы №2

- Завод в течении трех дней производил детали для автомобиля : автомобильные вентиляторы ,топливные насосы, тормозные диски. Известны объемы выпуска продукции за три дня и денежные затраты на производство за эти три дня. Найти себестоимость единицы продукции каждого вида.

День	Объем выпуска продукции(единиц)			Затраты (тыс.усл.ед)
	Костюмы	Плащи	Куртки	
автомобильные вентиляторы	50	10	30	176
топливные насосы	35	25	20	168
тормозные диски	40	20	30	184

Задание для группы №3

Из некоторого листового материала необходимо выкроить 360 заготовок типа А, 300 заготовок типа Б и 675 заготовок типа В. При этом можно применять три способа раскроя. Количество заготовок, получаемых из каждого листа при каждом способе раскроя, указано в таблице:

Тип заготовки	**Способ раскроя**		
	1	**2**	**3**
А	3	2	1
Б	1	6	2
В	4	1	5

Приложение 2

Тест по теме: «<u>Матрицы. Определители. Системы линейных алгебраических уравнений</u>».
По дисциплине ***«Элементы высшей математики»***
***Группа*____________**
***Фамилия Имя*_______________________**

1. **Выберите верные утверждения:**
   1) Определитель – это число   2) Определитель – это таблица
   2) Матрица – это таблица   3) Матрица – это число

2**. Выберите единичную матрицу из числа предложенных:**

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Укажите матрицу A^t, если матрица A=$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

4. Как изменится определитель при транспонировании матрицы?

1) определитель не изменится;

2) знак определителя поменяется на противоположный;

3) значение определителя удвоится;

4) определитель примет значение, обратное исходному.

5. Вычислите определитель 2-го порядка $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

Решение:

6. Вычислите определитель 3-го порядка $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Решение:

7. Выберите невырожденную матрицу из числа предложенных

1) $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Найдите минор M_{12} соответствующего элемента определителя $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$

1) -2;

2) 13;

3) -5;

4) 5.

9. Найдите алгебраическое дополнение A_{23} соответствующего элемента матрицы $\begin{pmatrix} \mathbf{-4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{7} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

Выписать и решить

10. Найдите значение x, решив уравнение $\begin{vmatrix} x & 2 & x \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$