Основным способом решения задач является использование формулы полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \ldots + P(H_n)P(A|H_n)$$

A – событие, вероятность которого необходимо найти H1, H2, …, H_n – случайные события, которые предшествуют событию A, их называют гипотезами.

В качестве альтернативного способа решения задач с полной вероятностью можно использовать построение дерева вероятностей**.** Все элементарные события в дереве обозначаются точками – вершинами дерева. Если после одного события возникает другое, то вершины соединятся линиями – рёбрами, возле которых пишут вероятность соответствующего события. Предположим, что для составного эксперимента удалось построить дерево вероятностей и понять, каковы условные вероятности переходов между состояниями. Тогда вероятности сложных событий можно найти умножением условных вероятностей вдоль соответствующих цепочек рёбер.

Еще один способ решения заключается в составлении словесной формулы. Формула полной вероятности является формулой, объединяющей теоремы сложения и умножения вероятностей, которые, в свою очередь, соответствуют логическим связкам ИЛИ и И. Если преобразовать события в задаче в предложение, связанное этими союзами, то можно получить формулу для вычисления полной вероятности.

Рассмотрим некоторые задачи, выделяя предложенные подходы.

Задача 1

Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,8, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,2. На столе лежит 10 револьверов, из них только 2 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

Решение

Способ 1

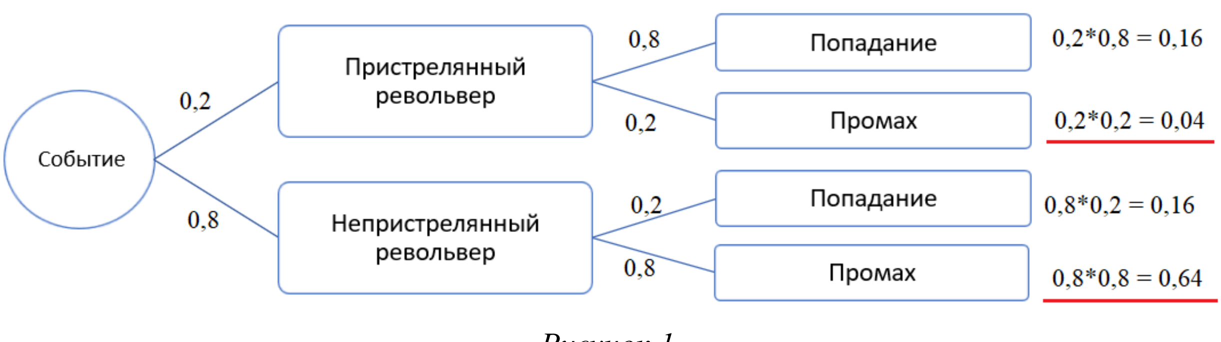


Рисунок 1

Вероятность промаха: 0,04 + 0,64 = 0,68.

Способ 2

Составим словесную формулу и заменим события на их вероятности, а союзы – на соответствующие им знаки действий:

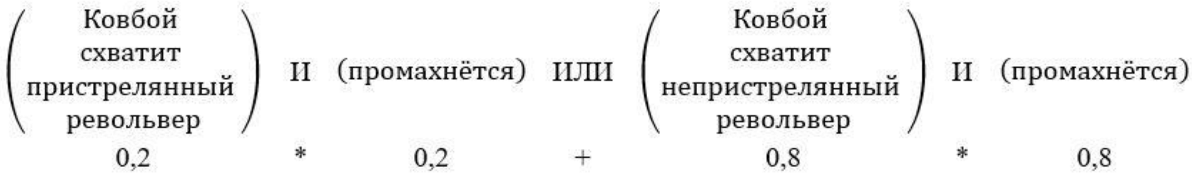


Рисунок 2

$$p = 0{,}2*0{,}2 + 0{,}8*0{,}8 = 0{,}68.$$

Способ 3

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)$$

А – ковбой промахнётся;

H_1 – ковбой схватил пристрелянный револьвер;

H_2 – ковбой схватил непристрелянный револьвер;

$P(H_1) = 2/10 = 0{,}2$ – вероятность схватить пристрелянный револьвер;

$P(H_2) = 1 – 0{,}2 = 0{,}8$ – вероятность схватить непристрелянный револьвер

$P(A|H_1) = 1 – 0{,}8 = 0{,}2$ – вероятность промаха из пристрелянного револьвера

$P(A|H_2) = 1 – 0{,}2 = 0{,}8$ – вероятность промаха из непристрелянного револьвера

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = 0{,}2*0{,}2 + 0{,}8*0{,}8 = 0{,}68$$

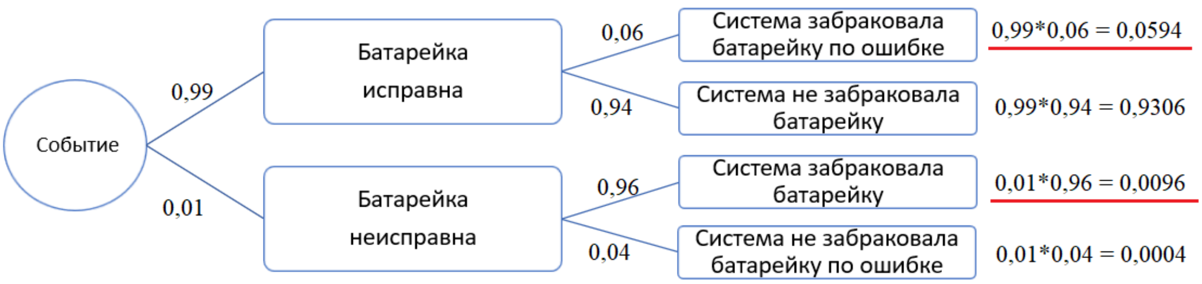
Ответ: 0,68.

Задача 2

Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,01. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,96. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,06. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Решение

Способ 1



Вероятность того, что батарейка будет забракована: 0,0594 + 0,0096 = 0,069.

Способ 2

Составим словесную формулу и заменим события на их вероятности, а союзы – на соответствующие им знаки действий:

$$\begin{pmatrix}\text{Батарейка}\\ \text{бракованная}\end{pmatrix} \quad \text{И} \quad \begin{pmatrix}\text{система}\\ \text{контроля}\\ \text{сработала}\\ \text{верно}\end{pmatrix} \quad \text{ИЛИ} \quad \begin{pmatrix}\text{Батарейка}\\ \text{исправная}\end{pmatrix} \quad \text{И} \quad \begin{pmatrix}\text{система}\\ \text{контроля}\\ \text{допустила}\\ \text{ошибку}\end{pmatrix}$$

$$0{,}01 \quad * \quad 0{,}96 \quad + \quad 0{,}99 \quad * \quad 0{,}06$$

$$p = 0{,}01*0{,}96 + 0{,}99*0{,}06 = 0{,}069$$

Способ 3

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)$$

A – система контроля забраковала батарейку;
H_1 – батарейка бракованная;
H_2 – батарейка исправная;
$P(H_1) = 0{,}01$ – вероятность того, что батарейка бракованная;
$P(H_2) = 1 – 0{,}01 = 0{,}99$ – вероятность того, что батарейка исправная;
$P(A|H_1) = 0{,}96$ – вероятность того, что система забракует неисправную батарейку;
$P(A|H_2) = 0{,}06$ – вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку;

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = 0{,}01*0{,}96 + 0{,}99*0{,}06 = 0{,}069$$

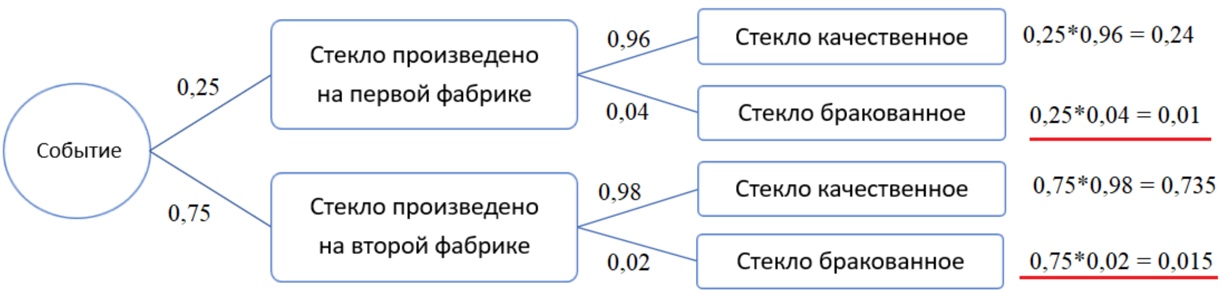
Ответ: 0,069.

Задача 3

Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 25% этих стекол, вторая – 75%. Первая фабрика выпускает 4% бракованных стекол, а вторая – 2%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Решение

Способ 1



Вероятность того, что стекло окажется бракованным: 0,01 + 0,015 = 0,025.

Способ 2

Составим словесную формулу и заменим события на их вероятности, а союзы – на соответствующие им знаки действий:

$$\begin{pmatrix}\text{Стекло}\\ \text{произведено}\\ \text{на первой}\\ \text{фабрике}\end{pmatrix} \quad \text{И} \quad \begin{pmatrix}\text{Стекло}\\ \text{бракованное}\end{pmatrix} \quad \text{ИЛИ} \quad \begin{pmatrix}\text{Стекло}\\ \text{произведено}\\ \text{на первой}\\ \text{фабрике}\end{pmatrix} \quad \text{И} \quad \begin{pmatrix}\text{Стекло}\\ \text{бракованное}\end{pmatrix}$$

$$0{,}25 \quad * \quad 0{,}04 \quad + \quad 0{,}75 \quad * \quad 0{,}02$$

$$p = 0{,}25*0{,}04 + 0{,}75*0{,}02 = 0{,}025$$

Способ 3

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)$$

A – стекло окажется бракованным;
H_1 – стекло произведено на первой фабрике;
H_2 – стекло произведено на второй фабрике;
$P(H_1) = 0{,}25$;
$P(H_2) = 0{,}75$;
$P(A|H_1) = 0{,}04$ – вероятность купить бракованное стекло при условии того, что оно произведено на первой фабрике;
$P(A|H_2) = 0{,}02$ – вероятность купить бракованное стекло при условии того, что оно произведено на второй фабрике;

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = 0{,}25*0{,}04 + 0{,}75*0{,}02 = 0{,}025$$

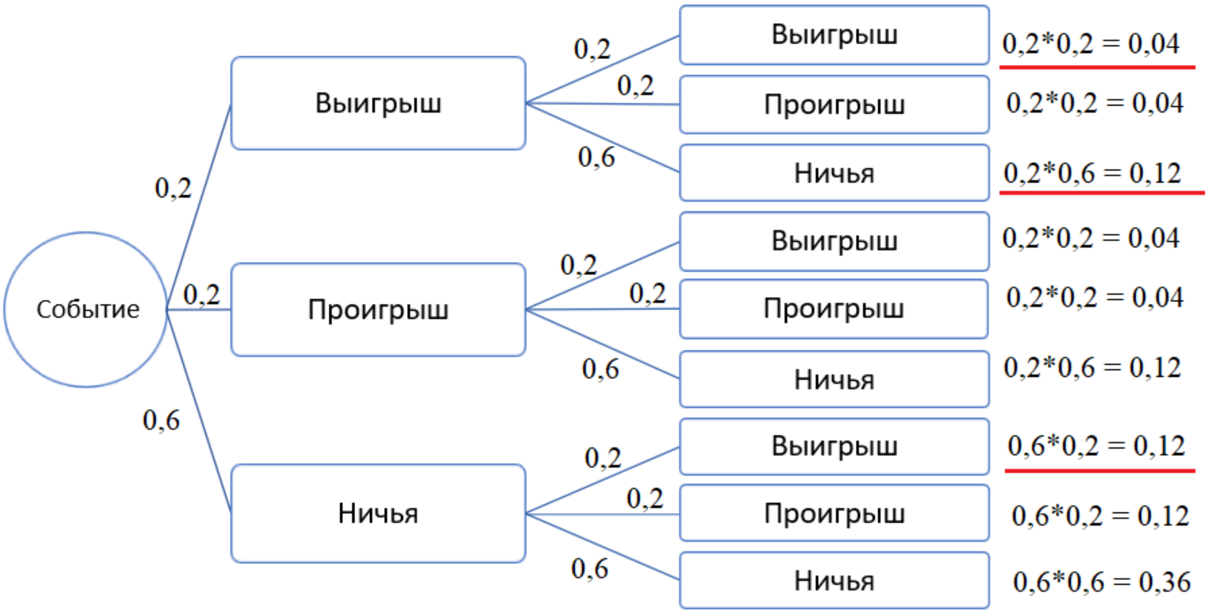
Ответ: 0,025.

Задача 4

Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 8 очков в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 5 очков, в случае ничьей — 3 очка, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,2.

Решение

Способ 1



Чтобы набрать хотя бы 8 очков (т.е. 8 или больше) необходимо хотя бы раз выиграть, а другую игру сыграть вничью или выиграть:

$$0{,}04 + 0{,}12 + 0{,}12 = 0{,}28.$$

Способ 2

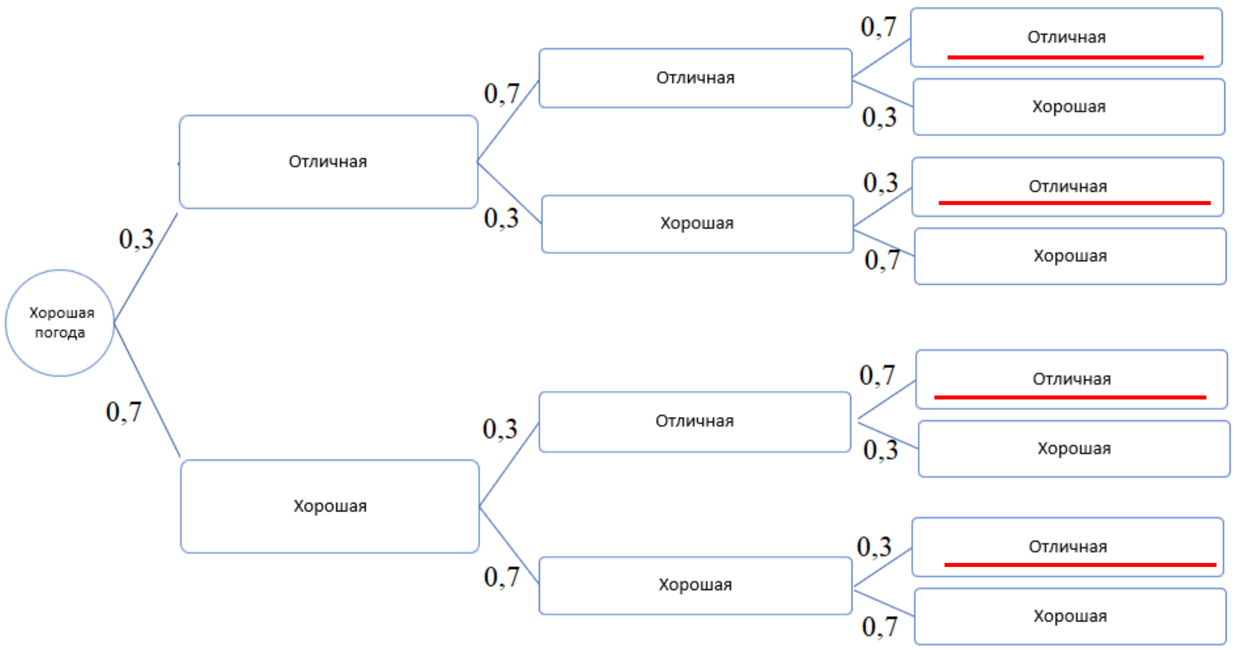
Команду может победить (В – выигрыш), сыграть вничью (Н – ничья) или проиграть. Вероятность сыграть вничью найдём, используя полную группу событий: 1 – 0,2 – 0,2 = 0,4.
Составим словесную формулу и заменим события на их вероятности, а союзы – на соответствующие им знаки действий:

(В)	И	(В)	ИЛИ	(В)	И	(Н)	ИЛИ	(Н)	И	(В)
0,2	*	0,2	+	0,2	*	0,4	+	0,4	*	0,2

$$p = 0{,}2*0{,}2 + 0{,}2*0{,}4 + 0{,}4*0{,}2 = 0{,}28$$

Ответ: 0,28.

Задача 5
В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,7 погода завтра будет такой же, как и сегодня. 6 сентября погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 9 сентября в Волшебной стране будет отличная погода.
Решение
Способ 1
6 сентября *7 сентября* *8 сентября* *9 сентября*



Вероятность того, что погода 9 сентября будет отличная:

$$0{,}3*0{,}7*0{,}7 + 0{,}3*0{,}3*0{,}3 + 0{,}7*0{,}3*0{,}7 + 0{,}7*0{,}7*0{,}3 = 0{,}468$$

Способ 2
Всего возможны четыре случая смены погоды (Х – хорошая, О – отличная):

	6 сент.	7 сент.	8 сент.	9 сент.
1	X	X	X	O
2	X	X	O	O
3	X	O	X	O
4	X	O	O	O

p = 0,7 – вероятность того, что погода сохранится,
q = 1– 0,7 = 0,3 – вероятность того, что погода изменится.
Каждый раз между датами три перехода, т.е. три перемены погоды. Словесной формулой можно выразить так:

(сохранится и сохранится и изменится)
или
(сохранится и изменится и сохранится)
или
(изменится и изменится и изменится)
или
(изменится и сохранится и сохранится)

$$0{,}7*0{,}7*0{,}3 + 0{,}7*0{,}3*0{,}7 + 0{,}3*0{,}3*0{,}3 + 0{,}3*0{,}7*0{,}7 = 0{,}468$$

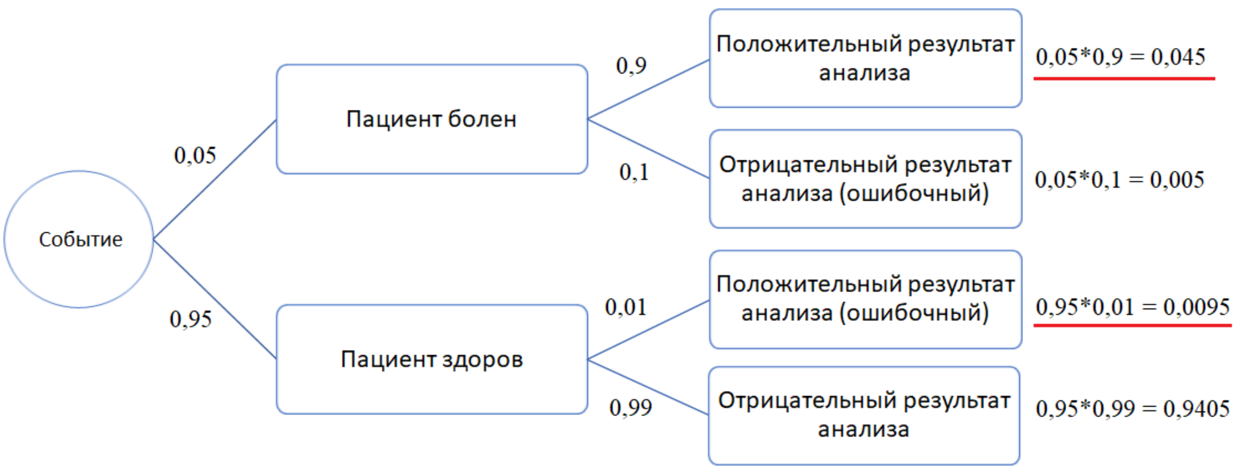
Ответ: 0,468.

Задача 6

Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется *положительным*. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 5% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.

Решение

Способ 1



Вероятность того, что анализ ложно положительный: 0,045 + 0,0095 = 0,0545.

Способ 2

$$\begin{array}{ccccccc}
\begin{pmatrix}\text{Пациент}\\ \text{здоров}\end{pmatrix} & \text{И} & \begin{pmatrix}\text{Результат}\\ \text{ложно}\\ \text{положительный}\end{pmatrix} & \text{ИЛИ} & \begin{pmatrix}\text{Пацент}\\ \text{болен}\end{pmatrix} & \text{И} & \begin{pmatrix}\text{Результат}\\ \text{анализа}\\ \text{положительный}\end{pmatrix} \\
0{,}95 & * & 0{,}01 & + & 0{,}05 & * & 0{,}9
\end{array}$$

$$p = 0{,}95*0{,}01 + 0{,}05*0{,}9 = 0{,}0545$$

Способ 3

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)$$

A – анализ положительный

H_1 – пациент здоров

H_2 – пациент болен

$P(H_1) = 0{,}95$

$P(H_2) = 0{,}05$

$P(A|H_1) = 0{,}01$ – вероятность положительного анализа у здорового пациента

$P(A|H_2) = 0{,}9$ – вероятность положительного анализа у больного пациента

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = 0{,}95*0{,}01 + 0{,}05*0{,}9 = 0{,}0545$$

Ответ: 0,0545

Теория вероятностей изучает события, т.е. конкретные ситуации, которые происходят в нашей повседневной жизни. Логика решения задач по теории вероятностей формируется с детства, начиная с первых слов.

Рассмотренные способы позволят решать задачи ученикам как с техническим, так и гуманитарным складом ума.

Задачи для самостоятельного решения представлены в Приложении.