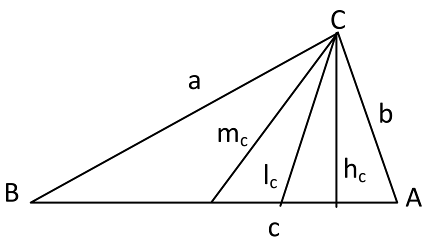
Справочные таблицы. Треугольник и его элементы

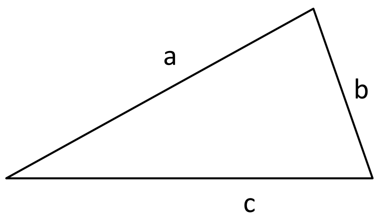
Принятые обозначения:

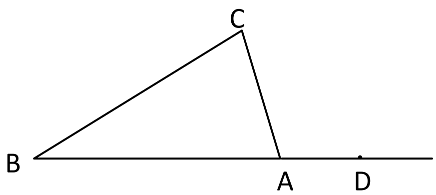
- a, b, c– стороны;
- α, β, γ – противолежащие углы;
- p – полупериметр;
- r – радиус вписанной окружности;
- R – радиус описанной окружности;
- h_a, m_a, l_a – соответственно высота, медиана, биссектриса, проведенная к стороне a;
- S – площадь.

Таблица 1 - Произвольный треугольник

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Определение треугольника и его элементов (угол, сторона, высота, медиана, биссектриса треугольника). Виды треугольников</td>
</tr>
</table>

Продолжение таблицы 1

<table>
<tr>
<td>

a<b+c b<a+c c<a+b</td>
<td>Неравенство треугольника:
каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.</td>
</tr>
<tr>
<td>$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$</td>
<td>Сумма углов треугольника равна 180°</td>
</tr>
<tr>
<td>

$\angle CAD = \angle ABC + \angle BCA$</td>
<td>Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним</td>
</tr>
</table>

Таблица 2 - Равные треугольники

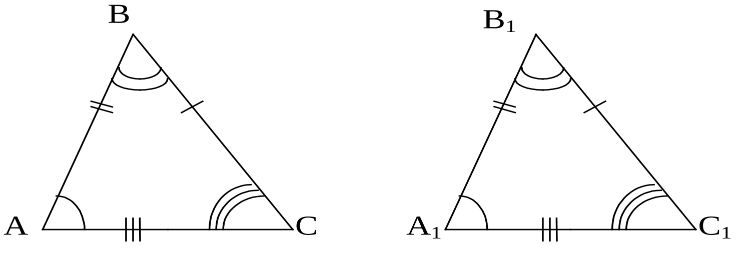
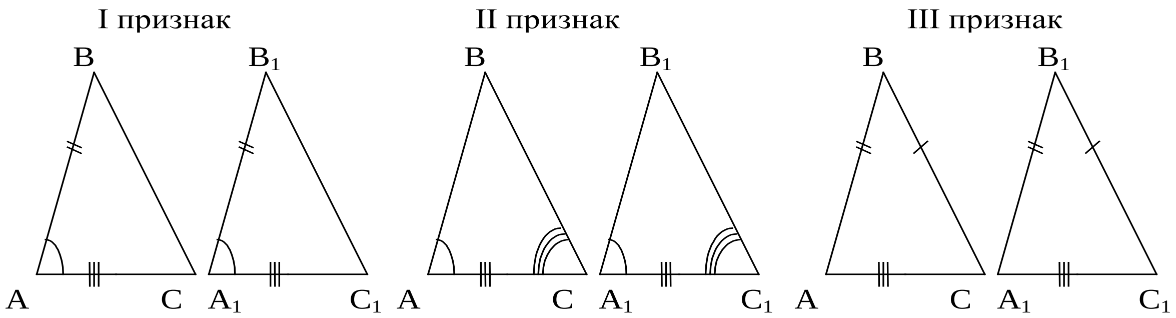
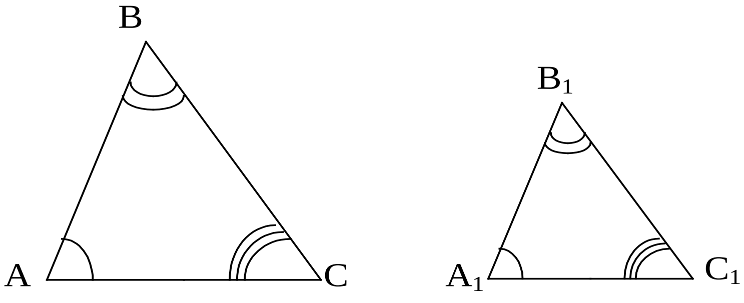
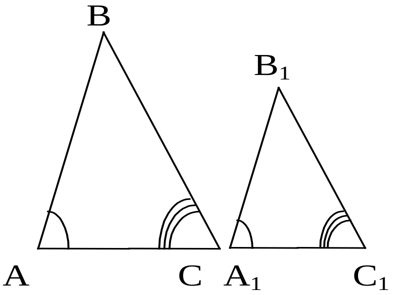
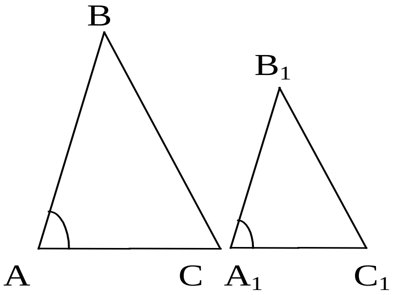
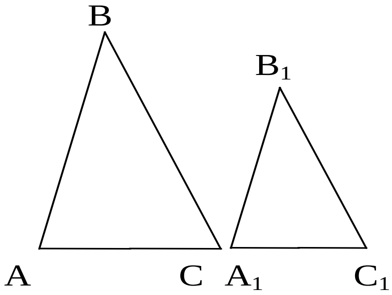
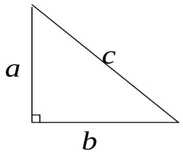
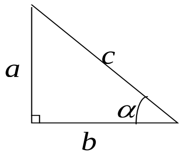
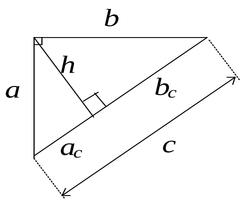
Равные треугольники

Признаки равенства треугольников


Таблица 3 – подобные треугольники

Подобные треугольники: $\Delta ABC \infty \Delta A_1B_1C_1$ $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ 
Признаки подобия треугольников: I признак  $\angle A = \angle A_1$ $\angle C = \angle C_1$ II признак  $\angle A = \angle A_1$ $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ III признак  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$

Для того чтобы актуализировать знания планиметрии, перед изучением темы пирамида, учащимся необходимо повторить знания полученные при изучении темы теорема Пифагора; определения синуса, косинуса и тангенса острого угла и следствия из них.

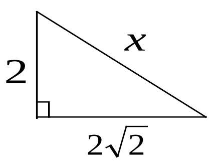
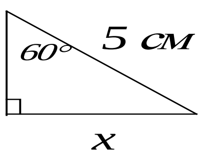
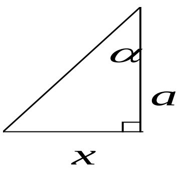
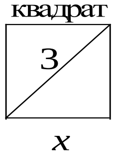
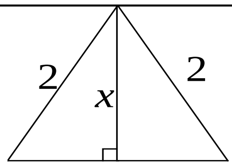
Таблица 4 - Справочная таблица

1. Теорема Пифагора  $c^2 = a^2 + b^2, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2};$ $a^2 = c^2 - b^2, \quad a = \sqrt{c^2 - b^2};$ $b^2 = c^2 - a^2, \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}.$	2. Определения синуса, косинуса и тангенса острого угла и следствия из них.  $\sin\alpha = \frac{a}{c}; \quad a = c \cdot \sin\alpha; \quad c = \frac{a}{\sin\alpha};$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}; \quad b = c \cdot \cos\alpha; \quad c = \frac{b}{\cos\alpha};$ $tg\alpha = \frac{a}{b}; \quad a = b \cdot tg\alpha; \quad b = \frac{a}{tg\alpha}.$
3. Теорема о среднем пропорциональном  $h^2 = a_c \cdot b_c, \quad h = \sqrt{a_c \cdot b_c};$ $a^2 = c \cdot a_c, \quad a = \sqrt{c \cdot a_c};$ $b^2 = c \cdot b_c, \quad b = \sqrt{c \cdot b_c}.$	

Затем на нескольких уроках идет тренировочная работа. Каждый набор упражнений в данном случае состоит из 5 одношаговых задач. Важно, чтобы перед учащимися была четко сформулирована цель: научиться пользоваться соотношениями, существующими в прямоугольном треугольнике, и рационально организована работа по ее достижению.

Сформированность соответствующих навыков проверяется при проведении проверочной работы №1 (из таблицы). Особого внимания требуют к себе пятые задачи из нее, так как задача на вычисление высоты прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе, встречается достаточно часто (особенно в 11 классе).

Таблица 5 - Тренировочные упражнения

Найти *x*.					
1				квадрат 	

Продолжение таблицы 5

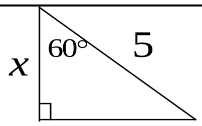
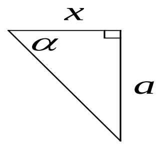
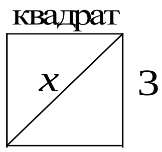
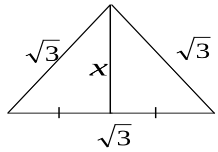
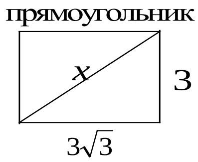
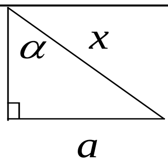
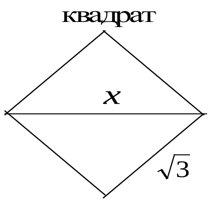
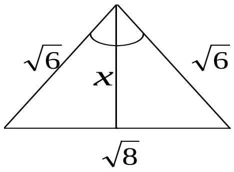
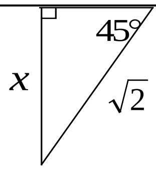
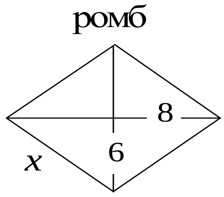
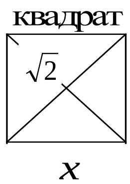
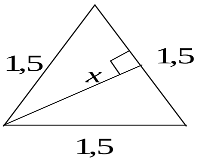
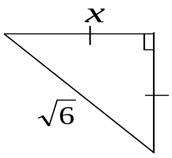
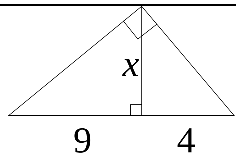
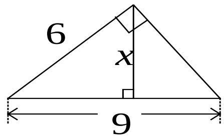
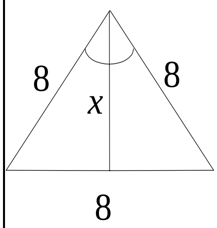
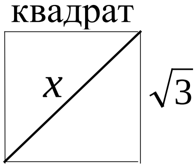
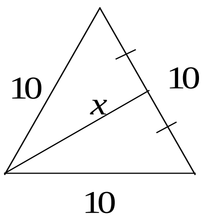
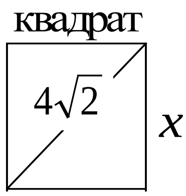
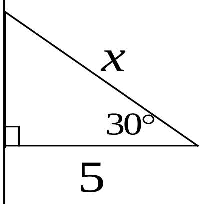
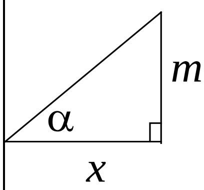
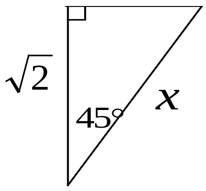
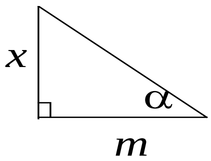
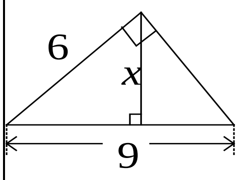
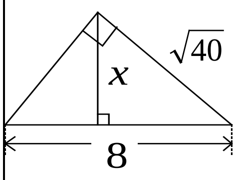
Найти *x*.					
2					
3					
4					

Таблица 6 - Проверочная работа №1

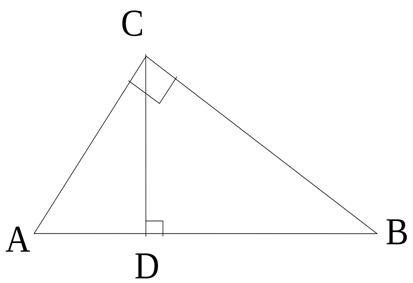
Вариант 1		Вариант 2	
Найти *x*			
1) 	2) 	1) 	2) 
3) 	4) 	3) 	4) 

Продолжение таблицы 6

Вариант 1	Вариант 2
Найти *x*	
5) 	5) 

После проведения проверочной работы №1 (на следующих уроках) целесообразно рассмотреть более подробно задачу, аналогичную задаче №5. Решая эту задачу нужно рассмотреть пять способов решения, чтобы учащиеся выбрали из них наиболее понравившиеся и запомнили его.

С этой целью можно решить следующую задачу.



Дано: $\angle C=90°$,

ΔABC,

$CD \perp AB$,

$AC=6$, $AB=9$.

Найти: CD.

Решение:

I способ: введение вспомогательного линейного неизвестного. Пусть $AD=y$, тогда $CD^2=AC^2-y^2$ и $CD^2=BC^2-(AB-y)^2$. Отсюда находим y, а затем и CD.

II способ: применение теоремы о среднем пропорциональном. Используя равенство $AC^2=AB \cdot AD$, находим AD, а затем CD.

III способ: использование подобия треугольников. $\Delta ACD \backsim \Delta ABC$, значит $\frac{AC}{AB}=\frac{CD}{BC}$, отсюда находим CD.

IV способ: введение вспомогательного угла.

Из треугольников CAD и CAB имеем соответственно $\sin\angle A = \dfrac{CD}{AC}$ и $\sin\angle A = \dfrac{BC}{BA}$. Отсюда $\dfrac{CD}{AC} = \dfrac{BC}{BA}$ и $CD = \dfrac{AC \cdot BC}{BA}$.

V способ: использование формулы площади треугольника. Так как $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BC$ и $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot CD$, то $\dfrac{1}{2} AC \cdot BC = \dfrac{1}{2} AB \cdot CD$ и $CD = \dfrac{AC \cdot BC}{AB}$.

При актуализации знаний данной темы следует обратить особое внимание на решение задач, где требуется найти острый угол в прямоугольном треугольнике. Навык решения таких задач потребуется при решении задач по стереометрии (10, 11 кл.), в которых нужно вычислить угол между прямой и плоскостью, двугранный угол или угол между плоскостями. Формированию такого навыка служат тренировочные упражнения таблицы IIIт и соответствующая проверочная работа №2. Здесь необходимо объяснить учащимся, что не редко под задачей «Найти угол» понимают задачу «Найти какую-нибудь тригонометрическую функцию этого угла». Например, при отсутствии микрокалькулятора правомерен ответ $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$, где α – острый (тупой) угол.

Таблица 7 - Тренировочные упражнения

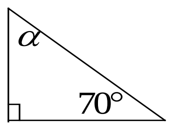
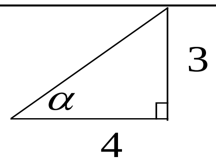
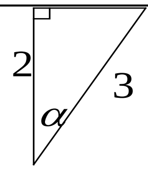
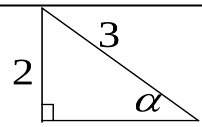
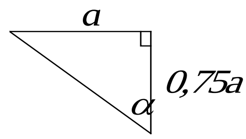
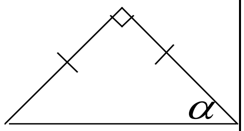
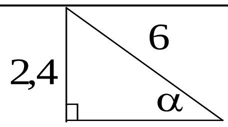
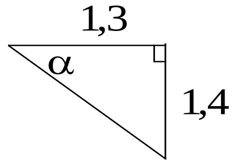
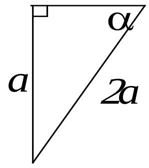
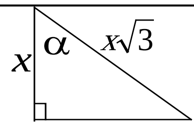
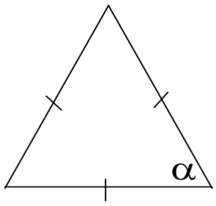
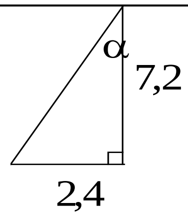
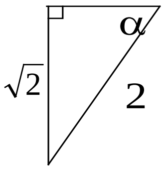
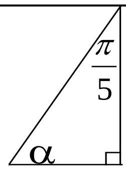
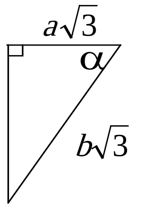
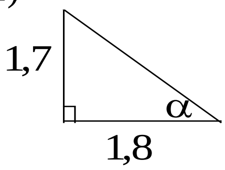
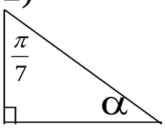
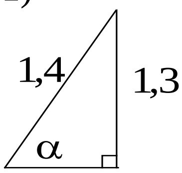
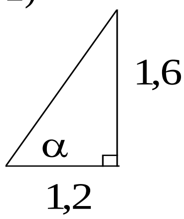
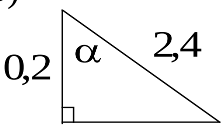
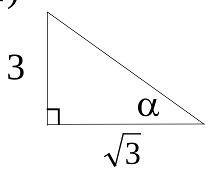
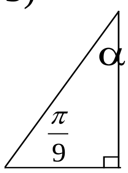
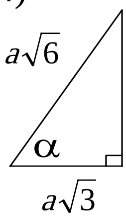
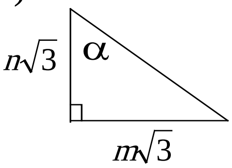
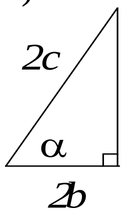
Найти угол α.					
1					
2					
3					

Таблица 8 - Проверочная работа №2

Вариант 1		Вариант 2	
Найти угол α			
1) 	2) 	1) 	2) 
3) 	4) 	3) 	4) 

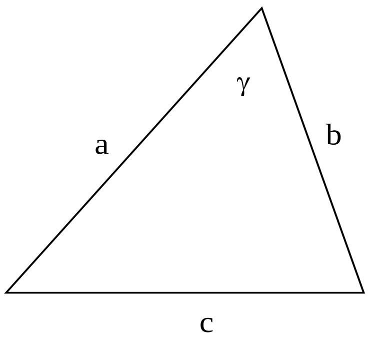
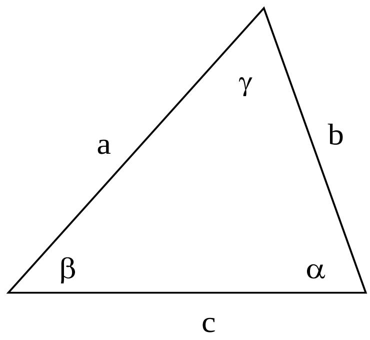
Продолжение таблицы 8

Вариант 1	Вариант 2
Найти угол α	
5)  	5) 

Теоремы синусов и косинусов (Решение треугольников)

Повторение следует начать с рассмотрения справочной таблицы по данной теме.

Таблица 9 - Справочная таблица

Теорема косинусов	Теорема синусов
 	
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$	$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

Задачный материал лучше подобрать таким образом, чтобы в результате решения задач можно было получить красивый ответ (т.е. такой, который выражается целым числом, либо целым числом, умноженным на «привычные корни»: $\sqrt{2}$ или $\sqrt{3}$). Значения некоторых наиболее употребительных углов учащиеся должны знать и уметь находить их без калькулятора (т.к. и в 9-м, и в 11-м классах пользоваться микрокалькуляторами на экзаменах нельзя). Навык решения задач на применение теоремы синусов и теоремы косинусов потребуется для вычисления некоторых элементов четырехугольников и многогранников.

Таблица 10 - Тренировочные упражнения

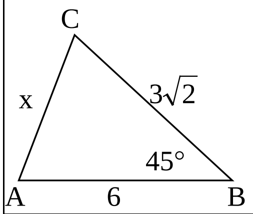
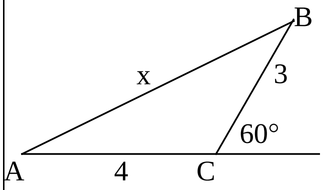
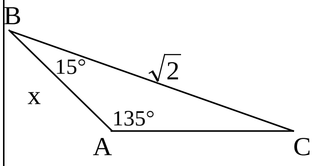
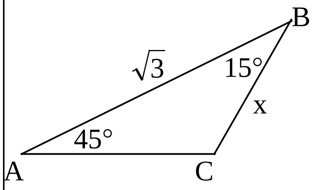
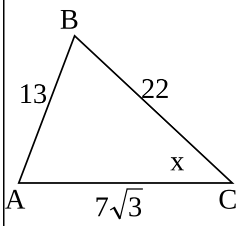
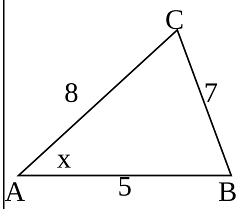
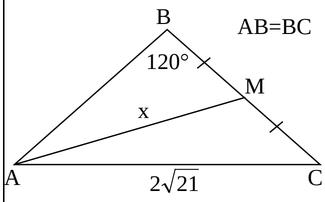
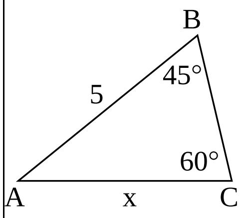
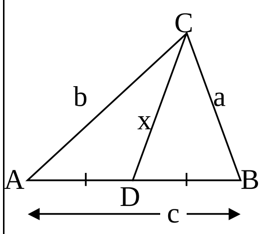
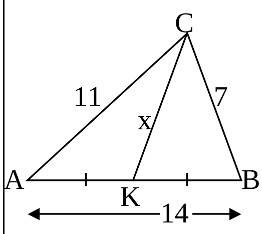
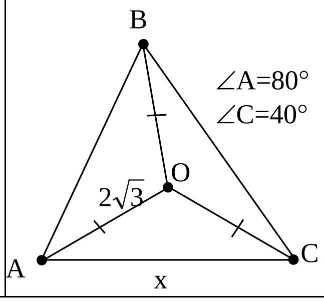
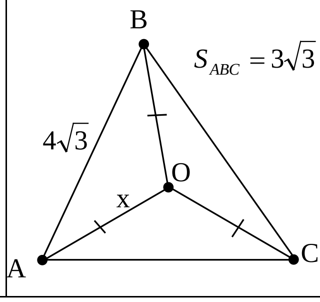
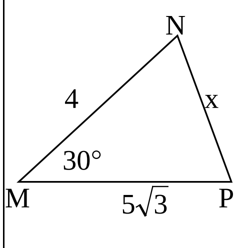
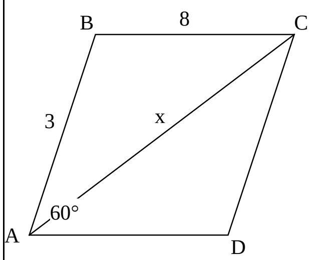
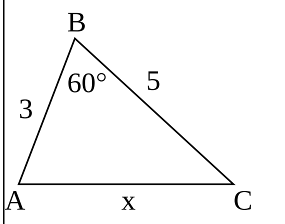
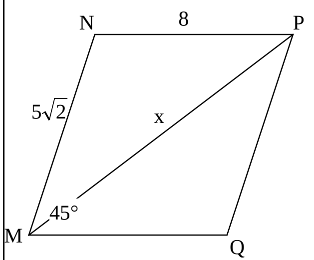
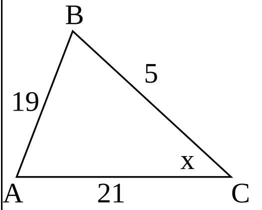
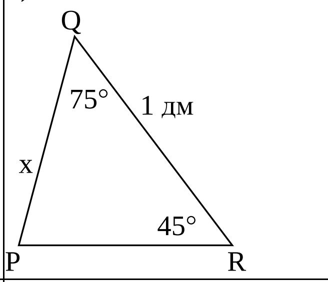
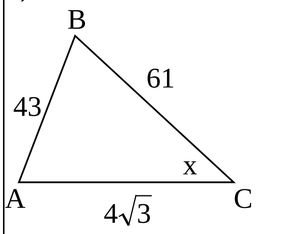
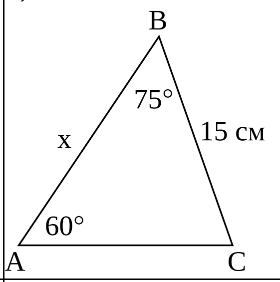
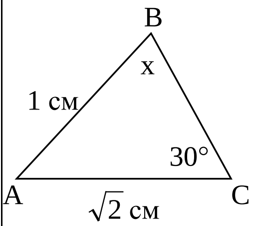
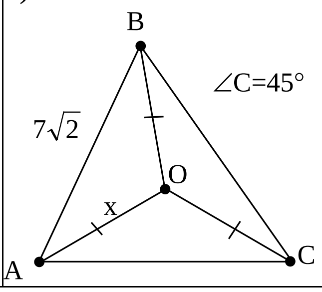
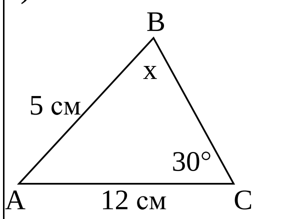
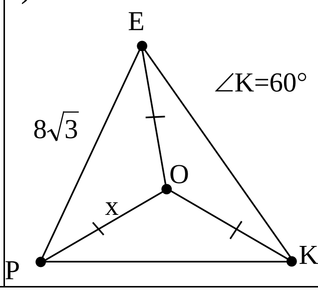
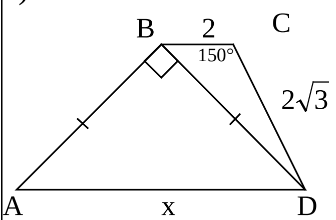
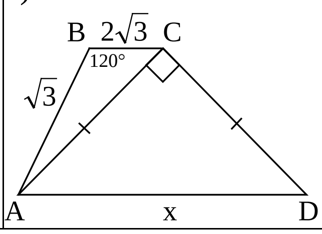
<table>
<tr><td colspan="2">Теорема косинусов</td><td colspan="2">Теорема синусов</td></tr>
<tr>
<td>1.

</td>
<td>2.

</td>
<td>1.

</td>
<td>2.

</td>
</tr>
<tr>
<td>3.

</td>
<td>4.

</td>
<td>3.

</td>
<td>4.

</td>
</tr>
<tr>
<td>5.

</td>
<td>6.

</td>
<td>5.

</td>
<td>6.

</td>
</tr>
</table>

Таблица 11 - Проверочная работа

<table>
<tr><td colspan="2">Вариант 1</td><td colspan="2">Вариант 2</td></tr>
<tr><td colspan="4">Найти x</td></tr>
<tr>
<td>1)

</td>
<td>2)

</td>
<td>1)

</td>
<td>2)

</td>
</tr>
</table>

Продолжение таблицы 11

Вариант 1	Вариант 2

Найти *x*			
3) 	4) 	3) 	4) 
5) 	6) 	5) 	6) 
7) 		7) 	

Для итогового повторения можно предложить учащимся задачи, в которых фигурируют различные треугольники, а также четырехугольники, решение которых сводится к применению теоремы Пифагора, теоремы косинусов и теоремы синусов:

1. В ΔABC $\angle C = 90°, \angle A = 30°, AC = 2\sqrt{3}$. Найти AB.

2. В ΔABC $\angle C = 90°, \angle A = 30°, AB = 2\sqrt{3}$. Найти AC.

3. В ΔABC $\angle C = 90°, \angle A = 30°, AC = 2\sqrt{3}$. Найти BC.

4. В ΔABC $\angle C = 90°, CH - \textit{высота}, AB = 25, \sin A = 0{,}6$. Найти BH.

5. В ΔABC $\angle C = 90°, CH - \textit{высота}, AB = 4, \angle A = 60°$. Найти AH.

6. Выясните, является ли треугольник тупоугольным, если его стороны равны 6,7 и 10.

7. Определите вид треугольника, если его стороны равны 5 см, 7 см и 6 см.

8. В ΔABC $AC = 21, \angle ABC = 60°$. Найдите длины сторон BC и AB, если они пропорциональны числам 3 и 8.

9. Найдите диагональ параллелограмма, если вторая диагональ равна 8 см, а стороны равны 4 и 6 см.

Задачи на применение свойства медиан треугольника:

Навык решения задач на применение свойства медиан треугольника необходим для решения задач по стереометрии, в которых требуется вычислить некоторые линейные элементы треугольных призм, треугольных пирамид.

1. В равнобедренном ΔABC медианы пересекаются в точке O. Найдите расстояние от точки O до вершины B данного треугольника, если $AB = AC = 13см, BC = 10см$.

2. Вычислите медианы треугольника со сторонами 25 см, 25 см, 14 см.

3. В треугольнике со сторонами 15 см, 15 см и 24 см найдите расстояние от точки пересечения медиан до сторон треугольника.

Расстояния от точки пересечения медиан равнобедренного треугольника до сторон равны 8 см, 8 см и 5 см. Найдите стороны треугольника.

Площадь треугольника

Прочные знания формул площадей треугольников (произвольных, прямоугольных) нужны для решения задач планиметрии – для вычисления некоторых линейных элементов треугольника, таких как высота, радиусы вписанной и описанной окружностей. В стереометрии знание формул площади треугольника применяется при вычислении площадей поверхности и объемов многогранников и тел вращения.

Формулы можно повторить устно с помощью справочной таблицы. Далее учитель проводит уроки по формированию навыка решения задач на нахождение площади треугольника с использованием тренировочных упражнений. Позднее можно провести проверочную работу.

Таблица 12 - Справочная таблица

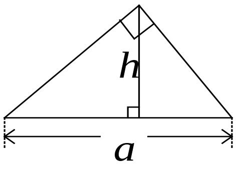
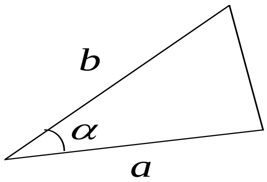
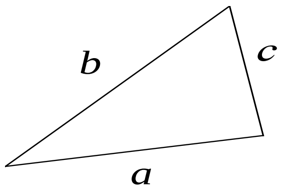
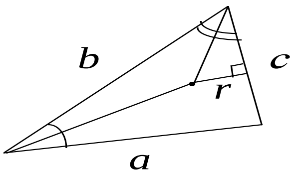
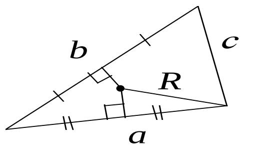
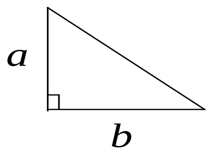
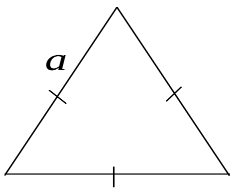
 $S=\frac{a\cdot h}{2}$	 $S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin\alpha$	 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p=\frac{a+b+c}{2}$	
 $S=p\cdot r$	 $S=\frac{abc}{4R}$	 $S=\frac{1}{2}ab$	 $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Таблица 13 - Тренировочные упражнения

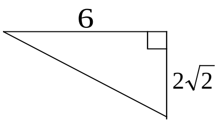
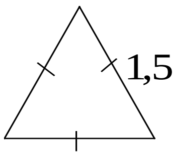
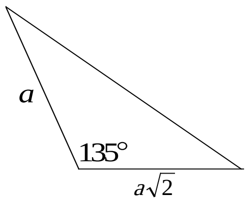
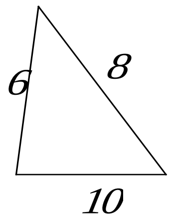
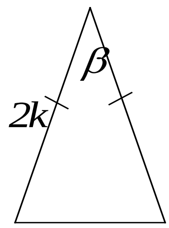
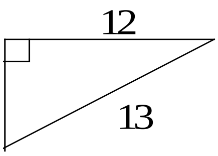
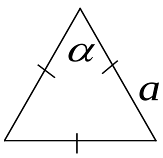
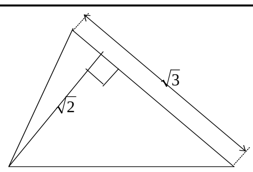
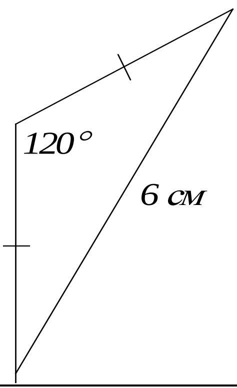
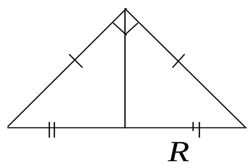
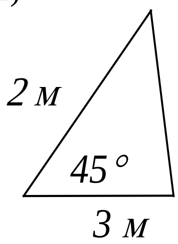
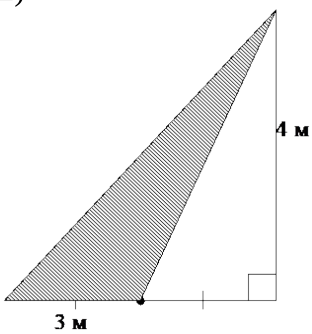
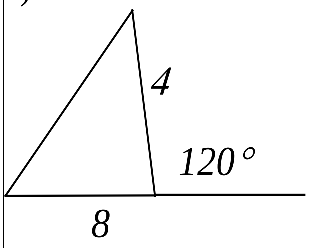
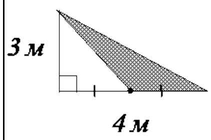
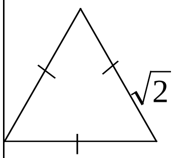
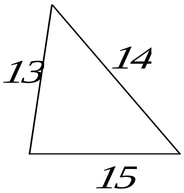
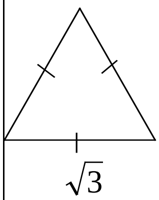
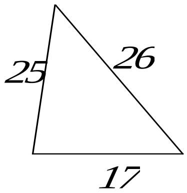
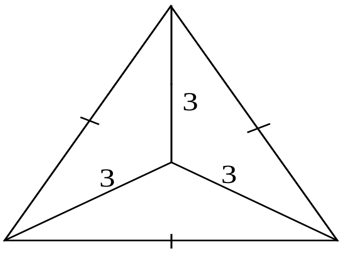
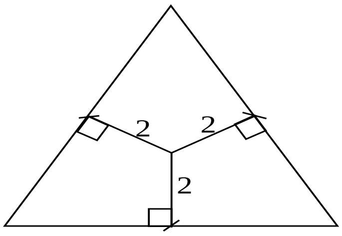
Вычислить площадь фигуры				
				
				

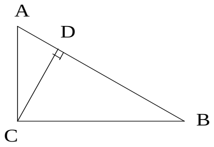
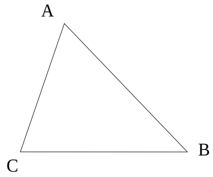
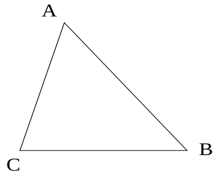
Таблица 14 - Проверочная работа

Вычислить площадь треугольника

<table>
<tr><td colspan="2">Вариант 1</td><td colspan="2">Вариант 2</td></tr>
<tr>
<td>1)
</td>
<td>2)
</td>
<td>1)
</td>
<td>2)
</td>
</tr>
<tr>
<td>3)
</td>
<td>4)
</td>
<td>3)
</td>
<td>4)
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">5)
</td>
<td colspan="2">5)
</td>
</tr>
</table>

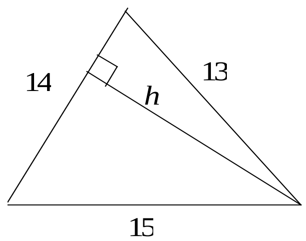
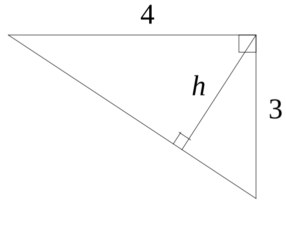
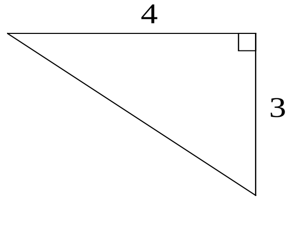
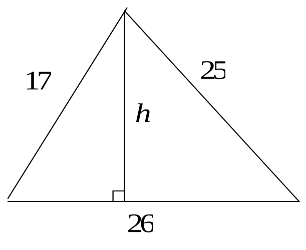
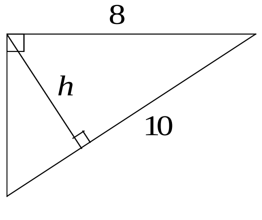
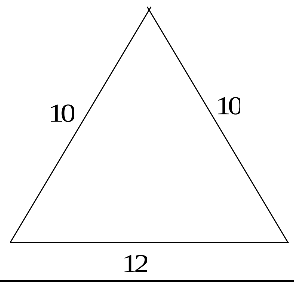
Вычисление некоторых линейных элементов *(h, r, R)* треугольника с использованием формулы площади

Таблица 14 - Справочная таблица (типы задач)

Найти h	Найти r	Найти R
 Дано: ΔABC, $\angle C=90°$, AC=6, BC=8, CD⊥AB. Найти: CD. Решение: $2S_{ABC}=AC\cdot BC$, и $2S_{ABC}=AB\cdot CD$. $CD=\dfrac{AC\cdot BC}{AB}$. $AB=\sqrt{6^2+8^2}=10$ $CD=\dfrac{6\cdot 8}{10}=4{,}8$. Ответ: CD=4,8 <u>Вывод:</u> $h=\dfrac{a\cdot b}{c}$.	 Дано: ΔABC, AB=13, BC=14, AC=15. Найти: r. Решение: $S=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$ $S=\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=84$ $S=p\cdot r$ $\Rightarrow$ $r=\dfrac{S}{p}$, r=4. Ответ: r=4.	 Дано: ΔABC, AB=13, BC=14, AC=15. Найти: R. Решение: $S=\dfrac{abc}{4R}$, $S=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$ $S=\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=84$, тогда $R=\dfrac{abc}{4S}$, $R=8\dfrac{1}{8}$. Ответ: $R=8\dfrac{1}{8}$.

Задачи таблицы VII предложены в виде образца. Навыки решения таких задач закрепляются при выполнении тренировочных упражнений.

Таблица 15 - Тренировочные упражнения

	Найти h		Найти r и R
1			
2			

На уроках итогового повторения целесообразно предложить учащимся задачи, в решении которых применяется теорема, обратная теореме Пифагора, формула Герона, так как способы решения таких задач будут использованы при решении стереометрических задач на вычисление площадей поверхностей и объемов многогранников:

1. В ΔABC $AB=\sqrt{2}, BC=2$. На стороне AC отмечена точка M так, что $AM=1, BM=1$. Найдите AC.
2. Найдите меньшую высоту треугольника со сторонами, равными 24 см, 25 см и 7 см.
3. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, в котором $AB=5см, BC=13см, CD=9см, DA=15см, AC=12см$.
4. Расстояние от точки M, лежащей внутри ΔABC, до прямой AB равно 6 см, а до прямой AC равно 2 см. Найдите расстояние от точки M до прямой BC, если $AB=13см, BC=14см, AC=15см$.
5. Дан ΔABC. На стороне AC отмечена точка C так, что $AK=6см, KC=9см$. Найдите площадь ΔABK и ΔCBK, если $AB=13см, BC=14см$.
6. В прямоугольном ΔABC гипотенуза AB равна c и $\angle ABC=\alpha$. Найдите все медианы в этом треугольнике.
7. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе , разбивает его на два треугольника с периметрами 8 и 9. Найдите стороны треугольника.
8. Две стороны треугольника равны 3 и 6, а угол между ними равен $60°$. Найдите биссектрису треугольника, проведенную из вершины этого угла.