

# 1 пример

Постройте график функции  $y = |x^2 - 4x - 5|$ .  
Какое наибольшее число точек может иметь график с прямой параллельной оси  $x$ .

Построим график функции  $y = x^2 - 4x - 5$ .  
График параболы, ветви вверх, вершина  $(2; -9)$ .  
 $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$ ;  $y_0 = 4 - 8 - 5 = -9$ ;  $x = 2$  - ось симметрии.

Точки пересечения с осью  $x$ :  $(-1; 0)$ ,  $(5; 0)$ .  
 $x^2 - 4x - 5 = 0$ ,  $D = 16 + 20 = 36$ ,  $x_1 = \frac{4+6}{2} = 5$ ,  $x_2 = \frac{4-6}{2} = -1$ .

Дополнительные точки:  $(0; -5)$ ,  $(1; -8)$ ,  $(6; 4)$ .

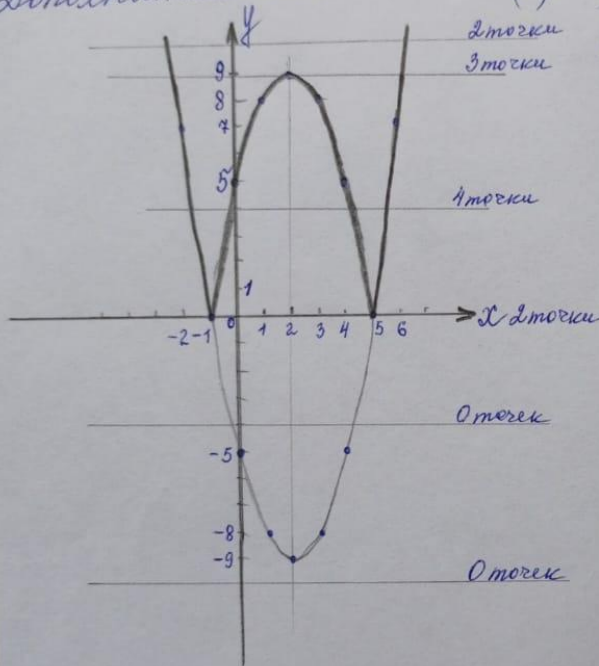


График функции  $y = |x^2 - 4x - 5|$  получается путем зеркального отображения части графика  $y = x^2 - 4x - 5$ , которая находится ниже оси абсцисс, на верхнюю полуплоскость.

Прямая параллельная оси абсцисс может иметь с графиком функции  $y = |x^2 - 4x - 5|$  0 точек, 2 точки, 3 точки и 4 точки, т.е. наибольшее число точек - это 4.

Ответ: 4.

# 2 пример

Постройте график функции  $y = x^2 + x - 2 - |4x + 8|$ .  
 Укажите все значения  $m$ , при которых прямая  $y = m$  пересекает график этой функции ровно в трех точках.

Вспомним определение модуля:

$$|4x + 8| = \begin{cases} 4x + 8, & \text{если } 4x + 8 \geq 0, x \geq -2, \\ -4x - 8, & \text{если } 4x + 8 < 0, x < -2. \end{cases}$$

При построении графика, заданной функции, рассмотрим два случая: при  $x \geq -2$  и  $x < -2$ .

① Если  $x \geq -2$ , то  $y = x^2 + x - 2 - (4x + 8) = x^2 + x - 2 - 4x - 8 = x^2 - 3x - 10$ . График этой функции часть параболы с вершиной  $(1, 5; -12, 25)$ , ветви вверх, дополнительные точки:

|     |    |    |     |     |        |     |     |    |   |
|-----|----|----|-----|-----|--------|-----|-----|----|---|
| $x$ | -2 | -1 | 0   | 1   | 1,5    | 2   | 3   | 4  | 5 |
| $y$ | 0  | -6 | -10 | -12 | -12,25 | -12 | -10 | -6 | 0 |

$x = 1,5$  — ось симметрии.

② Если  $x < -2$ , то  $y = x^2 + x - 2 - (-4x - 8) = x^2 + x - 2 + 4x + 8 = x^2 + 5x + 6$ . График этой функции часть параболы с вершиной  $(-2, 5; -0, 25)$ , ветви вверх, дополнительные точки:

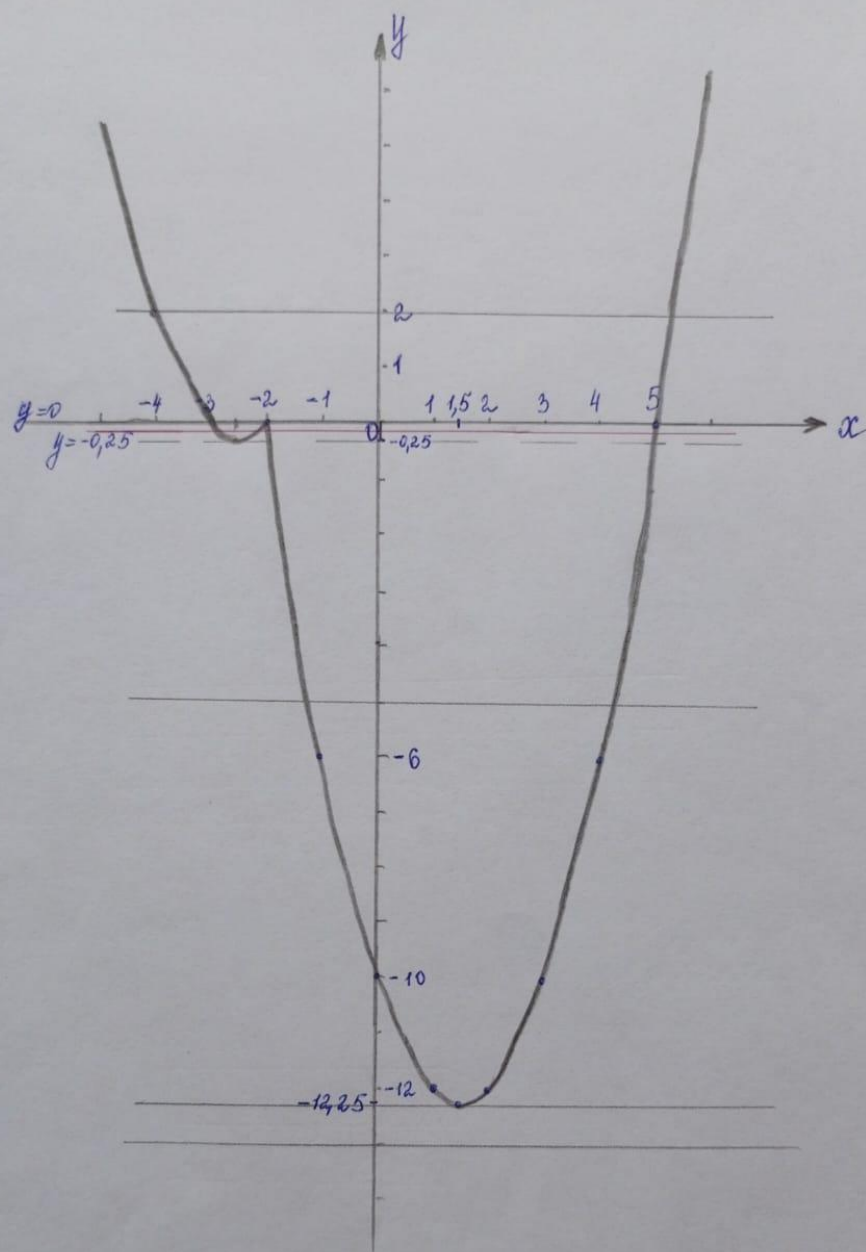
|     |    |    |    |       |    |
|-----|----|----|----|-------|----|
| $x$ | -5 | -4 | -3 | -2,5  | -2 |
| $y$ | 6  | 2  | 0  | -0,25 | 0  |

$x = -2,5$  — ось симметрии.

Прямая  $y = m$  пересекает график этой функции:

при  $m < -12,25$ ; нет точек,  
 при  $m = -12,25$ ; 1 точка,  
 при  $-12,25 < m < -0,25$ ; 2 точки,  
 при  $m = -0,25$ ; 3 точки,  
 при  $-0,25 < m < 0$ ; 4 точки,  
 при  $m = 0$ , 3 точки,  
 при  $m > 0$ , 2 точки.

Значит, прямая  $y = m$  пересекает график этой функции ровно в трех точках при  $m \in (-0,25; 0)$ .



Ombem:  $(-0.25; 0)$ .

### 3 пример

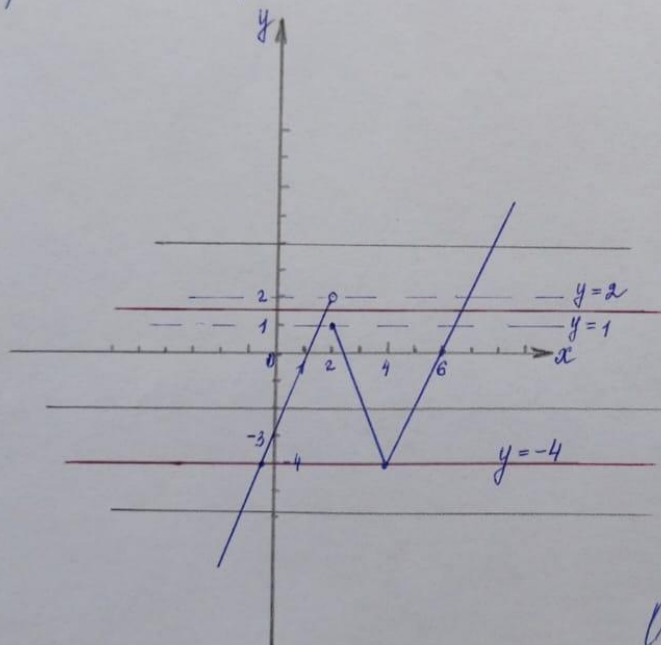
Постройте график функции  $y = \begin{cases} 2,5x - 3, & x < 2, \\ -2,5x + 6, & 2 \leq x \leq 4, \\ 2x - 12, & x > 4. \end{cases}$

Определите, при каких значениях  $t$  прямая  $y = t$  имеет с графиком ровно две общие точки.

Строим кусочно-заданную функцию. График функции  $y = 2,5x - 3$  - прямая, проходящая через точки  $(0; -3)$  и  $(2; 2)$ ; при  $x < 2$  выбираем часть прямой, расположенную ниже точки  $(2; 2)$ .

График функции  $y = -2,5x + 6$  при  $2 \leq x \leq 4$ , часть прямой заключенная между точками  $(2; 1)$  и  $(4; -4)$ .

График функции  $y = 2x - 12$  - прямая, проходящая через точки  $(4; -4)$  и  $(6; 0)$ , при  $x > 4$  выбираем часть прямой, расположенную выше точки  $(4; -4)$ .



Прямая  $y = t$  имеет с графиком ровно две общие точки при  $t = -4$  и при  $1 < t < 2$ , т.к. при  $t < -4$ , 1 точка, при  $-4 < t \leq 1$ , 3 точки, при  $t \geq 2$ , 1 точка;

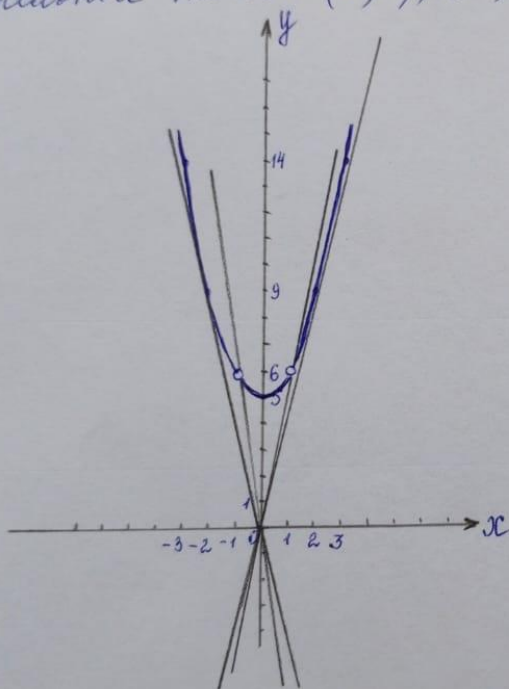
Ответ:  $-4; (1; 2)$ .

#### 4 пример

Постройте график функции  $y = \frac{(x^2+5)(x^2-1)}{x^2-1}$  и определите, при каких значениях  $b$  прямая  $y = bx$  имеет с графиком одну общую точку.

$$y = \frac{(x^2+5)(x^2-1)}{x^2-1} = x^2+5, \quad x^2-1 \neq 0, \quad x \neq \pm 1.$$

Графиком функции  $y = x^2+5$  является парабола, ветви направлены вверх, точка  $(0; 5)$  - вершина, точки  $(-1; 6), (1; 6)$  - выколотые точки, дополнительные точки  $(2; 9), (-2; 9)$ ,  $x=0$  - ось симметрии.



Прямая  $y = bx$  имеет с графиком одну общую точку в двух случаях:

1) если прямая является касательной, т.е. решаем систему  $\begin{cases} y = bx \\ y = x^2+5 \end{cases}$ .

В этом случае уравнение  $x^2+5 = bx$  имеет единственный корень.

$$x^2 - bx + 5 = 0, \quad D = b^2 - 20 = 0$$

$$b^2 = 20, \quad b = \pm\sqrt{20}, \quad b = \pm 2\sqrt{5}.$$

2) если прямая проходит через выколотую точку. В этом случае точки

$(-1; 6), (1; 6)$  обращают уравнение  $y = bx$  в верное равенство, т.е.  $6 = b \cdot (-1)$  или  $6 = b \cdot 1$ , откуда  $b = -6$  или  $b = 6$ , т.е.  $b = \pm 6$ .

Значит, прямая  $y = bx$  имеет с графиком одну общую точку при  $b = \pm 2\sqrt{5}; b = \pm 6$ .

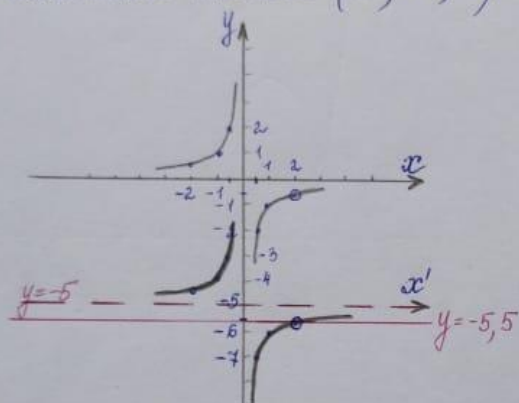
Ответ:  $\pm 2\sqrt{5}; \pm 6$ .

# 5 пример

Постройте график функции  $y = -5 - \frac{x-2}{x^2-2x}$ .  
 Определите, при каких значениях  $m$  прямая  $y=m$  не имеет с графиком общих точек.

Преобразуем дробь:  $y = -5 - \frac{x-2}{x^2-2x} = -5 - \frac{x-2}{x(x-2)} = -5 - \frac{1}{x}$ ,  $x-2 \neq 0$ ,  $x \neq 2$ ,  $x \neq 0$ .

Построим график функции  $y = -\frac{1}{x}$ . График гиперболы,  $x \neq 0$ , расположенная во II и IV четверти, выколотая точка  $(2; -0,5)$ .



| $x$ | -2            | -1 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1  | 2              |
|-----|---------------|----|----------------|---------------|----|----------------|
| $y$ | $\frac{1}{2}$ | 1  | 2              | -2            | -1 | $-\frac{1}{2}$ |

Построим график функции  $y = -5 - \frac{1}{x}$ . График этой функции можно получить из графика функции  $y = -\frac{1}{x}$  сдвинув на 5 единиц вниз.

Выколотая точка  $(2; -5,5)$ .

Вспомогательная, при каких значениях  $m$  прямая  $y=m$  не имеет с графиком общих точек.  
 Так как прямая  $y=m$  при прохождении через выколотую точку не будет иметь с графиком ни одной точки, то  $m = -5,5$ . Еще один вариант прямой  $y=m$ , не имеющей с графиком ни одной общей точки, при  $m = -5$ .

Ответ:  $-5,5; -5$ .