Из курса алгебры мы знаем разные способы решения квадратных уравнений $ax^2 + bx + c = 0$. Графический способ, используя формулы (дискриминант, разложение на множители, по теореме Виета и т.д.) В своей работе познакомлю вас с ещё один способ решения квадратных уравнений с помощью номограмм. Это старый забытый способ решения квадратных уравнений. Находится в сборнике «Четырехзначные математические таблицы» В.М. Брадиса.

Рассмотрим способ построение номограммы. Для решения уравнений $x^\alpha + p_0x^\beta + q_0 = 0$ используют номограммы из выравненных точек. [4] Получить такую номограмму можно так: нарисуем две вертикальные параллельные прямые – ось p с началом отсчёта A и ось q с началом отсчёта B. Отрезок AB перпендикулярен осям p, q, но это вовсе необязательно (Рис.11.).

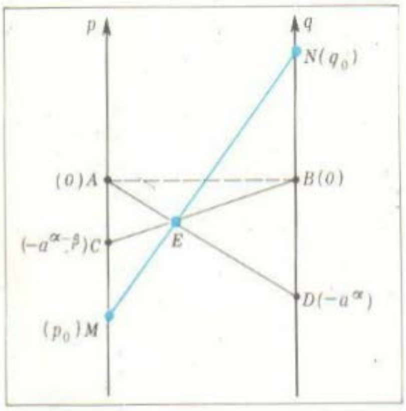
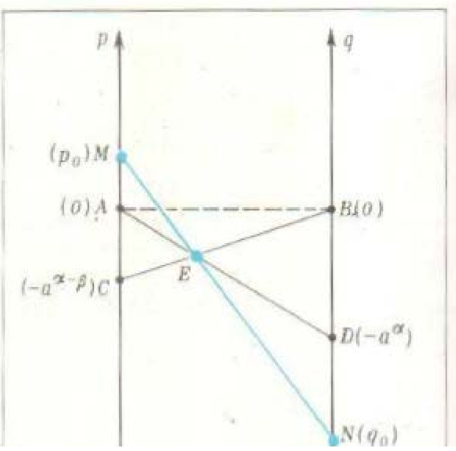


Рисунок 11. Номограмма для уравнения $x^\alpha + p_0x^\beta + q_0 = 0$

Возьмём произвольные числа α, ß и положительное число a. На оси p возьмём точку C с координатой $-a^{\alpha-\beta}$ на оси p – точку D с координатой $-a^\alpha$. Пусть AD∩BC=E. Проведём через E произвольную прямую, не параллельную осям p, q. Обозначим координату пересечения M это прямой с осью p через p_0, пересечения N с осью q – через q_0. Тогда $a^\alpha + p_0^{\alpha\beta} + q_0 = 0$ (1), т.е. число a является корнем уравнения $x^\alpha + p_0x^\beta + q_0 = 0$.

Прямая MN может пересекаться с осями p, q одним из трёх способов:

$p_0 < 0$, $q_0 > 0$; $p_0 > 0$, $q_0 < 0$ (Рис.12.); $p_0 < 0$, $q_0 < 0$ (Рис.13.).



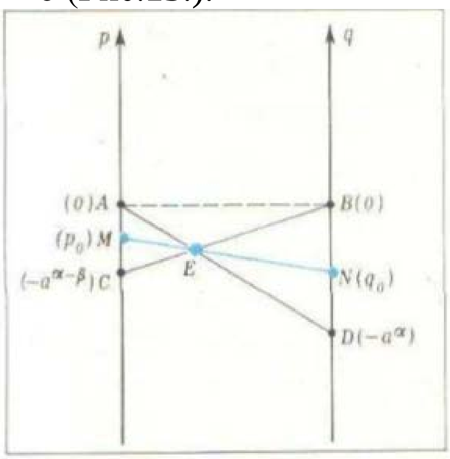


Рисунок 12. Рисунок 13.

Докажем равенство (1) для случая, изображённого на (Рис.12.) (остальные два случая рассматриваются аналогично). Из подобия треугольников AEC и

BED имеем $\frac{|BD|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|AE|}$, откуда $\frac{|DE|}{|AE|} = \frac{a^{\alpha}}{a^{\alpha-\beta}} = a^{\beta}$. Далее из подобия треугольников AEM и NED следует $\frac{|DN|}{|AM|} = \frac{|DE|}{|AE|}$, то есть $\frac{a^{\alpha}+q_0}{p_0} = a^{\beta}$. (Рис.12.), что и даёт (1). Зафиксируем произвольные α, ß и рассмотрим всевозможные уравнения $x^{\alpha} + px^{\beta} + q = 0$.

Номограмма для отыскания положительных корней таких уравнений рисуется следующим образом:

1) параметру a придаются разные положительные значения и для каждого из них строится точка E так, как рассказано выше;

2) полученные точки, помеченные соответствующими значениями параметра, соединяются плавной кривой Г (Рис.14.).

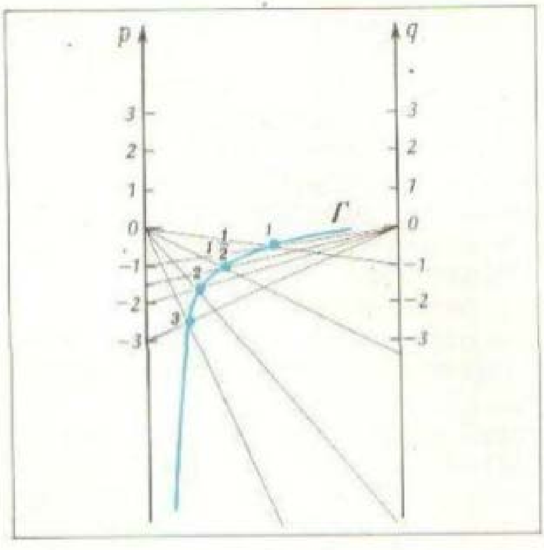


Рисунок 14. Номограмма

Теперь при помощи этой номограммы приближённо можно найти положительные корни конкретного уравнения $x^{\alpha} + p_0x^{\beta} + q_0 = 0$, для этого надо на оси p взять точку M с координатой p_0, на оси q – точку N с координатой q_0 и провести прямую MN. Каждая точка пересечения прямой MN с кривой Г даёт, в силу (1), положительный корень уравнения (2). Точки, соответствующие коэффициентам p, q уравнения, и точки, соответствующие искомым положительным корням уравнения $x^{\alpha} + px^{\beta} + q = 0$, лежат на одной прямой.

На рисунке приведена номограмма из выравненных точек для решения уравнений $x^{\alpha} + px^{\beta} + q = 0$ при α=2, ß=1. (Рис.15.) Эта номограмма взята из четырёхзначных математических таблиц В.М.Брадиса. [2]

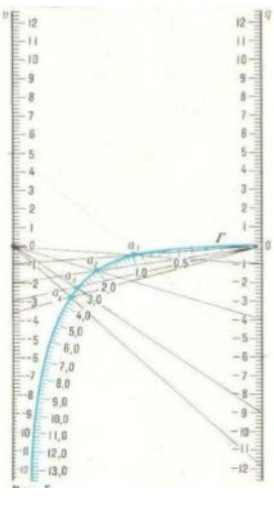


Рисунок 15. Номограмма

Построенная прямая MN может пересекаться с кривой Г:

- в двух точках (в этом случае оба корня данного уравнения $x^2 + p_0x + q_0 = 0$ положительны);
- в одной точке (в этом случае второй корень уравнения отрицателен);
- может касаться кривой (в этом случае у уравнения $x^2 + p_0x + q_0 = 0$ – кратный положительный корень);
- может не иметь с кривой Г ни одной общей точки (в этом случае либо оба корня уравнения отрицательны, либо у него вообще нет действительных корней).

Для получения отрицательных корней уравнения $x^2 + p_0x + q_0$ 0 надо, сделав замену переменной $x = -t$, искать на той же номограмме положительные корни уже для уравнения $t^2 - p_0t + q_0 = 0$.

Разберем несколько примеров решения квадратных уравнений с помощью метода номограмм. [4]

Задание найдите корни уравнения.

1) $x^2 - 7x + 6 = 0$. (Рис.16.). На левой шкале находим значение -7, а на правой 6. Соединяем с помощью линейки или нити. Точки пересечения с графиком 6 и 1. Номограмма даёт корни уравнения : $x_1=6$ и $x_2=1$.

Ответ: 6; 1.

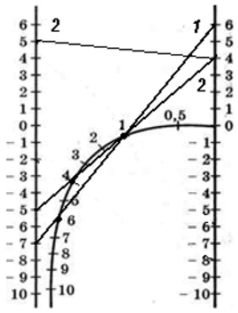


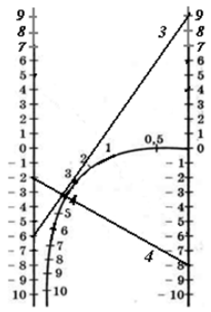
Рисунок 16.

2) $x^2 - 6x + 9 = 0$. (Рис.17.). На левой шкале находим значение -6, а на правой 9. Соединяем с помощью линейки.

Номограмма даёт один корень $x = 3$. Ответ: 3.

3) $x^2 + 5x + 4 = 0$. (Рис.16.). На левой шкале находим значение 5, а на правой 4. Соединяем с помощью линейки.

Номограмма не даёт корней. Значит, вводим новую переменную $x = - t$, получим уравнение $t^2 - 5t + 4 = 0$. Номограмма даёт корни: $t_1=4$ и $t_2 = 1$, то $x_1= - 4$ и $x_2 = -1$.
Ответ: –4; –1.



4) $x^2 - 2x - 8 = 0$. (Рис.17.). Номограмма даёт положительный корень $x_1=4$, а отрицательный корень находим, вычитая положительный корень из $- p$, т.е.
$x_2 = - p - x_1 = 2 - 4 = -2$. Ответ: 4; –2.

Рисунок 17.

5) $x^2 - 2x + 3 = 0$. (Рис.18.). $x = - t$, $t_2 + 2t + 3 = 0$.

Номограмма не даёт корней. Ответ: корней нет.

6) $2x^2 + 7x + 4 = 0$. (Рис.18.). Разделим коэффициенты этого уравнения на 2, получим уравнение: $x^2 + 3{,}5x + 2 = 0$. $x = -t$, $t^2 - 3{,}5t +2 = 0$. $t_1 \approx 2{,}8$ и $t_2 \approx 0{,}8$, откуда $x_1 \approx -2{,}8$ и $x_2 \approx -0{,}8$

Ответ: – 2,8; – 0,8.

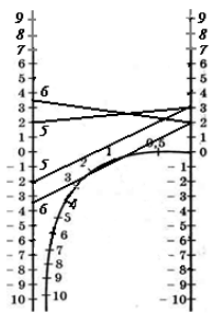


Рисунок 18.

7) $x^2 - 0{,}89x + 0{,}16 = 0$. В случае, если оба корня уравнения $x^2 + px + q = 0$ близки к нулю, также выгодно сделать замену переменной $x = kt$. Для уравнения $x^2 - 0{,}89x + 0{,}16 = 0$ значения корней по номограмме найти трудно. Пусть $x=0{,}2\ t$,

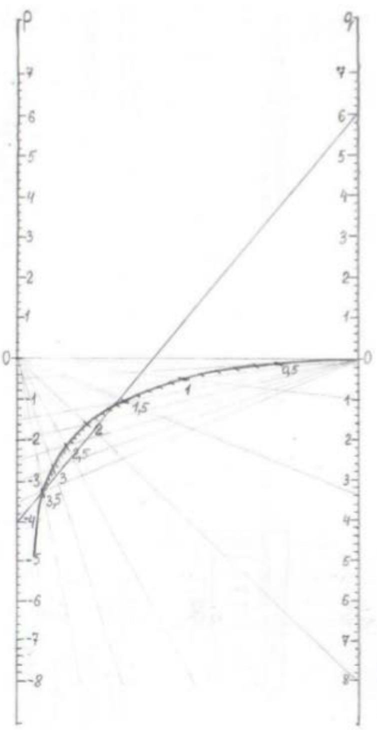
получим уравнение $t^2 - 4{,}45t + 4=0$; его корни $t_1=1{,}2$; $t_2=3{,}2$, откуда $x_1=0{,}24$, $x_2=0{,}64$. Ответ: 0,24; 0,64.

8) $x^2 - 0{,}3x + 0{,}2 = 0$. $x = -0{,}2t$, $t^2 + 1{,}5t + 5 = 0$. Номограмма не даёт корней. Ответ: корней нет.

9) $x^2 - 13x + 17 = 0$. Если значения коэффициентов p и q по модулю превосходят 12,6, то следует сделать замену переменной $x=kt$ и перейти от уравнения $x^2 + px + q = 0$ к уравнению $t^2 + (p/k)t + q/k^2= 0$; число k выбирается так, чтобы числа p/k и q/k^2 были уже в указанных на номограмме интервалах. $x=2t$, $t^2 - 6{,}5t + 4{,}25 = 0$. $t_1=5{,}6$ и $t_2 =0{,}75$, откуда $x_1 =11{,}2$ и $x_2=1{,}5$. Ответ: 11,2; 1,5.

Для решения уравнений 1-9 вида $x^\alpha + px^\beta + q = 0$ использовали номограмму из выравненных точек в «Четырёхзначных математических таблицах» В.М.Брадиса при α=2, ß=1. [2]

Построим номограммы *из выравненных точек* для нахождения положительных корней уравнений $x^\alpha + px^\beta + q = 0$, если: α=3, ß=2; (Рис.19.), α=3/2, ß= ¼ (Рис.20.).



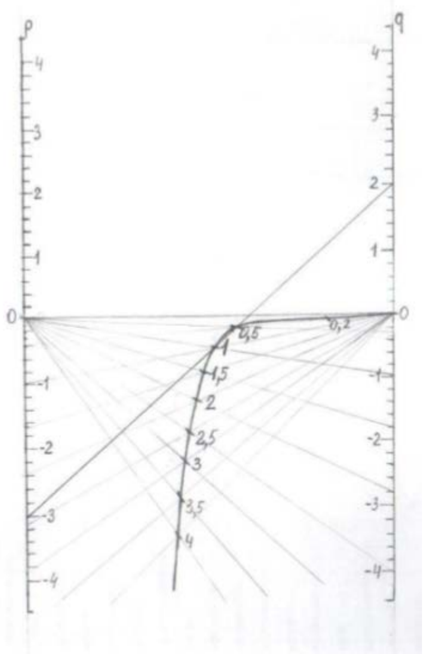


Рисунок 19. Рисунок 20.

Используя построенные номограммы *из выравненных точек* решим уравнения: [3]

10) $x^3 - 4x^2 + 6 = 0$ Номограмма (рис.19) даёт корни. $x_1 = 3{,}5$ и $x_2 = 1{,}65$.

Ответ: 3,5; 1,65.

11) $x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{4}} + 2 = 0$ Номограмма (рис.20) даёт корни. $x_1 = 1{,}0$ и $x_2 = 0{,}4$.

Ответ: 1; 0,4.

Области применения номограмм.

Используются номограммы в прикладных дисциплинах, так как у математиков, химиков и физиков-теоретиков обычно есть формулы и им обычно требуется точное решение уравнений. Врачам, синоптикам, строителям, механикам, технолога. Обычно сверхвысокая точность не нужна, достаточно одной или двух значащих цифр и их графики строятся обычно не по математическим функциям, а по результатам предварительных экспериментов. Примеров множество — расчет мощности и давления пожарных кранов, газовых горелок, определение физической работоспособности, конструктивных параметров пресс-форм литья под давление, для расчета температур воздуха в помещении и поверхности лучистого нагревателя и т.д.

Разработка и составление номограмм — целое искусство. Есть целый раздел математики, посвященный им. Надо не только удачно планировать маршрут по данным, но и выбрать правильный масштаб, такой, чтобы охватить их рабочий диапазон. Это требует навыка и очень важно.

Рассмотрим примеры применения номограмм в нашей жизни. [4]

В *строительстве*. Номограмма для определения количества автомобилей-самосвалов грузоподъемностью 12т в зависимости от дальности транспортирования грунта и объема ковша экскаватора (грунт земляного полотна – гравийно-галечный при размере частиц до 80 мм 1 категории трудности разработки с плотностью естественного залегания 1,75 т/м³) (Рис.21.).

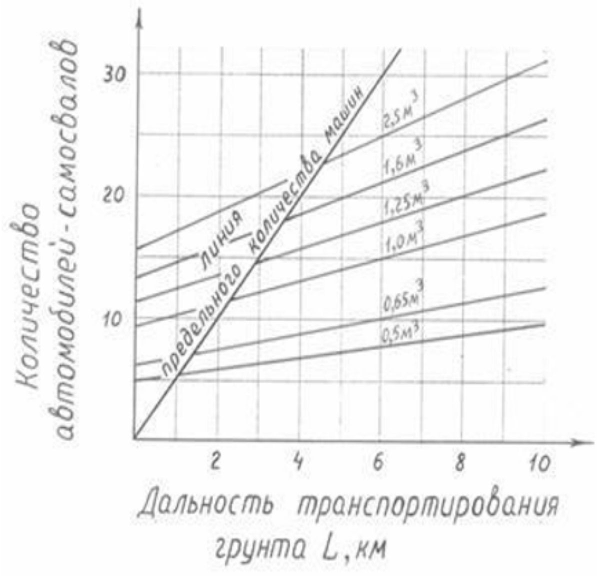


Рисунок 21.

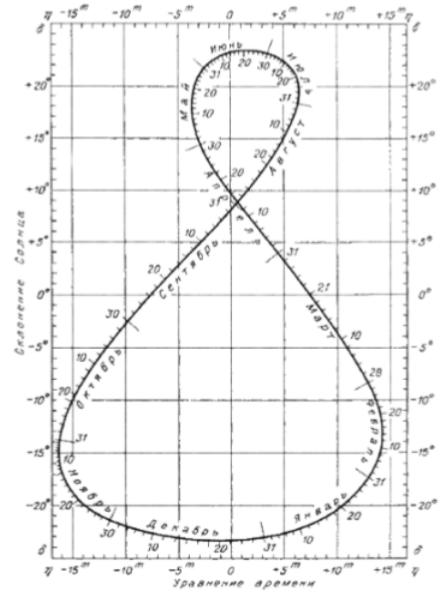


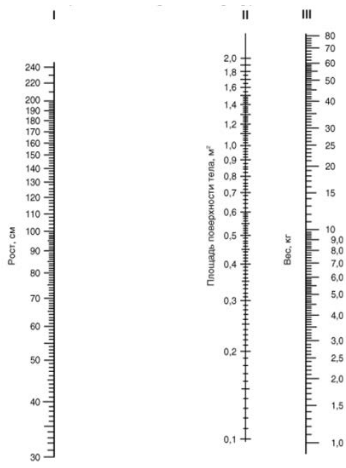
Рисунок 22.

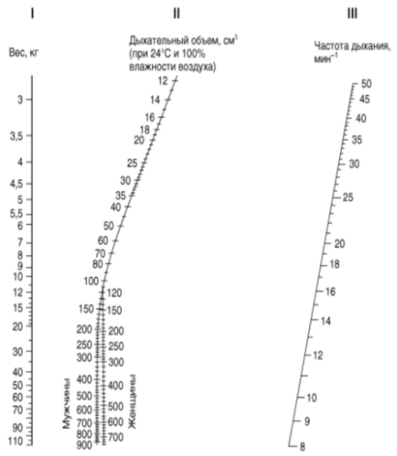
В *астрономии.* [6] Для определения значения уравнения времени может служить номограмма (аналемма) (Рис.22.). Несмотря на довольно простое определение звездного времени, для гражданских целей удобнее задавать шкалы времени, основанные на наблюдениях Солнца. Продолжительность истинных солнечных суток не одинакова в течение года, поскольку Солнце движется по эклиптике неравномерно. Из-за эксцентриситета земной орбиты зимой в северном полушарии сутки длятся немного больше, чем летом, а в южном – наоборот. Кроме того, плоскость эклиптики наклонена к плоскости земного экватора. Поэтому были введены средние солнечные сутки, равные 24 часам на протяжении всего года.

Средними солнечными сутками называется промежуток времени между двумя последовательными верхними кульминациями среднего Солнца.

Средние солнечные сутки отличаются от истинных на величину, называемую уравнением времени: h = $t_{ср} - t_{ист}$. Максимальное значение уравнения времени равно 16,5 мин.

В *медицине* номограммы используют для определения площади





поверхности тела. [7] Значение площади поверхности тела находят в точке пересечения прямой, соединяющей показатели роста (на шкале I) и веса (на шкале III), со шкалой II (Рис.23.).

Рисунок 23. Рисунок 24.

Номограмма для определения дыхательного объема (Рис.24.). Значение дыхательного объема находят в точке пересечения прямой, соединяющей показатели веса (на шкале I) и частоты дыхания (на шкале III), со шкалой II. При нормальной физической активности определенное по номограмме значение дыхательного объема увеличивают на 10%, при лихорадке — на 5% на каждые 0,5°С повышения ректальной температуры более 37,2°С, при увеличении высоты над уровнем моря — на 5% на каждые 600 м, при трахеотомии или интубации трахеи из полученного значения вычитают величину, равную дыхательному объему, определенному для вдвое сниженного веса тела.

Интересный факт необычного применения номограммы в *литературе.* Акростих - номограмма — это стихотворение, в котором начальные буквы каждой строки, читаемые сверху вниз, образуют имя. Такие акростихи обычно являются посвящениями:

Маятник слова качай-ка поэт,
Альфу возьми и Омегу...
Я - ветерок, придыхание, свет,
Крошево наста и снега.
Олово плавкое вылили в лес,
*В*ызрели в поле туманы.
Сколько в душе моей было небес
Кровушкой вышло из раны.
Облаком в зеркале озера я,
Музыкой маршей военных,
Узник метро "Маяковская" - *Я*.

(Октавий Тантал «Маяковскому»)

Мы видим, что номограмма используются в разных областях деятельности людей.

Заключение

Выполнив исследования, открыл для себя новый раздел математики. Раньше я даже не предполагал, что расчет мощности и давления пожарных кранов, газовых горелок, определение физической работоспособности, конструктивных параметров пресс-форм литья под давление, для расчета температур воздуха в помещении и поверхности лучистого нагревателя и т.д. – это лишь небольшая часть примеров, где без применения номограмм не обойтись.

На основе изученной литературы по данной теме, открыла для себя много интересного и нового об уравнениях, чего не мог прочитать в учебнике.

Разработка и составление номограмм целое искусство: надо не только удачно планировать маршрут по данным координатам, но и выбрать правильный масштаб, чтобы охватить нужный диапазон данных, а это непросто и требует особого навыка.

Рассмотренные номограммы позволяют решать различные задачи алгебры, геометрии, физики, химии. Проделав ряд вычислений с помощью начерченных номограмм, затем то же самое сделав с помощью соответствующих формул, мы видим большой выигрыш во времени и то, что решение становится заметно легче по сравнению со стандартными методами.

Таким образом, номограммы действительно позволяют существенно экономить время и силы.

Я уверен, что эти полученные знания пригодятся мне в дальнейшей учебе или моя будущая специальность будет связана с математическими расчетами, где обязательно найдут применение номограммы.

Список использованной литературы

1. Александровский А.М. Математика в терминах. [Текст]: учеб. пособие / А. М. Александровский. - М.: Просвещение, 2003. – 504 с.
2. Брадис В.М. Четырехзначные таблицы для средней школы. [Текст]: учеб. пособие / В.М. Брадис. - М.: Просвещение, 1990. – 83 с.
3. Глаголев Н.А. Курс номографии [Текст]: учеб. пособие / Н.А. Глаголев. - М.: Высшая школа, 1961. - 270 с.
4. Климова И. «Номограммы из выравненных точек». [Текст]: учеб. пособие / И. Климова. Научно-популярный журнал «Квант», №9, 1978. – 30 с.
5. Пентаковский М.В. Считающие чертежи. [Текст]/ под ред. М.В. Пентаковский. - М: Физматгиз, 1959.- 151 с.

Интернет-ресурсы:

6. http://wiki-org.ru

7. http://dict.sernam.ru

Приложение

Четырехзначные таблицы для средней школы Брадис В.М.(стр.82-83) (Рис.25. 26.). [2]

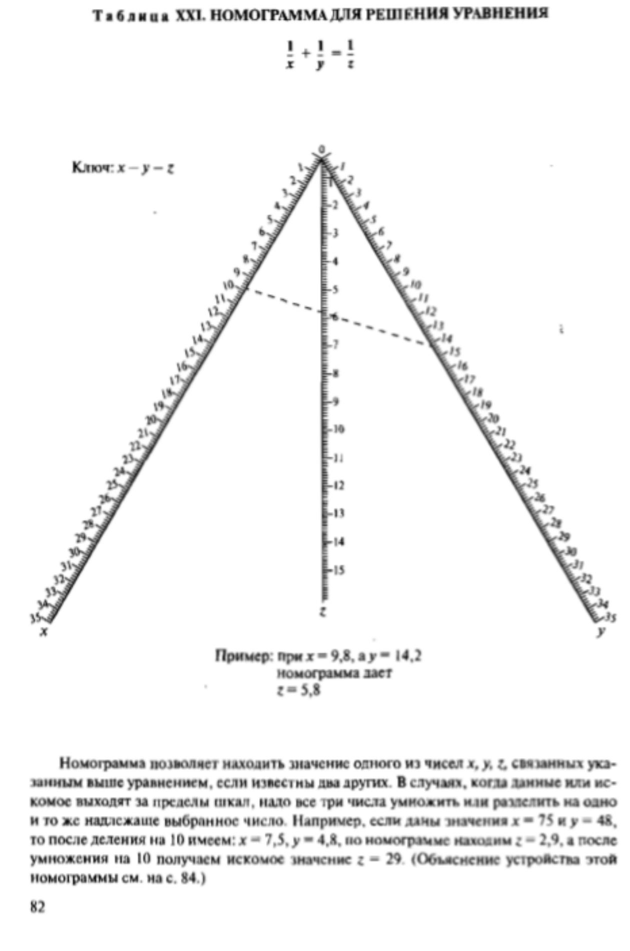


Таблица XXI. НОМОГРАММА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

Ключ: $x - y - z$

Пример: при $x = 9{,}8$, а $y = 14{,}2$
номограмма дает
$z = 5{,}8$

Номограмма позволяет находить значение одного из чисел x, y, z, связанных указанным выше уравнением, если известны два других. В случаях, когда данные или искомое выходят за пределы шкал, надо все три числа умножить или разделить на одно и то же надлежаще выбранное число. Например, если даны значения $x = 75$ и $y = 48$, то после деления на 10 имеем: $x = 7{,}5$, $y = 4{,}8$, по номограмме находим $z = 2{,}9$, а после умножения на 10 получаем искомое значение $z = 29$. (Объяснение устройства этой номограммы см. на с. 84.)

82

Рисунок 25.

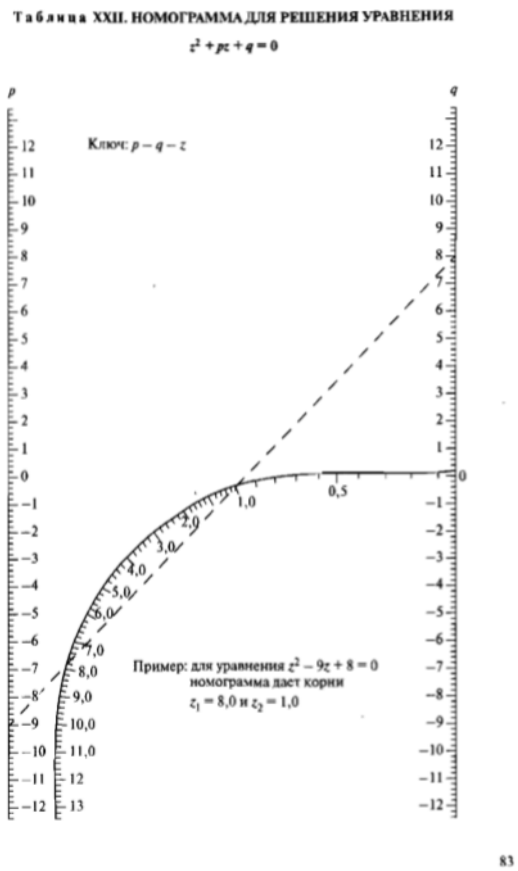


Таблица XXII. НОМОГРАММА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ

$$z^2 + pz + q = 0$$

Ключ: $p - q - z$

Пример: для уравнения $z^2 - 9z + 8 = 0$
номограмма дает корни
$z_1 = 8{,}0$ и $z_2 = 1{,}0$

83

Рисунок 26.