3. Примеры решения алгебраических выражений

Рассмотрим несколько видов алгебраических выражений, на которые следует обратить внимание.

Пример 1.

Сократите дробь: $\frac{5^{n-1}+5^{n+2}}{6\cdot5^{n}}$

$$\frac{5^{n-1}+5^{n+2}}{6\cdot5^{n}}=\frac{5^{n}\cdot5^{-1}+5^{n}\cdot5^{2}}{6\cdot5^{n}}=\frac{5^{n}\cdot(5^{-1}+5^{2})}{6\cdot5^{n}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{5}+25}{6}=\frac{25{,}2}{6}=4{,}2$$

Ответ: 4,2

Баллы	Критерии оценивания выполнения заданий
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена ошибка вычислительного характера или описка, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	Максимальный балл

Преобразование выражений

Сократите дробь: $\frac{2^{6n+8}\cdot7^{3n+6}}{28^{3n+5}}$

$$\frac{2^{6n+8}\cdot7^{3n+6}}{28^{3n+5}}=\frac{2^{6n+8}\cdot7^{3n+6}}{(2^{2}\cdot7)^{3n+5}}=\frac{2^{6n+8}\cdot7^{3n+6}}{(2^{2})^{3n+5}\cdot7^{3n+5}}=$$

$$=\frac{2^{6n+8}\cdot7^{3n+6}}{2^{6n+10}\cdot7^{3n+5}}=2^{6n+8-(6n+10)}\times7^{3n+6-(3n+5)}=$$

$$=2^{-2}\times7^{1}=\frac{7}{4}=1{,}75$$

Ответ: 1,75

1) Сократите дробь: $\frac{45^{n+4}}{3^{2n+7}\cdot5^{n+3}}$ *Ответ:* 15

2) Сократите дробь: $\frac{36^{n+2}}{9^{n+1}\cdot2^{2n-3}}$ *Ответ:* 1152

3) Сократите дробь: $\frac{(2y)^{4}\cdot y^{-12}}{y^{-10}\cdot5y^{2}}$ *Ответ:* 3,2

Пример 2. Найдите значение выражения при данном условии: $28a-7b+13$, если $\frac{2a-5b+8}{5a-2b+8}=6$

$$\frac{2a-5b+8}{5a-2b+8}=\frac{6}{1}$$
$2a-5b+8=6(5a-2b+8)$
$2a-5b+8=30a-12b+48$
$2a-5b+8-30a+12b-48=0$
$-28a+7b-40=0$
$-28a+7b=40$
$28a-7b=-40$
$28a-7b+13=-40+13=-27$ *Ответ:* -27

Пример 3.
Сократите дробь: $\dfrac{p(a)}{p\left(\frac{1}{a}\right)}$, если $p(x)=\left(x+\frac{6}{x}\right)\left(6x+\frac{1}{x}\right)$

$$\frac{p(a)}{p\left(\frac{1}{a}\right)}=\frac{\left(a+\frac{6}{a}\right)\left(6a+\frac{1}{a}\right)}{\left(\frac{1}{a}+\frac{6}{1/a}\right)\left(6\frac{1}{a}+\frac{1}{1/a}\right)}=\frac{\left(a+\frac{6}{a}\right)\left(6a+\frac{1}{a}\right)}{\left(\frac{1}{a}+6a\right)\left(\frac{6}{a}+a\right)}=1$$

Ответ: 1

Как тренажёром можно воспользоваться подборкой заданий на сайте https://math100.ru/, алгебраические выражения

4.Примеры решения уравнений

В этом задании могут попасться как легкое линейное уравнение, так и сложное выражение со степенями. Это лотерея, впрочем, как и в остальных заданиях. Но главное здесь твердо оперировать над всеми типами уравнений и уметь упрощать сложные математические выражения.

При разборе решения уравнений 2 части экзаменационной работы необходимо повторить правила, формулы и алгоритмы их решения.

Рассмотрим несколько видов уравнений, на которые следует обратить внимание.

4.1. *Уравнения, решаемые методом введения новой переменной*

4.1.1. Решите уравнение: $x^4=(4x-5)^2$.

I способ.

Решение. $x^4=(4x-5)^2$.
Перенесем все слагаемые в левую часть и разложим на множители, используя формулу разности квадратов:

$x^4-(4x-5)^2=0;$

$(x^2 - (4x - 5))(x^2 + (4x - 5)) = 0$; $(x^2 - 4x$

$+ 5)(x^2 + 4x - 5) = 0$.

Произведение двух множителей равно нулю, если один из множителей равен нулю. Получаем $x^2 - 4x + 5 = 0$ или $x^2 + 4x - 5 = 0$.

Важно! Употребляется в записи союз «или», а не союз «и». Либо используется запись $x^2 - 4x + 5 = 0$; $x^2 + 4x - 5 = 0$.

$x^2 - 4x + 5 = 0$, $D = b^2 - 4ac = 16 - 20 = -4$, $D < 0$, уравнение не имеет корней.

$x^2 + 4x - 5 = 0$, $D = b^2 - 4ac = 16 + 20 = 36$, $D > 0$, уравнение имеет два корня.

Не допустима запись $D = 16 + 20 = 36 = \sqrt{36} = 6$. За такую запись в решении уравнения при полученных верных ответах выставляется 0 баллов.

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-4-6}{2} = -5;$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-4+6}{2} = 1.$$

Ответ: -5; 1.

Важно! В записи ответа используется «-5; 1», не «-5, 1», чтобы не воспринималась десятичная дробь.

II способ.

Решение.

$x^4 = (4x - 5)^2$.

$x^2 = 4x - 5$; $^2 = -4x + 5$.

1) $x^2 = 4x - 5$,
   $x^2 - 4x + 4 = -1$,
   $(x - 2)^2 = -1$, уравнение не имеет корней, так как $(x - 2)^2 \geq 0$ при любых x.

2) $x^2 = -4x + 5$;
$x^2 + 4x + 4 = 9$;
$(x + 2)^2 = 9$;
$x + 2 = 3$;
$x + 2 = -3$;
$x = 1$; $x = -5$.

Ответ: 1; -5.

4.1.2. Решите уравнение: $(x-2)^4-6(x-2)^2-7=0$.

I способ.

Решение.

Пусть $(x-2)^2=t$, $t\geq 0$.

Важно! Знак неравенства в данном случае обязательно должен быть нестрогим. Очень часто учащиеся допускают грубую ошибку и теряют полностью баллы за данное задание, указывая $t>0$.

Тогда уравнение принимает вид:

$t^2-6t-7=0$,

D = $b^2 - 4ac = 36 + 28 = 64$, D > 0, уравнение имеет два корня.

$t_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{6-8}{2} = -1$;

$t_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{6+8}{2} = 7$.

$t=-1$ не удовлетворяет условию $t\geq 0$,

$t=7$; $(x-2)^2=7$;

1) $x-2=\sqrt{7}$;
$x = 2+\sqrt{7}$.

2) $x-2=-\sqrt{7}$
$x = 2-\sqrt{7}$.) ;

Ответ: $2-\sqrt{7}$; $2+\sqrt{7}$.

II способ.

Решение.

$(x-2)^4-6(x-2)^2-7=0$;

$(x-2)^4-6(x-2)^2+9-16=0$;

$((x-2)^2-3)^2-16=0$;

$((x-2)-3-4)((x-2)^2-3+4)=0$, откуда $(x-2)^2$

$-7=0$ или $(x-2)^2+1=0$.

1) Уравнение $(x-2)^2=-1$ не имеет корней. так как $(x-2)^2\geq 0$ при любых x.

2) Уравнение $(x-2)^2 = 7$; $x-2=\sqrt{7}$ или $x-2=-\sqrt{7}$.

$x = 2+\sqrt{7}$ или $x = 2-\sqrt{7}$.

Ответ: $2-\sqrt{7}$; $2+\sqrt{7}$.

3 способ

Решение.

$(x-2)^4 - 6(x-2)^2 - 7 = 0$; $((x-$

$2)^2-3)^2 = 4^2$.

$(x-2)^2 - 3 = 4$; $(x-2)^2 - 3 = -4$.

1) $(x-2)^2 = 7$

$x-2=\sqrt{7}$; $x-2=-\sqrt{7}$

$x = 2+\sqrt{7}$; $x = 2-\sqrt{7}$. ;

2) $(x-2)^2 - 3 = -4$;

$(x-2)^2 = -1$ уравнение не имеет корней, так как $(x-2)^2 \geq 0$ при любых x.

Ответ: $\{2-\sqrt{7};\ 2+\sqrt{7}\}$.

4.2. *Уравнения, содержащие квадратные корни*

4.2.1. Решить уравнение: $x^2 - 13x + \sqrt{7-x} = \sqrt{7-x} - 40$.

Важно понимать учащимся, что квадратные корни после преобразований хоть и исчезнут, но в условии они есть. И из определения квадратного корня следует, что подкоренное выражение не может быть отрицательным числом.

Учащиеся часто забывают указать ОДЗ. Но в конце решения все же могут исключить один из получившихся корней, не прописывая при этом условие исключения.

I способ.

Решение.

$x^2 - 13x + \sqrt{7-x} = \sqrt{7-x} - 40$.

ОДЗ (область допустимых значений x)

$7 - x \geq 0$; $x \leq 7$.

$x^2 - 13x + \sqrt{7-x} - \sqrt{7-x} + 40 = 0$

$x^2 - 13x + 40 = 0$.

Откуда $x = 5$ или $x = 8$ – не удовлетворяет ОДЗ.

Ответ. 5.

II способ.

Решение.

$x^2 - 13x + \sqrt{7-x} = \sqrt{7-x} - 40$;

$x^2 - 13x + \sqrt{7-x} - \sqrt{7-x} + 40 = 0$

$x^2 - 13x + 40 = 0$ при условии $7 - x \geq 0$, т.е. $x \leq 7$.

D = $(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40 = 169 - 160 = 9$;

$x_1 = \frac{13-\sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{13-3}{2} = 5$;

$x_2 = \frac{13+\sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{13+3}{2} = 8$ – посторонний корень,

т.к. $x \leq 7$.

Ответ: 5.

III способ.

Решение.

$x^2 - 13x + \sqrt{7-x} = \sqrt{7-x} - 40$;

$x^2 - 13x + \sqrt{7-x} - \sqrt{7-x} + 40 = 0$

$\begin{cases} 7 - x \geq 0; \\ x^2 - 13x + 40 = 0. \end{cases}$;

D = $(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40 = 169 - 160 = 9$.

$x_1 = 5$;

$x_2 = 8$ – не удовлетворяет условию $7 - x \geq 0$.

Ответ: 5.

4.3. *Дробно-рациональные уравнения*

4.3.1. Решить уравнение: $\frac{1}{(x-3)^2} - \frac{1}{x-3} - 6 = 0$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения:

$\frac{1-(x-3)-6(x-3)^2}{(x-3)^2} = 0$;

$\frac{-6x^2+35x-50}{(x-3)^2} = 0.$

$\begin{cases} x-3 \neq 0, \\ 6x^2 - 35x + 50 = 0 \end{cases}$

D = $(-35)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 50 = 1225 - 1200 = 25$.

$x_1 = \frac{35-\sqrt{25}}{6 \cdot 2} = \frac{35-5}{12} = 2{,}5;$

$x_2 = \frac{35+\sqrt{25}}{6 \cdot 2} = \frac{35+5}{12} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}.$

Оба полученные корня удовлетворяют условию $x - 3 \neq 0$.

Ответ. $2{,}5;\ 3\frac{1}{3}.$

Важно! В данных уравнениях можно выполнять проверку после нахождения корней. В ходе проверки допускается исключение посторонних корней.

II способ.

Решение.

ОДЗ (область допустимых значений x):
$x - 3 \neq 0$, т.е. $x \neq 3$.
Пусть $\frac{1}{x-3} = t$, тогда уравнение принимает вид:
$t^2 - t - 6 = 0$. Откуда $t = -2$ или $t = 3$.
Вернемся к переменной x:

1) $\frac{1}{x-3} = -2;$	2) $\frac{1}{x-3} = 3;$
$\frac{1}{x-3} + 2 = 0;$	$\frac{1}{x-3} - 3 = 0$
$\frac{1+2(x-3)}{x-3} = 0.$	$\frac{1-3(x-3)}{x-3} = 0.$
Учитывая, что $x - 3 \neq 0$	Учитывая, что $x - 3 \neq 0$
$1 + 2x - 6 = 0;$	$1 - 3x + 9 = 0;$
$2x - 5 = 0;$	$-3x + 10 = 0;$
$2x = 5;$	$-3x = -10;$
$x = 2{,}5;$	$x = 3\frac{1}{3}.$

Оба корня удовлетворяют ОДЗ.

Ответ. $2{,}5;\ 3\frac{1}{3}$.

III способ.

Решение.

Пусть $x - 3 = t$. Тогда уравнение принимает вид:

$\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} - 6 = 0$;

$\frac{1-t-6t^2}{t^2} = 0$; ОДЗ: $t \neq 0$

$6t^2 + t - 1 = 0$

$D = 1^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1) = 1 + 24 = 25$

$t_1 = \frac{-1-5}{12} = -\frac{1}{2}$;

$t_2 = \frac{-1+5}{12} = \frac{1}{3}$.

Так как $x - 3 = t$, то

1) $x - 3 = -\frac{1}{2}$; $x = 2{,}5$;

2) $x - 3 = \frac{1}{3}$; $x = 3\frac{1}{3}$.

Ответ. $2{,}5;\ 3\frac{1}{3}$.

5.Примеры решения систем уравнений.

Об особенностях оформления решения систем уравнения

На ОГЭ при решении систем уравнений чаще всего используют два основных способа – способ подстановки и способ сложения.

5.1.*Способ сложения.*

Для способа сложения существует два варианта оформления:

- описательный,
- с помощью равносильных переходов.

При любом варианте, какой бы не выбрал выпускник, это должно быть сделано грамотно.

5.1.1.Пример решения описательного способа

Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + 3x + y^2 = 2, \\ x^2 + 3x - y^2 = -6. \end{cases}$

Решение. Используем сложение уравнений данной системы:

$$2x^2 + 6x = -4 \quad x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$x^1 = \frac{-3+1}{2} = -1; \quad x_2 = \frac{-3-1}{2} = -2.$$

Вычтем из первого уравнения второе, получим:

$2y^2 = 8$

$y^2 = 4$; $y = \pm 2$.

Получим четыре решения системы.

Ответ: (-1; -2), (-1; 2), (-2; -2), (-2; 2).

Важно! Ответ оформлять необходимо именно записью в круглых скобках через точку с запятой, перечисляя через запятую решения системы.

5.1.2.Пример решения методом сложения через равносильные переходы

Решите систему уравнений $\begin{cases} (2x + 3)^2 = 5y, \\ (3x + 2)^2 = 5y. \end{cases}$

Решение. Вычтем из первого уравнения второе, используем формулу разности квадратов, затем метод подстановки:

$$\begin{cases} (2x+3)^2 = 5y, \\ (3x+2)^2 = 5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+3)^2 - (3x+2)^2 = 0, \\ (3x+2)^2 = 5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+3+3x+2)(2x+3-3x-2) = 0, \\ (3x+2)^2 = 5y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (5x+5)(1-x) = 0, \\ (3x+2)^2 = 5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 1, \end{array} \right. \\ 5y = (3x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -1, \\ 5y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ 5y = 25. \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -1, \\ y = \frac{1}{5}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ y = 5. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: (-1; 0,2), (1; 5).

Для ученика 9 класса может оказаться непосильным довести грамотно до конца всю эту конструкцию, поэтому допустимо на каком-то этапе вынести одно из уравнений системы и только потом продолжить решение описательно.

5.2.*Способ подстановки.*

Для способа подстановки существует два варианта оформления:

- описательный,

– с помощью равносильных переходов.

5.2.1.Пример решения описательного способа

Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y = -5, \\ x^2 - 2xy - y^2 = 17. \end{cases}$

Решение. Выразим переменную y из первого уравнения данной системы: $y = x + 5$.

Подставим во второе уравнение системы, получим: x^2 - $2x(x + 5) - (x + 5)^2 = 17$

$x^2 - 2x^2 - 10x - x^2 - 10x - 25 - 17 = 0$

$-2x^2 - 20x - 42 = 0$

$x^2 + 10x + 21 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 100 - 84 = 16 = 4^2$, $D > 0$, уравнение имеет 2 корня,

$x^{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, $x_1 = \frac{-10+4}{2} = -3$; $x_2 = \frac{-10-4}{2} = -7$.

При $x = -3$, $y = -3 + 5 = 2$.
При $x = -7$, $y = -7 + 5 = -2$.

Ответ: (-3; 2), (-7; -2).

5.2.2.Пример решения методом сложения через равносильные переходы

Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x^2 - 2x = y, \\ 3x - 2 = y. \end{cases}$

Решение. Последовательно получаем:

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x = y, \\ 3x - 2 = y. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2x = 3x - 2, \\ 3x - 2 = y. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 5x + 2 = 0, \\ y = 3x - 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = \frac{2}{3}, \\ y = 0. \end{cases}$$

Ответ: (2/3; 0), (1;1).

Важно! В данном решении ученику необходимо прописать решение квадратного уравнения (в данном случае решение способом подстановки довести до системы, где *появляется квадратное уравнение. Уравнение вынести отдельно, решить с помощью дискриминанта, найти х и соответствующий ему у).*

6. Примеры решений неравенств.

Все неравенства из задачи 20 могут быть разбиты на две группы:

- квадратичные неравенства,
- неравенства, которые решаются методом интервалов.

6.1. Квадратичное неравенство (метод параболы)

Важно! Необходимо описать данную функцию, указать, что графиком является парабола. Прописать направление ветвей. Найти нули функции. Схематично изобразить параболу, расставить знаки и записать ответ.

6.1.1. Решить неравенство: $\frac{x^2}{3} < \frac{3x+3}{4}$

Решение. Решим неравенство, используя метод параболы, для этого сначала преобразуем неравенство.

$$\frac{x^2}{3} - \frac{3x+3}{4} < 0 \mid * 12>0;$$

$$4x^2 - 9x - 9 < 0.$$

Рассмотрим функцию $y = 4x^2 - 9x - 9$. Это квадратичная функция, график – парабола, ветви направлены вверх.

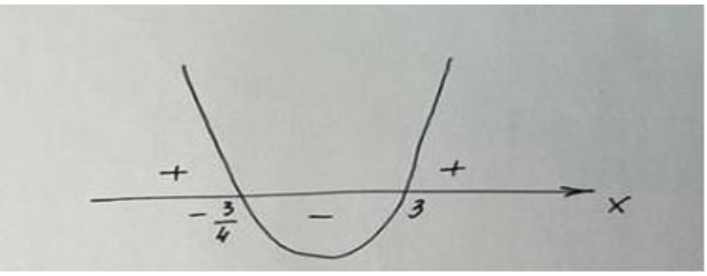
Найдем нули функции: $4x^2 - 9x - 9 = 0$.

$$D = b^2 - 4ac,$$

$D = 9^2 - 4*4*(-9) = 225 = 15^2$, $D > 0$, уравнение имеет 2 корня,

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},\ x_1 = \frac{9+15}{8} = 3; \quad x_2 = \frac{9-15}{8} = -\frac{3}{4}.$$

Изобразим схематично параболу:



$y < 0$ при $x \in (-\frac{3}{4}; 3)$.

Ответ. $(-\frac{3}{4}; 3)$.

6.1.2. Решить неравенство: $\frac{-18}{(x+4)^2-10} \geq 0$

Решение: Так как дробь больше 0, а -18 < 0, то знаменатель дроби должен быть строго меньше 0, то есть получается неравенство

$(x+4)^2 - 10 < 0$

$x^2 + 8x + 16 - 10 < 0$

$x^2 + 8x + 6 < 0$

Решим неравенство методом параболы

$f(x) = x^2 + 8x + 6$ – квадратичная функция, график – парабола, а = 1 > 0 => ветви направлены вверх.

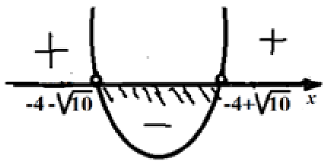
Найдем нули функции, т.е. корни уравнения:

$x^2 + 8x + 6 = 0$,

$D = 64 - 24 = 40 > 0$, 2 корня

$x_1 = -4 + \sqrt{10}$

$x_2 = -4 - \sqrt{10}$



Ответ: x € $(-4 - \sqrt{10}; -4 + \sqrt{10})$

6.2. Метод интервалов в решении неравенств

Важно! В работе необходимо указать, что неравенство решается методом интервалов (написать фразу «решим методом интервалов»). Затем найти корни по всем правилам нахождения корней уравнения (приравнять каждый множитель к нулю), определить знаки выражения на каждом промежутке, нарисовать ось, расставить знаки.

6.2.1. Решить неравенство: $(\sqrt{19} - 4{,}5)(5 - 3x) > 0$

Важно! Необходимо прописать правило преобразования, указать, что деление происходит на положительное (отрицательное) число. Прописать действия определения знака разности.

Решение: Определим знак разности $\sqrt{19} - 4{,}5$

Так как $4{,}5 = \sqrt{20{,}25}$, то $\sqrt{19} < \sqrt{20.25} \Rightarrow \sqrt{19} - \sqrt{20{,}25} < 0 \Rightarrow \sqrt{19} - 4{,}5 < 0$

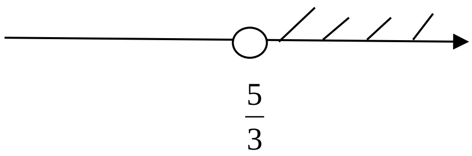
При делении на отрицательное число, знак неравенства меняется на противоположный:

$(\sqrt{19} - 4{,}5)(5 - 3x) > 0 \; / : (\sqrt{19} - 4{,}5) < 0$

$5 - 3x < 0$

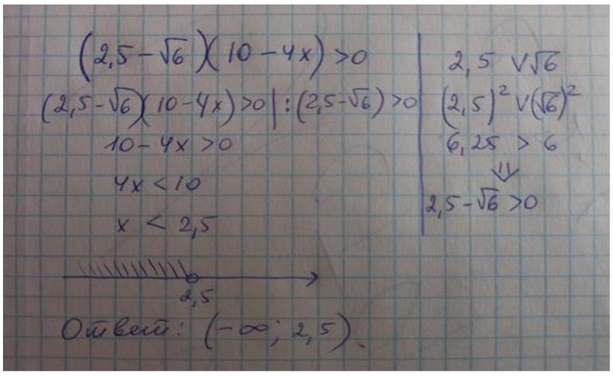
$-3x < -5 \; / : (-3) < 0$

$x > \frac{5}{3}$



Ответ: $\left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$

6.2.2. Решить неравенство: $(2{,}5 - \sqrt{6})(10 - 4x) > 0$



$(2{,}5-\sqrt{6})(10-4x)>0$

$(2{,}5-\sqrt{6})(10-4x)>0 \; \Big| : (2{,}5-\sqrt{6})>0$

$10-4x>0$

$4x<10$

$x<2{,}5$

2,5

Ответ: $(-\infty; 2{,}5)$.

$2{,}5 \vee \sqrt{6}$

$(2{,}5)^2 \vee (\sqrt{6})^2$

$6{,}25 > 6$

$\Downarrow$

$2{,}5-\sqrt{6}>0$

6.2.3. Решить неравенство: $(x - 8) < \sqrt{3}\,(x - 8)$

Решение: Преобразуем неравенство.

$(x - 8) - \sqrt{3}(x - 8) < 0$

$(x - 8)(x - 8 - \sqrt{3}) < 0.$

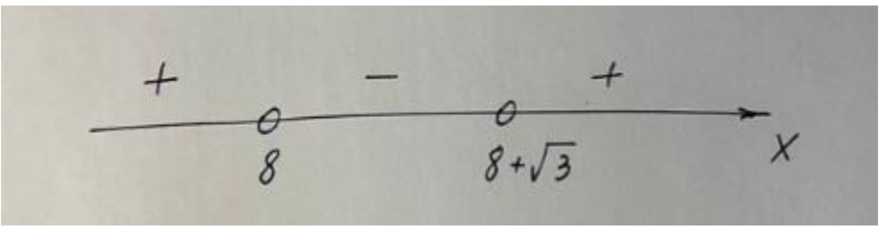
Решим **методом интервалов**, для этого найдем корни уравнения:

$(x - 8)(x - 8 - \sqrt{3}) = 0,$

$x - 8 = 0$ или $x - 8 - \sqrt{3} = 0,$

$x_1 = 8$ $\qquad x_2 = 8 + \sqrt{3}.$

Определим знаки выражения на каждом промежутке:

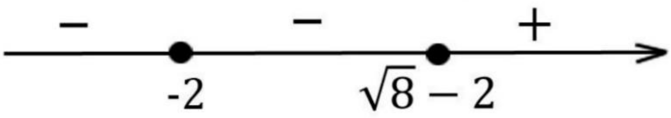


Получим, что $x \in (8; 8 + \sqrt{3})$.

Ответ: $(8; 8 + \sqrt{3})$.

6.2.4. Решить неравенство: $(2 + x)^3 \geq \sqrt{8}\,(2 + x)^2$

Решить неравенство
$$(2+x)^3 \geq \sqrt{8}(2+x)^2.$$
Решение.
Переносим все в левую часть и выносим за скобку $(2+x)^2$, получаем
$$(2+x)^2(2+x-\sqrt{8}) \geq 0.$$
Решаем методом интервалов. Приравниваем обе скобки к нулю, получаем $x=-2$ и $x=\sqrt{8}-2$. Отмечаем корни на прямой и расставляем знаки, подставляя по числу из каждого промежутка в левую часть неравенства.



Получаем $x=-2$ и $x \geq \sqrt{8}-2$.

Ответ: $x \in \{-2\} \cup [\sqrt{8}+2; +\infty)$.

6.2.5. Решить неравенство: $\frac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1} \leq 0$

Решение. Данное неравенство является дробным.

Разложим на множители числитель и знаменатель левой части неравенства.

$\frac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1} \leq 0$;

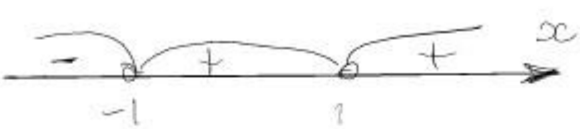
$\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{(x^2-1)^2} \leq 0$;

$\frac{(x-1)(x^2-1)}{(x-1)^2(x+1)^2} \leq 0$;

$\frac{(x-1)(x-1)(x+1)}{(x-1)^2(x+1)^2} \leq 0$;

$\frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)^2(x+1)^2} \leq 0$.

Далее применим **метод интервалов**. Для этого найдем нули левой части неравенства. Нули числителя и знаменателя совпадают, поэтому точки на числовой прямой будут выколоты.



Ответ: $x \in (-\infty; -1)$.

7. Примеры решение систем неравенств.

Важно! Чтобы решить систему неравенств, нужно: решить отдельно каждое неравенство; сравнить полученные решения каждого неравенства и получить общий ответ системы.

7.1. Решить систему: $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3} \geq x-2 \\ \dfrac{2}{x-1} \geq 4 \end{cases}$

Решение: решаем оба неравенства системы по отдельности.

1) Умножим первое неравенство системы на 3 и решим линейное неравенство. Получим: $2x - 1 \geq 3x - 6$

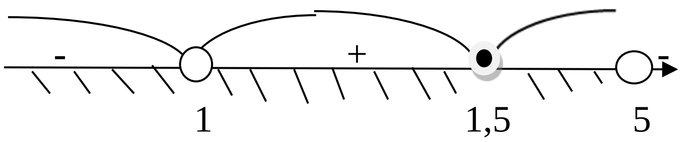
$$-x \geq -5$$

$$x \leq 5$$

2) Перенесем все слагаемые второго неравенства системы в левую часть и приведем к общему знаменателю. Получим: $\dfrac{6-4x}{x-1} \geq 0$

Решим методом интервалов. Найдем нули числителя и знаменателя: $x = 1{,}5$ и $x = 1$. Знаменатель не равен 0, поэтому точка $x=1$ на числовой прямой будет выколота.

3) Определим знаки выражения на каждом промежутке.



Ответ: x € (1;1,5)

7.2. Решить систему неравенств: $\begin{cases} x^2 - 6x - 16 \geq 0 \\ \dfrac{1+2x}{4} < x - 1 \end{cases}$

Решение: решаем оба неравенства системы по отдельности.

1) решаем первое неравенство, используя **метод параболы**.

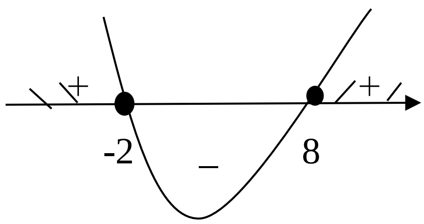
$y=x^2 - 6x - 10$ – квадратичная функция, график – парабола, $a = 1>0$, ветви вверх.

Найдем нули функции: $x^2 - 6x - 16 =0$

$D = (-6)^2 - 4\times1\times(-16) = 36 + 64 = 100 > 0$, уравнение имеет 2 корня

$x_1 = -2$, $x_2 = 8$

Изобразим схематично параболу:



2) Умножим второе неравенство на 4 и перенесем все слагаемые в одну часть:

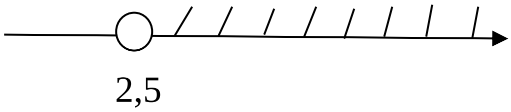
$1 + 2x < 4x - 4$

$2x - 4x < -4 - 1$

$2x > 5$

$x > 2{,}5$

Изобразим на координатной прямой:



3) Пересекая множество решений первого и второго неравенства, получаем, что x € $[8, +\infty)$.

Ответ: $[8, +\infty)$