Ход урока

1. Организационный момент

2. Повторение и актуализация опорных знаний

Обобщенный метод интервалов.

1. Применимость метода интервалов не ограничивается решением рациональных неравенств.
2. Применяя метод интервалов к решению иррациональных, трансцендентных, комбинированных неравенств, говорим об обобщенном методе интервалов.

Алгоритм обобщенного метода интервалов:

1) Привести неравенство к виду $f(x) \vee 0$. Рассмотреть функцию $f(x)$.
2) Найти область определения функции $f(x)$.
3) Найти нули функции $f(x)$, решив уравнение $f(x) = 0$
4) Изобразить на числовой прямой область определения и нули функции.
5) Определить знаки функции на промежутках, входящих в область определения функции.
6) Записать ответ, включив в него промежутки в соответствии со знаком неравенства (не забыть включить в ответ изолированные точки).

3. Решение неравенств методом интервалов

Каждое задание решает группа учащихся. Затем один из группы записывает решение на доске и поясняет его.

1). Решить неравенство $\sqrt{x^2-1}(4-x)\log_3(3+x) > 0$

Используем метод интервалов для решения данного неравенства

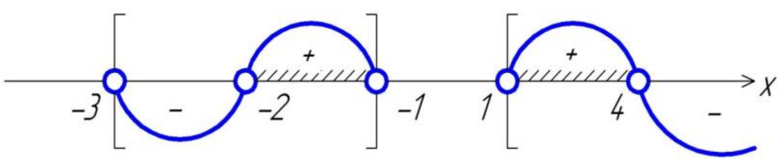
1. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x^2-1}(4-x)\log_3(3+x)$
2. Найдем область определения функции $D(f): \begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ 3+x > 0 \end{cases}$

   $D(f) = (-3;-1] \cup [1;+\infty)$

3. Найдем нули функции: $f(x) = 0$ $\left[\begin{array}{l} x^2-1=0 \\ 4-x=0 \\ 3+x=1 \end{array}\right.$

   $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 4,\ x_4 = -2$

4. Определим знаки функции на каждом из промежутков $(-3;-2), (-2;-1), (1;4), (4;+\infty)$



$f(-2{,}5) < 0,\ f(-1{,}5) > 0,\ f(2) > 0,\ f(5) < 0$

Следовательно, множеством решений исходного неравенства является объединение промежутков $(-2;-1)\cup(1;4)$

Ответ: $x\in(-2;-1)\cup(1;4)$

2). Решить неравенство $\dfrac{(|x+3|-1)(4-2^{2x-1})(x^2+\sqrt[3]{x})}{\log_2(-x+x^2+1)}<0$

Используем метод интервалов для решения данного неравенства

1. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{(|x+3|-1)(4-2^{2x-1})(x^2+\sqrt[3]{x})}{\log_2(-x+x^2+1)}$

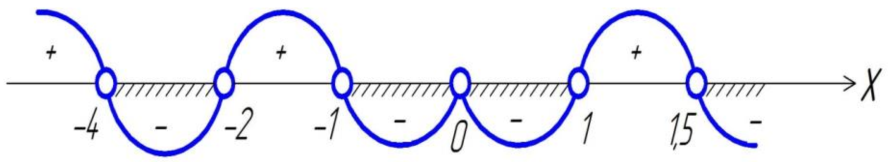
2. Найдем область определения функции $D(f):\begin{cases}1-x+x^2>0\\ \log_2(1-x+x^2)\neq 0\end{cases}$

   $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$

3. Найдем нули функции: $f(x)=0$ $\left[\begin{array}{l}|x+3|=1\\ 2^{2x-1}=4\\ x^2+\sqrt[3]{x}=0\end{array}\right.$,

   $x_1=-4,\ x_2=-2\ x_3=1{,}5,\ x_4=0,\ x_5=-1$

4. Определим знаки функции на каждом из промежутков $(-\infty;-4),(-4;-2),(-2;-1),(-1;0),(0;1),(1;1{,}5),(1{,}5;+\infty)$



$f(-5)>0,\ f(-3)<0,\ f(-1{,}5)>0,\ f(-0{,}5)<0,\ f(0{,}5)<0,\ f(1{,}25)>0,\ f(2)<0$

Следовательно, множеством решений исходного неравенства является объединение промежутков $(-4;-2)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(1{,}5;+\infty)$

Ответ: $x\in(-4;-2)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(1{,}5;+\infty)$

3). Решить неравенство $\dfrac{tg\dfrac{x}{2}\cdot\sin\pi x}{\sqrt{2\pi^2-\pi x-x^2}}\geq 0$

Воспользуемся методом интервалов:

1. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{tg\dfrac{x}{2}\cdot\sin\pi x}{\sqrt{2\pi^2-\pi x-x^2}}$

2. Найдем область определения функции $D(f):\begin{cases}2\pi^2-\pi x-x^2>0\\ \cos\dfrac{x}{2}\neq 0\end{cases}$

$$\begin{cases} x \in (-2\pi; \pi) \\ x \neq \pi + 2\pi n, n \in Z \end{cases}$$

$$D(f) = (-2\pi; -\pi) \cup (-\pi; \pi)$$

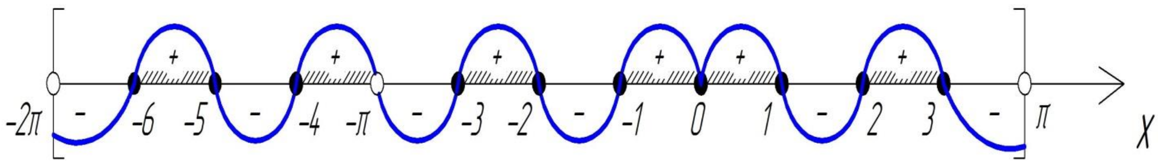
3. Найдем нули функции: $f(x) = 0$ $\left[\begin{array}{l} tg\dfrac{x}{2} = 0 \\ \sin \pi x = 0 \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} x = 2\pi n, n \in Z \\ \pi x = \pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

На промежутке $(-2\pi; -\pi) \cup (-\pi; \pi)$ лежат числа:

$$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3;\} \end{array}\right.$$

4. Определим знаки функции на каждом из промежутков $(-2\pi; -6], [-6; -5], [-5; -4], [-4; -\pi), (\pi; -3], [-3; -2], [-2; -1], [-1; 0], [0; 1], [1; 2], [2; 3], [3; \pi)$



$f(-6{,}2) < 0,\ f(-5{,}5) > 0,\ f(-4{,}5) < 0,\ f(-3{,}5) > 0,\ f(-3{,}1) < 0,\ f(-2{,}5) > 0,$

$f(-1{,}5) < 0,\ f(-0{,}5) > 0,\ f(0{,}5) > 0,\ f(1{,}5) < 0,\ f(2{,}5) > 0,\ f(3{,}1) < 0$

Множеством решений исходного неравенства является объединение промежутков

$[-6; -5] \cup [-4; -\pi) \cup [-3; -2] \cup [-1; 1] \cup [2; 3]$

Ответ: $x \in [-6; -5] \cup [-4; -\pi) \cup [-3; -2] \cup [-1; 1] \cup [2; 3]$

4). Решить неравенство $\left(1 - \dfrac{x}{2}\right) \cdot \log_{13-3\cdot 2^x} 4 \leq 1$

Используем метод интервалов для решения данного неравенства

1. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right) \cdot \log_{13-3\cdot 2^x} 4 - 1 = \frac{2-x}{2} \cdot \frac{2}{\log_2(13 - 3\cdot 2^x)} = \frac{(2-x) - \log_2(13 - 3\cdot 2^x)}{\log_2(13 - 3\cdot 2^x)}$$

2. Найдем область определения функции $D(f): \begin{cases} 13 - 3\cdot 2^x > 0 \\ 13 - 3\cdot 2^x \neq 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2^x < \dfrac{13}{3} \\ 2^x \neq 4 \end{cases}$$

$$D(f) = (-\infty;2) \cup \left(2;\log_2\frac{13}{3}\right)$$

3. Найдем нули функции: $f(x) = 0$

$$2 - x - \log_2(13 - 3\cdot 2^x) = 0$$

$$\log_2(13 - 3\cdot 2^x) = 2 - x$$

$$\log_2(13 - 3\cdot 2^x) = \log_2 2^{2-x}$$

$$13 - 3\cdot 2^x = 2^{2-x}$$

$$13 - 3\cdot 2^x - 4\cdot\frac{1}{2^x} = 0$$

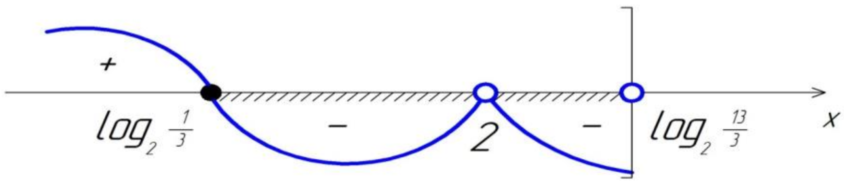
$$\frac{13\cdot 2^x - 3\cdot 2^{2x} - 4}{2^x} = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} 2^x = 4 \\ 2^x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \log_2\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \log_2\frac{1}{3}$$

4. Определим знаки функции на каждом из промежутков $\left(-\infty;\log_2\frac{1}{3}\right],\left[\log_2\frac{1}{3};2\right),\left(2;\log_2\frac{13}{3}\right)$



Множеством решений исходного неравенства является объединение промежутков $\left[\log_2\frac{1}{3};2\right) \cup \left(2;\log_2\frac{13}{3}\right)$

Ответ: $x \in \left[\log_2\frac{1}{3};2\right) \cup \left(2;\log_2\frac{13}{3}\right)$

5). Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{1-x^3}-1}{1+x} \le x$

Используем метод интервалов для решения данного неравенства

$$\frac{\sqrt{1-x^3}-1-x-x^2}{1+x} \le 0$$

$$\frac{\sqrt{(1-x)(1+x+x^2)}-(1+x+x^2)}{1+x} \le 0$$

$$\frac{\sqrt{1+x+x^2}\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x+x^2}\right)}{1+x} \le 0$$

1. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x+x^2}\right)}{1+x}$

2. Найдем область определения функции $D(f): \begin{cases} 1-x > 0 \\ x \ne -1 \end{cases}$

$$D(f) = (-\infty;-1) \cup (-1;1]$$

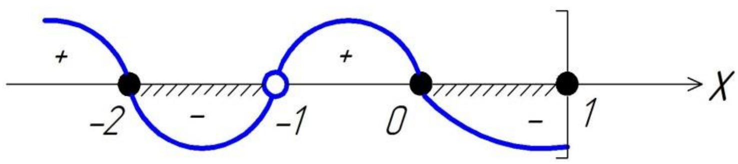
3. Найдем нули функции: $f(x) = 0$ $\quad \sqrt{1-x} = \sqrt{1+x+x^2}$

$1-x = 1+x+x^2$

$2x + x^2 = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = -2$

4. Определим знаки функции на промежутках: $(-\infty;-2],[-2;-1),(-1;0];[0;1]$



$f(-3) > 0,\ f(-1{,}5) < 0,\ f(-0{,}5) > 0,\ f(0{,}5) < 0$

Следовательно, множеством решений исходного неравенства является объединение промежутков $[-2;-1) \cup [0;1]$

Ответ: $x \in [-2;-1) \cup [0;1]$

6). Решить неравенство $\dfrac{4x^2-8x-5}{\sqrt{3x^2-6x}} \le \dfrac{2x+1}{3}$

$$\frac{3\cdot(4x^2-8x-5)-(2x+1)\sqrt{3x^2-6x}}{3\sqrt{3x^2-6x}} \le 0$$

$$\frac{6\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)(2x+1)-(2x+1)\sqrt{3x^2-6x}}{3\sqrt{3x^2-6x}} \le 0$$

$$\frac{(2x+1)\left(6x-15-\sqrt{3x^2-6x}\right)}{3\sqrt{3x^2-6x}} \le 0$$

Используем метод интервалов для решения данного неравенства

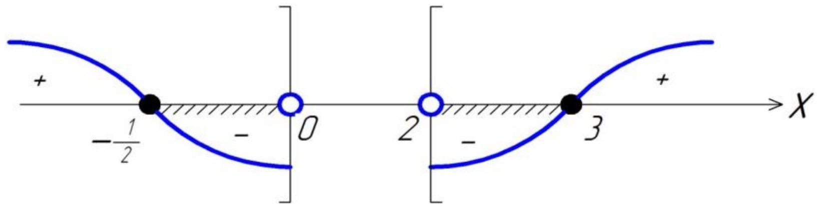
1. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{(2x+1)\left(6x-15-\sqrt{3x^2-6x}\right)}{3\sqrt{3x^2-6x}}$

2. Найдем область определения функции $D(f): 3x^2-6x>0$
   $D(f)=(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$

3. Найдем нули функции: $f(x)=0$ $\left[\begin{array}{l} 2x+1=0 \\ \sqrt{3x^2-6x}=6x-15 \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2} \\ \begin{cases} 6x-15\ge 0 \\ 3x^2-6x=(6x-15)^2 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2} \\ \begin{cases} x\ge \dfrac{5}{2} \\ 33x^2-174x+225=0 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2} \\ x=3 \end{array}\right. \qquad x_1=-\frac{1}{2},\ x_2=3$$

4. Определим знаки функции на промежутках: $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right],\left[-\dfrac{1}{2};0\right),(2;3],[3;+\infty)$



$f(-1)>0,\ f(-\frac{1}{4})<0,\ f(2{,}5)<0,\ f(5)>0$, следовательно, множеством решений исходного неравенства является объединение промежутков $\left[-\dfrac{1}{2};0\right)\cup(2;3]$

Ответ: $x\in\left[-\dfrac{1}{2};0\right)\cup(2;3]$

5. **Подведение итогов. Задание на дом**

Выводы, оценки.

1. Решить неравенства:

а) $\log_x(3x^2-6x+2)\le\log_x\dfrac{1}{x+2}+3$, **б)** $\dfrac{4^x+2x-4}{x-1}\le 2$

в) $\log_{0,5}(1-x^2)\left(2x-\dfrac{1}{x}-1\right)\ge 0$ **г)** $\dfrac{27^x-3^{2x+1}+2\cdot 3^x}{\sqrt{1-x^2}}\ge 0$

2. Дополнительно (на оценку):

а) $\left(ctg\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\sin x\right)\sqrt{4x-x^2+5}\geq 0$ б) $\frac{(x^2-1)(\sqrt{3+x^2}+2x)}{|x-2|-4x+3}\geq 0$

I. Проверочная работа (на следующем уроке)

Решить неравенства:

1. $\log_2 x < 3 - x$
2. $\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{9-x}<\sqrt{3}$
3. $\sqrt[3]{2-x^2}>x^3+x-1$
4. $\sqrt{1-x^2}<\sqrt[3]{5-x}$
5. $\sqrt{6-x}\left(2\cdot 9^{2x}-53\cdot 3^{2x}-27\right)\geq 0$
6. $\frac{\sqrt{x^2-3x-4}-3x+16}{6-x}>1$

Оценка ставится за любые «пять» верно выполненных заданий.

Список использованной литературы

1. Дорофеев Г.В. Обобщение метода интервалов. – Математика в школе, 1969, №3.
2. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: учебник для 10 класса. М.И.Шабунин, А.А.Прокофьев. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2007.
3. Панферов В.С., Сергеев И.Н. ЕГЭ – 2010. Математика. Задача С3, под редакцией А.Л.Семенова и И.В.Ященко. – М.: МЦНМО, 2010.
4. Садовничий Ю.В. ЕГЭ. Практикум по математике: Решение уравнений и неравенств. Преобразование алгебраических выражений. – М.: Издательство «Экзамен», 2012.
5. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2024. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии 2024 года: учебно-методическое пособие / под редакцией Ф.Ф.Лысенко, С.Ю.Кулабухова. — Ростов н/Д: Легион, 2023. — 368 с. — (ЕГЭ).