Определение 1. Два уравнения с одной переменной $f(x) = g(x)$ и $p(x) = q(x)$ называют равносильными, если множества их корней совпадают.

Т.е., два уравнения называют равносильными, если они имеют одинаковые корни (например, $x = 2$ и $x^2 - 2x + 4 = 0$) или если оба уравнения не имеют корней (например, $\sqrt{x+3} = -1$ и $x^2 - 5x + 10 = 0$).

Определение 2. Если каждый корень уравнения $f(x) = g(x)$ является в то же время корнем уравнения $p(x) = q(x)$, то второе уравнения называют следствием первого.

Например, уравнение $(x-2)(x-4) = 0$ является следствием уравнения $x^2 + 2x - 6 = 0$, в то же время уравнение $x - 2 = 0$ не является следствием уравнения $(x+5)(x-2) = x + 5$

Определение 3. Два уравнения равносильны тогда и только тогда, когда каждое из них является следствием другого.

Определение 4. Областью допустимых значений (ОДЗ) уравнения $f(x) = g(x)$ называют множество тех значений переменной x, при которых одновременно имеют смысл выражения $f(x)$ и $g(x)$.

Вывод: 1) *если при решении некоторого уравнения мы все время переходим к равносильному уравнению или осуществляем преобразования и отбор корней по ходу решения с учетом ОДЗ, то в итоге получим корни исходного уравнения, которые не нуждаются в проверке;*

2) *если же при решении уравнения мы на каком-либо шаге получаем уравнение-следствие и/или осуществляем преобразования без учета ОДЗ, то в конце решения необходимо сделать проверку полученных корней.*

Перейдем теперь к логарифмическим уравнениям.

Определение 5. Простейшее логарифмическое уравнение − это уравнение вида $\log_a x = b$, где $a > 0, a \neq 1$. Оно имеет единственное решение $x = a^b$ при любом b.

Далее учитель должен обратить внимание учащихся, что в качестве аргумента может выступать функция $f(x)$, тогда:

а) Уравнение $\log_a f(x) = b, a > 0, a \neq 1$, равносильно уравнению $f(x) = a^b$.

б) Уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x), a >, a \neq 1$, равносильно каждой из следующих систем

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}, \quad \text{и} \quad \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}.$$

Система выбирается в зависимости от того, какое из неравенств $f(x) > 0$ или $g(x) > 0$ проще решить.

Учитель также обязан обратить внимание учащихся, что в основании логарифма может стоять функция и тогда уравнение приобретает вид: $\log_{u(x)} f(x) = \log_{u(x)} g(x)$, которое равносильно каждой из систем

$$\begin{cases} u(x) > 0 \\ u(x) \neq 1 \\ f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}, \quad \text{и} \quad \begin{cases} u(x) > 0 \\ u(x) \neq 1 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}.$$

Теперь можно непосредственно перейти к решению логарифмических уравнений разного вида сложности, учитывая свойства логарифмов, а именно

$$\log_a\big(f(x) * g(x)\big) = \log_a|f(x)| + \log_a|g(x)|, \qquad \text{при } f(x) * g(x) > 0.$$

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a|f(x)| - \log_a|g(x)|, \quad \text{при } f(x) * g(x) > 0.$$

$$\log_a\big(f(x)\big)^{2k} = 2k \log_a|f(x)|, \quad \text{при } k \in Z.$$

$$\log_{(u(x)^{2k}} f(x) = \frac{1}{2k} \log_{|u(x)|} f(x), \quad \text{при } k \in Z, k \neq 0.$$