

Элементы статистики: Выборка. Объем. Размах.

Что такое выборка? Если говорить простым языком, то это отобранная нами информация для исследования. Например, мы можем сформировать следующую выборку — суммы денег, потраченных в каждый из шести дней.

Дни недели	Понедельник	Вторник	Среда	Четверг	Пятница	Суббота
Сумма:	150	180	230	250	160	170

Выборка состоит из n -элементов. Вместо переменной n может стоять любое число. У нас имеется шесть элементов, поэтому переменная n равна 6

$$n = 6$$

Элементы выборки обозначаются с помощью переменных с индексами x_1, x_2, \dots, x_n . Последний x_n элемент является шестым элементом выборки, поэтому вместо n будет стоять число 6.

Дни недели	Понедельник	Вторник	Среда	Четверг	Пятница	Суббота
Сумма:	150	180	230	250	160	170
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6

Обозначим элементы нашей выборки через переменные x_1, x_2, \dots, x_n

$$x_1 = 150$$

$$x_2 = 180$$

$$x_3 = 230$$

$$x_4 = 250$$

$$x_5 = 160$$

$$x_6 = 170$$

Количество элементов выборки называют **объемом выборки**. В нашем случае объем равен шести.

Размахом выборки называют разницу между самым большим и маленьким элементом выборки.

В нашем случае, самым большим элементов выборки является элемент 250, а самым маленьким — элемент 150. Разница между ними равна 100

$$x_{\max} = 250$$

$$x_{\min} = 150$$

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 250 - 150 = 100$$

$$R = 100$$

Среднее арифметическое

Понятие среднего значения часто употребляется в повседневной жизни.

Примеры:

- средняя зарплата жителей страны
- средний балл учащихся
 - средняя скорость движения
 - средняя производительность труда.

Речь идет о среднем арифметическом — результате деления суммы элементов выборки на их количество.

Среднее арифметическое — это результат деления суммы элементов выборки на их количество.

$$x_{\text{среднее}} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_n}{n}$$

Вернемся к нашему примеру

Дни недели	Понедельник	Вторник	Среда	Четверг	Пятница	Суббота
Сумма:	150	180	230	250	160	170
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6

Узнаем сколько в среднем мы тратили в каждом из шести дней:

$$x_{\text{среднее}} = \frac{150+180+230+250+160+170}{6} = \frac{1140}{6} = 190 \text{ руб.}$$

Средняя скорость движения

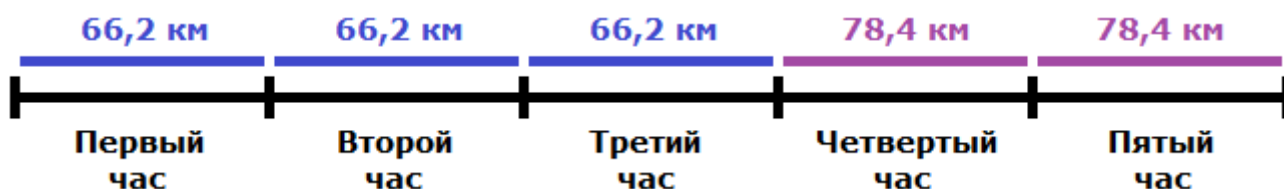
При изучении задач на движение мы определяли скорость движения следующим образом: делили пройденное расстояние на время. Но тогда подразумевалось, что тело движется с постоянной скоростью, которая не менялась на протяжении всего пути.

В реальности, это происходит довольно редко или не происходит совсем. Тело как правило движется с различной скоростью.

Вспомните, когда мы ездим на автомобиле или велосипеде, наша скорость часто меняется — когда впереди нас помехи, нам приходится сбавлять скорость. Когда же трасса свободна, мы ускоряемся. При этом за время нашего ускорения скорость изменяется несколько раз.

Речь идет о средней скорости движения. Чтобы её определить нужно сложить скорости движения, которые были в каждом часе/минуте/секунде и результат разделить на время движения.

Задача 1. Автомобиль первые 3 часа двигался со скоростью 66,2 км/ч, а следующие 2 часа — со скоростью 78,4 км/ч. С какой средней скоростью он ехал?



Сложим скорости, которые были у автомобиля в каждом часе и разделим на время движения (5ч)

$$V_{\text{средняя}} = \frac{66,2 + 66,2 + 66,2 + 78,4 + 78,4}{5} = \frac{355,4}{5} = 71,08 \text{ км/ч}$$

Значит автомобиль ехал со средней скоростью 71,08 км/ч.

Определять среднюю скорость можно и по другому — сначала найти расстояния, пройденные с одной скоростью, затем сложить эти расстояния и результат разделить на время. На рисунке видно, что первые три часа скорость у автомобиля не меняется. Тогда можно найти расстояние, пройденное за три часа:

$$66,2 \times 3 = 198,6 \text{ км.}$$

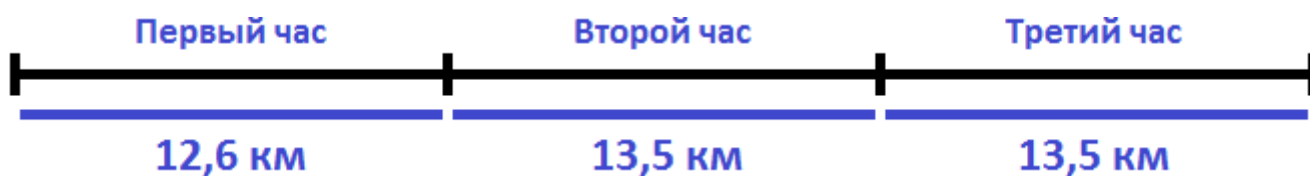
Аналогично можно определить расстояние, которое было пройдено со скоростью 78,4 км/ч. В задаче сказано, что с такой скоростью автомобиль двигался 2 часа:

$$78,4 \times 2 = 156,8 \text{ км.}$$

Сложим эти расстояния и результат разделим на 5

$$v_{\text{средняя}} = \frac{198,6 + 156,8}{5} = \frac{355,4}{5} = 71,08 \text{ км/ч}$$

Задача 2. Велосипедист за первый час проехал 12,6 км, а в следующие 2 часа он ехал со скоростью 13,5 км/ч. Определить среднюю скорость велосипедиста.



Скорость велосипедиста в первый час составляла 12,6 км/ч. Во второй и третий час он ехал со скоростью 13,5. Определим среднюю скорость движения велосипедиста:

$$v_{\text{средняя}} = \frac{12,6 + 13,5 + 13,5}{3} = \frac{39,6}{3} = 13,2 \text{ км/ч}$$

Мода и медиана

Модой называют элемент, который встречается в выборке чаще других.

Рассмотрим следующую выборку: шестеро спортсменов, а также время в секундах за которое они пробегают 100 метров

Спортсмены	Джон	Майкл	Том	Макс	Лео	Эван
Время в секундах	12	14	13	14	12	14

Элемент 14 встречается в выборке чаще других, поэтому элемент 14 назовем модой.

Рассмотрим еще одну выборку. Тех же спортсменов, а также смартфоны, которые им принадлежат

Спортсмены	Джон	Майкл	Том	Макс	Лео	Эван
Смартфоны	iphone	Samsung	iphone	Sony	iphone	Nokia

Элемент iphone встречается в выборке чаще других, значит элемент iphone является модой. Говоря простым языком, носить iphone модно.

Конечно элементы выборки в этот раз выражены не числами, а другими объектами (смартфонами), но для общего представления о моде этот пример вполне приемлем.

Рассмотрим следующую выборку: семеро спортсменов, а также их рост в сантиметрах:

Спортсмены	Джон	Майкл	Том	Макс	Лео	Эван	Джордж
Рост в см	184	183	180	188	190	182	185

Упорядочим данные в таблице так, чтобы рост спортсменов шел по возрастанию. Другими словами, построим спортсменов по росту:

Спортсмены	Том	Эван	Майкл	Джон	Джордж	Макс	Лео
Рост в см	180	182	183	184	185	188	190

Выпишем рост спортсменов отдельно:

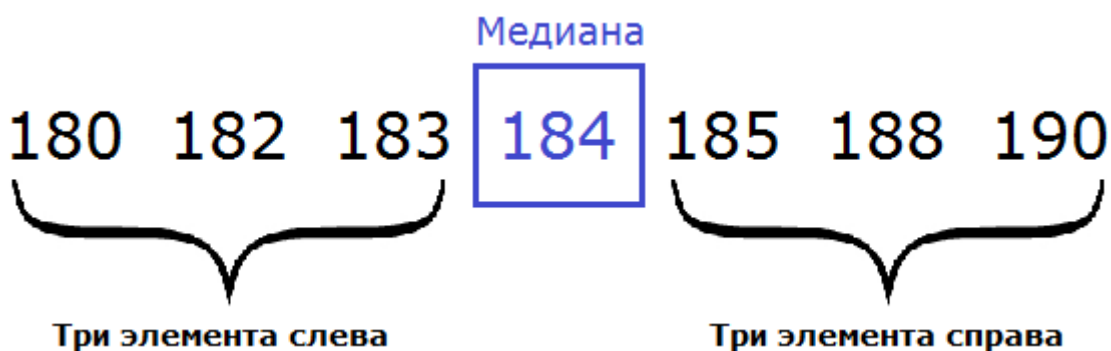
180, 182, 183, 184, 185, 188, 190

В получившейся выборке 7 элементов. Посередине этой выборки располагается элемент 184. Слева от него три элемента и справа от него три элемента. Такой элемент как 184 называют **медианой** упорядоченной выборки.

Медианой упорядоченной выборки называют элемент, располагающийся посередине.

Отметим, что данное определение справедливо в случае, если количество элементов упорядоченной выборки является нечетным.

В рассмотренном выше примере, количество элементов упорядоченной выборки было нечетным. Это позволило нам быстро указать медиану



Но возможны случаи, когда количество элементов выборки четно.

К примеру, рассмотрим выборку в которой не семеро спортсменов, а шестеро:

Спортсмены	Джон	Майкл	Том	Макс	Лео	Эван
Рост в см	186	184	180	188	190	182

Построим этих шестерых спортсменов по росту:

Спортсмены	Том	Эван	Майкл	Джон	Макс	Лео
Рост в см	180	182	184	186	188	190

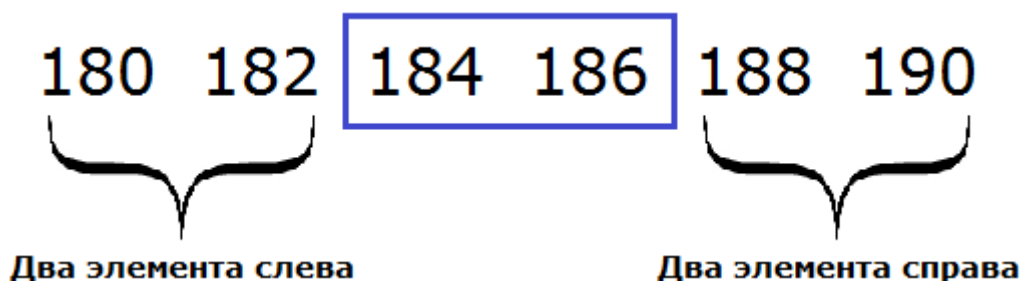
Выпишем рост спортсменов отдельно:

180, 182, 184, 186, 188, 190

В данной выборке не получается указать элемент, который находился бы посередине. Если указать элемент 184 как медиану, то слева от этого элемента будет располагаться два элемента, а справа — три. Если как медиану указать элемент 186, то слева от этого элемента будет располагаться три элемента, а справа — два.

В таких случаях для определения медианы выборки, нужно взять два элемента выборки, находящихся посередине и найти их среднее арифметическое. Полученный результат будет являться медианой.

Вернемся к нашим спортсменам. В упорядоченной выборке 180, 182, 184, 186, 188, 190 посередине располагаются элементы 184 и 186



Найдем среднее арифметическое элементов 184 и 186

$$\frac{184 + 186}{2} = \frac{370}{2} = 185$$

Элемент 185 является медианой выборки, несмотря на то, что этот элемент не является членом исходной и упорядоченной выборки. Спортсмена с ростом 185 нет среди остальных спортсменов. Рост в 185 см используется в данном случае для статистики, чтобы можно было сказать о том, что срединный рост спортсменов составляет 185 см.

Поэтому, более точное определение медианы зависит от количества элементов в выборке.

Если количество элементов упорядоченной выборки нечетно, то медианой выборки называют элемент, располагающийся посередине.

Если количество элементов упорядоченной выборки четно, то медианой выборки называют среднее арифметическое двух чисел, располагающихся посередине этой выборки.

Медиана и среднее арифметическое по сути являются «близкими родственниками», поскольку и то и другое используют для определения среднего значения. Например, для предыдущей упорядоченной выборки 180, 182, 184, 186, 188, 190 мы определили медиану, равную 185. Этот же результат можно получить путем определения среднего арифметического элементов 180, 182, 184, 186, 188, 190

$$\frac{180+182+184+186+188+190}{6} = \frac{1110}{6} = 185$$

Но медиана в некоторых случаях отражает более реальную ситуацию.

Например, рассмотрим следующий пример:

Было подсчитано количество имеющихся очков у каждого спортсмена. В результате получилась следующая выборка:

0, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 3, 5, 4, 5, 0, 1, 6, 1

Определим среднее арифметическое для данной выборки — получим значение 2,2

$$\frac{0+1+1+1+2+1+2+3+5+4+5+0+1+6+1}{15} = \frac{33}{15} = 2,2$$

По данному значению можно сказать, что в среднем у спортсменов 2,2 очка. Теперь определим медиану для этой же выборки. Упорядочим элементы выборки и укажем элемент, находящийся посередине:

0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 6

В данном примере, медиана лучше отражает реальную ситуацию, поскольку половина спортсменов имеет не более одного очка. Это позволяет нам сказать, что большинство спортсменов имеет одно очко.

Еще пример. Врач зарабатывает 8 тыс. рублей в месяц, учитель 9 тыс. рублей, а олигарх зарабатывает 100 тыс. рублей. Подсчитывать в таком случае среднее арифметическое и говорить, что в среднем эти трое работников зарабатывают 39 тыс. рублей, никак язык не поворачивается. Да и несправедливо это будет:

$$\frac{8+9+100}{3} = \frac{117}{3} = 39$$

Здесь разумнее воспользоваться медианой и сказать, что большинство работников получают не более девяти тысяч рублей.

Частота

Частота-это число, которое показывает сколько раз в выборке встречается тот или иной элемент.

Предположим, что в школе проходят соревнования по подтягиваниям. В соревнованиях участвует 36 школьников. Составим таблицу в которую будем заносить число подтягиваний, а также число участников, которые выполнили столько подтягиваний.

Число подтягиваний	5	6	8	10	12	15
Число участников, которые выполнили столько подтягиваний	4	5	10	8	6	3

По таблице можно узнать сколько человек выполнило 5, 10 или 15 подтягиваний. Так, 5 подтягиваний выполнили четыре человека, 10 подтягиваний выполнили восемь человек, 15 подтягиваний выполнили три человека.

Количество человек, повторяющих одно и то же число подтягиваний в данном случае являются частотой. Поэтому вторую строку таблицы переименуем в название «частота»:

Число подтягиваний	5	6	8	10	12	15
Частота	4	5	10	8	6	3

Такие таблицы называют таблицами частот.

Частота обладает следующим свойством: сумма частот равна общему числу данных в выборке.

Это означает, что сумма частот равна общему числу школьников, участвующих в соревнованиях, то есть тридцати шести. Проверим так ли это.

Сложим частоты, приведенные в таблице:

$$4 + 5 + 10 + 8 + 6 + 3 = 36$$

Относительная частота

Относительная частота это в принципе та же самая частота, которая была рассмотрена выше, но только выраженная в процентах.

Относительная частота равна отношению частоты на общее число элементов выборки.

Вернемся к нашей таблице:

Число подтягиваний	5	6	8	10	12	15
Частота	4	5	10	8	6	3

Пять подтягиваний выполнили 4 человека из 36. Шесть подтягиваний выполнили 5 человек из 36. Восемь подтягиваний выполнили 10 человек из 36 и так далее. Давайте заполним таблицу с помощью таких отношений:

Число подтягиваний	5	6	8	10	12	15
Относительная частота	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{3}{36}$

Выполним деление в этих дробях:

Число подтягиваний	5	6	8	10	12	15
Относительная частота	0,11	0,14	0,28	0,22	0,17	0,08

Выразим эти частоты в процентах. Для этого умножим их на 100. Умножение на 100 удобно выполнить передвижением запятой на две цифры вправо:

Число подтягиваний	5	6	8	10	12	15
Относительная частота	11%	14%	28%	22%	17%	8%

Теперь можно сказать, что пять подтягиваний выполнили 11% участников, 6 подтягиваний выполнили 14% участников, 8 подтягиваний выполнили 28% участников и так далее.

Решение задач

Задача 1

На экзамене 25 билетов, Сергей не выучил 3 из них. Найдите вероятность того, что ему попадётся выученный билет.

Решение.

Сергей выучил $25 - 3 = 22$ вопроса. Поэтому вероятность того, что ему попадётся выученный билет равна $\frac{22}{25}=0,88$

Ответ: 0,88.

Задача 2

Коля выбирает трехзначное число. Найдите вероятность того, что оно делится на 5.

Решение.

Всего трехзначных чисел 900. На пять делится каждое пятое их них, то есть таких чисел $900/5=180$. Вероятность того, что Коля выбрал трехзначное

число, делящееся на 5, определяется отношением количества трехзначных чисел, делящихся на 5, ко всему количеству $\frac{180}{900} = \frac{1}{5} = 0,2$

Ответ: 0,2.

Задача 3

Телевизор у Маши сломался и показывает только один случайный канал. Маша включает телевизор. В это время по трем каналам из двадцати показывают кинокомедии. Найдите вероятность того, что Маша попадет на канал, где комедия не идет.

Решение.

Количество каналов, по которым не идет кинокомедий $20-3=17$. Вероятность того, что Маша не попадет на канал, по которому идут кинокомедии равна отношению количества каналов, по которым не идут кинокомедии к общему числу каналов: $\frac{17}{20}=0,85$

Ответ: 0,85.

Задача 4

На тарелке 12 пирожков: 5 с мясом, 4 с капустой и 3 с вишней. Наташа наугад выбирает один пирожок. Найдите вероятность того, что он окажется с вишней.

Решение.

Вероятность того, что будет выбран пирожок с вишней равна отношению количества пирожков с вишней к общему количеству пирожков: $\frac{3}{12}=0,25$

Ответ: 0,25

Задача 5

В фирме такси в данный момент свободно 20 машин: 9 черных, 4 желтых и 7 зеленых. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе

всего к заказчику. Найдите вероятность того, что к нему приедет желтое такси.

Решение.

Вероятность того, что приедет желтая машина равна отношению количества желтых машин к общему количеству машин: $\frac{4}{20} = 0,2$

Ответ: 0,2.

Задача 6

В каждой десятой банке кофе согласно условиям акции есть приз. Призы распределены по банкам случайно. Варя покупает банку кофе в надежде выиграть приз. Найдите вероятность того, что Варя не найдет приз в своей банке.

Решение.

Так как в каждой десятой банке кофе есть приз, то вероятность выиграть приз равна 0,1. Поэтому, вероятность не выиграть приз равна $1 - 0,1 = 0,9$

Ответ: 0,9.

Задача 7

Миша с папой решили покататься на колесе обозрения. Всего на колесе двадцать четыре кабинки, из них 5 — синие, 7 — зеленые, остальные — красные. Кабинки по очереди подходят к платформе для посадки. Найдите вероятность того, что Миша прокатится в красной кабинке.

Решение.

Вероятность того, что подойдет красная кабинка равна отношению количества красных кабинок к общему количеству кабинок на колесе обозрения.

Всего красных кабинок: $24 - 5 - 7 = 12$. Поэтому искомая вероятность $\frac{12}{24} = 0,5$.

Ответ: 0,5.

Задача 8

У бабушки 20 чашек: 5 с красными цветами, остальные с синими. Бабушка наливает чай в случайно выбранную чашку. Найдите вероятность того, что это будет чашка с синими цветами.

Решение.

Вероятность того, что чай нальют в чашку с синими цветами равна отношению количества чашек с синими цветами к общему количеству чашек. Всего чашек с синими цветами: $20 - 5 = 15$. Поэтому искомая вероятность $\frac{15}{20} = 0,75$.

Ответ: 0,75.

Задача 9

Родительский комитет закупил 25 пазлов для подарков детям на окончание года, из них 15 с машинами и 10 с видами городов. Подарки распределяются случайным образом. Найдите вероятность того, что Толе достанется пазл с машиной.

Решение.

Вероятность получить пазл с машиной равна отношению числа пазлов с машиной к общему числу закупленных пазлов, то есть $\frac{15}{25} = 0,6$.

Ответ: 0,6.

Задача 10

В среднем из каждых 80 поступивших в продажу аккумуляторов 76 аккумуляторов заряжены. Найдите вероятность того, что купленный аккумулятор не заряжен.

Решение.

Из каждых 80 аккумуляторов в среднем будет $80 - 76 = 4$ незаряженных. Таким образом, вероятность купить незаряженный аккумулятор равна доле числа незаряженных аккумуляторов из каждых 80 купленных, то есть $\frac{4}{80} =$

$\frac{1}{20} = 0,05$.

Ответ: 0,05.

Задача 11

В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков. Результат округлите до сотых.

Решение.

Количество исходов, при которых в результате броска игральных костей выпадет 8 очков, равно 5: 2+6, 3+5, 4+4, 5+3, 6+2. Каждый из кубиков может выпасть шестью вариантами, поэтому общее число исходов равно $6 \cdot 6 = 36$.

Следовательно, вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков, равна $\frac{5}{36} = 0,138\dots$

Ответ: 0,14.

Задача 12

В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно один раз.

Решение.

Равновозможные 4 исхода эксперимента: орел-орел, орел-решка, решка-орел, решка-решка. Орел выпадает ровно один раз в двух случаях: орел-решка и решка-орел. Поэтому вероятность того, что орел выпадет ровно 1 раз, равна $\frac{2}{4} = 0,5$.

Ответ: 0,5.

Задача 13

Конкурс исполнителей проводится в 5 дней. Всего заявлено 80 выступлений – по одному от каждой страны. В первый день 8 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений

определяется жеребьевкой. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

Решение.

В третий день конкурса запланировано $(80-8):4=18$ выступлений.

Вероятность того, что выступление представителя России состоится в третий

день конкурса, равна: $\frac{18}{80} = \frac{9}{40} = \frac{225}{1000} = 0,225$.

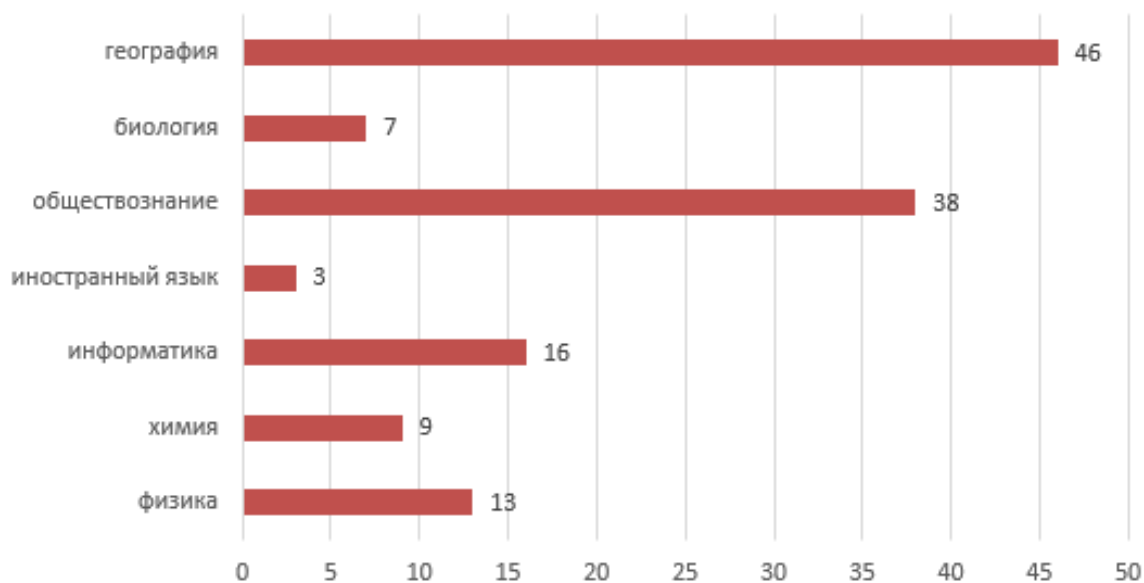
О т в е т: 0,225.

Литература

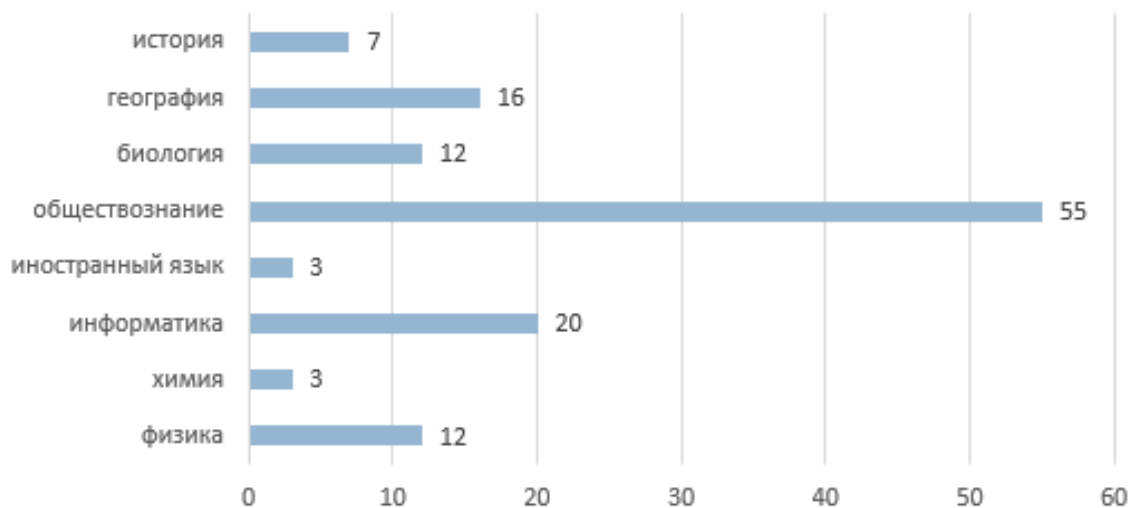
1. <http://fb.ru/article/277852/osnovnoe-ponyatie-teorii-veroyatnosti-zakonyi-teorii-veroyatnosti>
2. <https://ru.wikipedia.org/wiki/>
3. <https://youclever.org/book/elementy-statistiki-1>
4. <https://www.syl.ru/article/300831/teoriya-veroyatnosti-formulyi-i-primeryi-resheniya-zadach>
5. <https://oge.sdangia.ru/test?theme=20>
6. https://revolution.allbest.ru/mathematics/00243772_0.html#text
7. <http://spacemath.xyz/elementy-statistiki/>
8. <https://ioctut.edu.yar.ru/>

Приложение

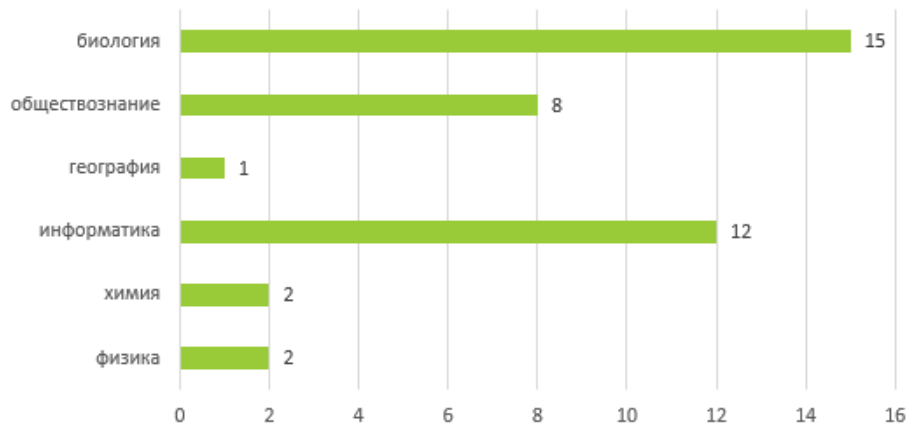
Число участников ОГЭ по выбору 2017 в Лицее №1



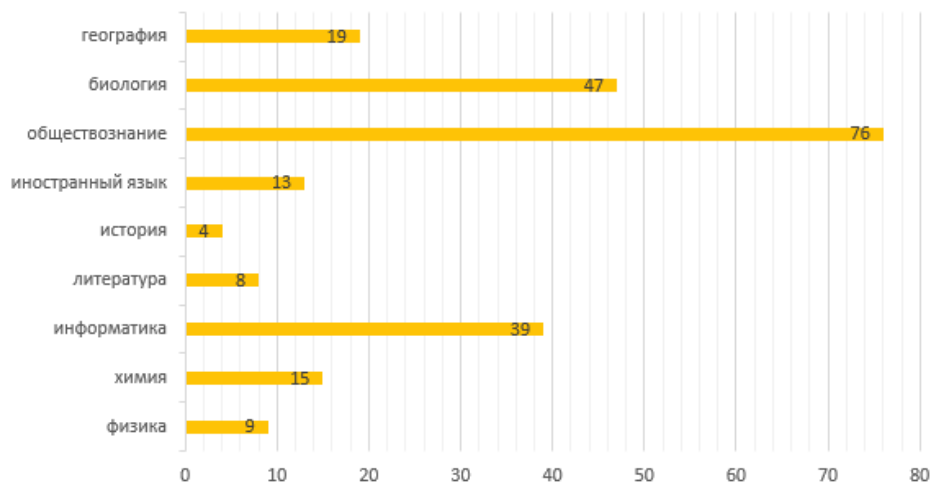
Число участников ОГЭ по выбору 2017 в МОУ СШ №3



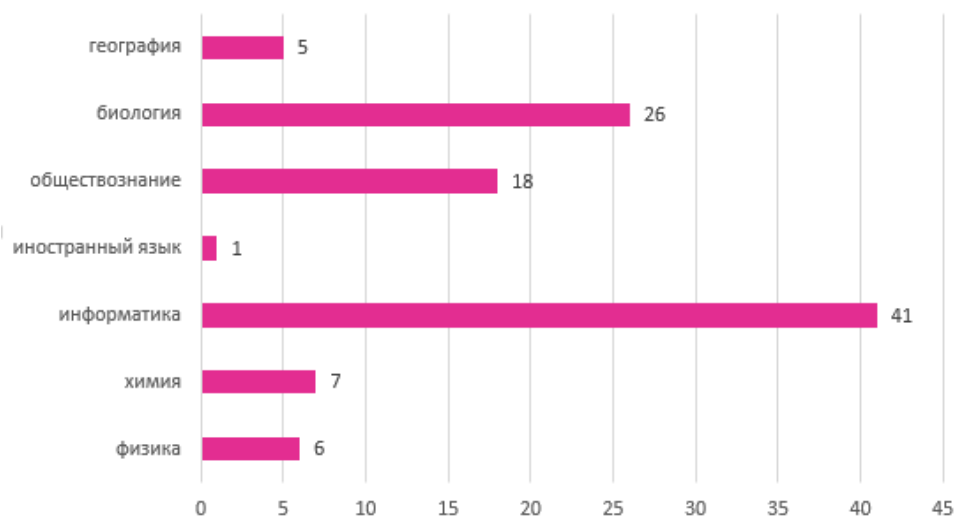
Число участников ОГЭ по выбору 2017 в МОУ СШ №4



Число участников ОГЭ по выбору 2017г. в МОУ СШ №6



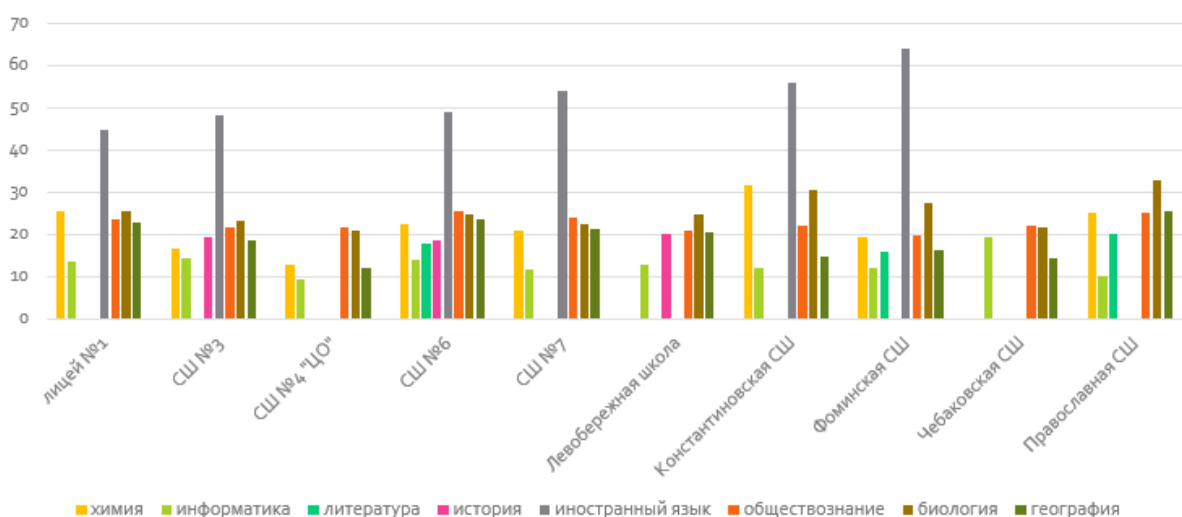
Число участника ОГЭ по выбору 2017 в МОУ СШ №7



Частота ОГЭ по выбору 2017г. в МОУ СШ №6



Средний балл ОГЭ по выбору в ТМР 2017г.



Получили документ об образовании в ТМР

