Дано: куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, AB = a, угол между плоскостью сечения и прямой BD равен $\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

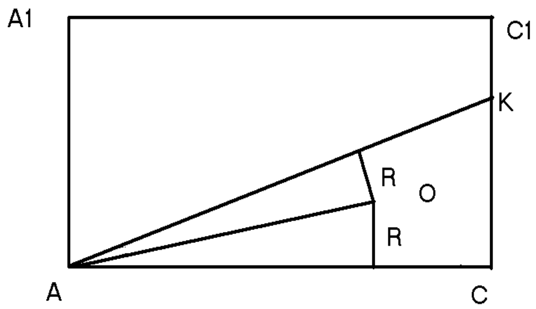
Найти: площадь сечения куба и радиус шара, касающегося плоскости сечения и граней ABCD, BCC_1B_1 и DCC_1D_1.

Решение.

Плоскость сечения пересекает плоскость BB_1D_1D куба по прямой EF, EF ║ BD, где E $\in DD_1$, а ребро CC_1 – в некоторой точке K.

Пусть Q – середина BD, M и N – основания перпендикуляров, опущенных соответственно из точек D и Q на плоскость сечения. Тогда DM = QN, так как BD ║ (плоскости сечения), и $N \in AK$.

По условию $\angle DAM = \arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}$, AD = a, откуда находим DM = AD $\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4} = QN$. Из треугольника AQN, в котором $AQ = \frac{a\sqrt{2}}{2}, QN = \frac{AQ}{2}$, находим $\angle QAN = \frac{\pi}{6}$, и поэтому



$$AK = AC \cdot \frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}a.$$

Пусть S – площадь сечения куба плоскостью, тогда $S = \frac{1}{2} AK \cdot EF$, где EF=BD=a$\sqrt{2}$, и поэтому $S = \frac{2\sqrt{3}}{3}a^2$.

Найдем радиус R вписанного шара. Заметим, что центр O шара лежит на биссектрисе угла KAC (см. рисунок), а проекция L точки O на грань ABCD принадлежит AC.

Из треугольника AOL, в котором $\angle OAL = \frac{1}{2}\angle KAC = \frac{\pi}{12}, OL = R$, находим $AL = R \cdot ctg\frac{\pi}{12}$, где $ctg\frac{\pi}{12} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} = 2+\sqrt{3}$. Так как LC=R$\sqrt{2}$, AC = AL + LC,

$$a\sqrt{2} = R\left(ctg\frac{\pi}{12} + \sqrt{2}\right).$$

Ответ: $\dfrac{2a^2}{\sqrt{3}}, \dfrac{a\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

Замечание. Искомый радиус модно найти, заметив, что он равен радиусу шара, вписанного в треугольную пирамиду KCE_1F_1, где E_1 – точка пересечения прямых KE и CD, F_1 – точка пересечения прямых KF и CB, используя формулу $R = \dfrac{3V}{S_П}$, где V – объем пирамиды KCE_1F_1, $S_п$ – ее полная поверхность.