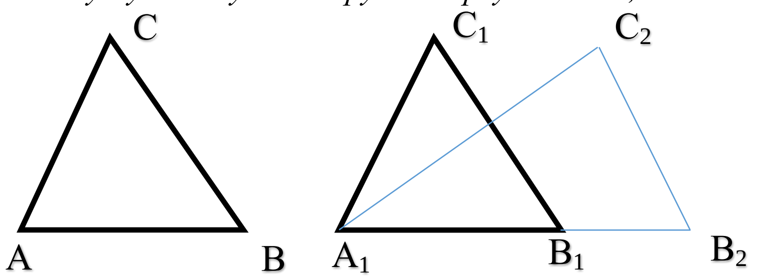
БИЛЕТ № 1.

1. ***Первый признак равенства треугольников.***

Теорема: (I признак равенства треугольников, по 2 сторонам и углу между ними).

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.



Дано:
Δ ABC и Δ $A_1B_1C_1$
AB = A_1B_1
$\angle$A = $\angle A_1$
AC = A_1C_1
Доказать:
Δ ABC = Δ $A_1B_1C_1$

Доказательство:

а) Пусть существует Δ $A_2B_2C_2$ = Δ ABC, т.е. A_1B_2 = AB и $\angle C_2A_1B_2 = \angle CAB$
A_1C_2 = AC $\quad \angle A_1C_2B_2 = \angle ACB$
B_2C_2 = BC $\quad \angle C_2B_2A_1 = \angle CBA$

б) т.к. AB = A_1B_1 (по условию) и AB = A_1B_2 (по предположению), то $A_1B_1 = A_1B_2$,
значит, точка B_2 совпадает с точкой B_1.
(т.к. по аксиоме: *на любой полупрямой можно отложить только один отрезок заданной длины от её начала*).

в) т.к. $\angle A = \angle A_1$ (по условию) и $\angle C_2A_1B_2 = \angle CAB$ (по предположению),
то лучи A_1C_1 и B_1C_2, а также и лучи A_1B_1 и A_1B_2 совпадают.

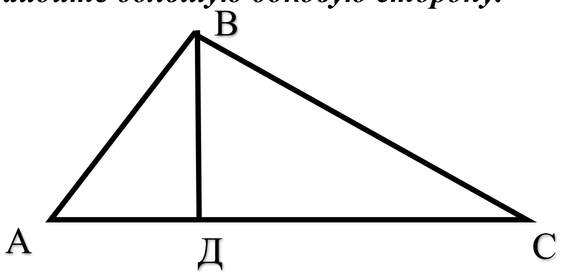
г) т.к. AC = A_1C_1 (по условию) и AC = A_1C_2 (по предположению), то $A_1C_1 = A_1C_2$,
значит, точка C_2 совпадает с точкой C_1.
(т.к. по аксиоме: *на любой полупрямой можно отложить только один отрезок заданной длины от её начала*).

д) Мы доказали, что у Δ $A_1B_2C_2$ и Δ $A_1B_1C_1$ попарно совпали три вершины, значит они равны, а, следовательно, Δ ABC = Δ $A_1B_1C_1$.

ч. и т. д.

2. ***ЗАДАЧИ:***

1) ***В треугольнике один из углов при основании равен 45^o, а высота делит основание на части 20 см и 21 см. Найдите большую боковую сторону.***



Дано:
Δ ABC
ВД – высота
АД = 20 см,
ДС = 21 см,
$\angle$A = 45^o
Найти:
BC - ?

Решение:

а) Рассмотрим Δ АВД: $\angle$АДВ = 90^o (т.к. ВД – высота, по условию, ВД $\perp$ АС),
$\angle$A = 45^o (по условию),
Тогда, по теореме о острых углах прямоугольного треугольника:
$\angle$A + $\angle$АВД = 90^o, отсюда следует,
$\angle$АВД = 90^o - $\angle$A = 90^o - 45^o = 45^o

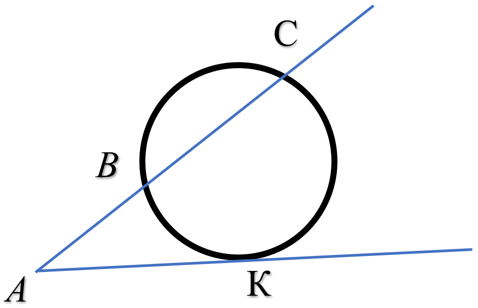
Следовательно, Δ АВД – равнобедренный, (АВ – основание), т.е. ВД = АД = 20 см,

б) Рассмотрим Δ СВД: $\angle$СДВ = 90^o (т.к. ВД – высота, по условию, ВД $\perp$ АС),
По теореме Пифагора: BC^2 = $ВД^2$ + $ДС^2$
$BC^2 = 20^2 + 21^2$
$BC^2 = 400 + 441$
$BC^2 = 841$

Следовательно, BC = $\sqrt{841}$ = 29 (см).

Ответ: 29 см.

2) ***Через точку А, лежащую вне окружности, проведены две прямые. Одна прямая касается окружности в точке К. Другая прямая пересекает окружность в точках В и С, причём АВ = 5, ВС = 15. Найти АК.***



Дано:
А $\notin$ окр.(О; R)
АК – касательная,
К – точка касания.
АС ∩ окр.(О; R) = В и С
АВ = 5,
ВС = 15,
Найти:
АК - ?

Решение:

По свойству касательной и секущей, выходящей из точки лежащей вне окружности:

$AK^2 = AB * AC$, АВ = 5 (по условию),

AC = AB + BC = 5 + 15 = 20

Тогда, $AK^2 = 5 * 20 = 100$

$AK = \sqrt{100} = 10$

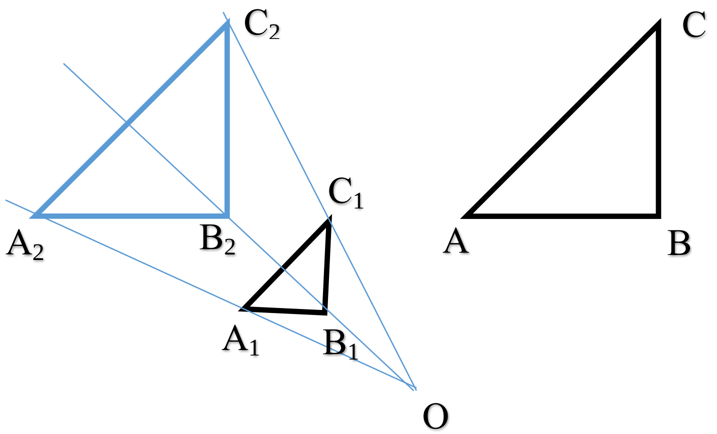
Ответ: 10.

БИЛЕТ № 2.

1. ***Второй признак подобия треугольников.***

Теорема: (II признак подобия треугольников, по 2 сторонам и углу между ними).

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого, и углы, образованные этими сторонами – равны, то такие треугольники подобны.



Дано:
ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$
$AC = A_1C_1 * k$
$\angle C = \angle C_1$
$AB = A_1B_1 * k$
Доказать:
$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

Доказательство:

а) Подвергнем $\Delta A_1B_1C_1$ преобразованию подобия с коэффициентом k; например – гомотетии. Получим $\Delta A_2B_2C_2$.

б) Рассмотрим $\Delta A_2B_2C_2$ и ΔABC:

$\angle C_2 = \angle C$, т.к. $\angle C_2 = \angle C_1$ (по построению), а $\angle C = \angle C_1$ (по условию).

$A_2C_2 = AC$, т.к. $A_2C_2 = A_1C_1 * k$ (по построению), а $AC = A_1C_1 * k$ (по условию).

$A_2B_2 = AB$, т.к. $A_2B_2 = A_1B_1 * k$ (по построению), а $AB = A_1B_1 * k$ (по условию).

Следовательно, $\Delta A_2B_2C_2 = \Delta ABC$ (по I признаку равенства треугольников, по 2 сторонам и углу между ними).

в) Т.к. $\Delta A_1B_1C_1$ гомотетичен $\Delta A_2B_2C_2$, значит, $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$.

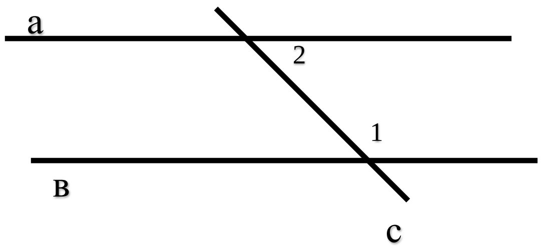
г) А так как мы доказали, что $\Delta A_2B_2C_2 = \Delta ABC$, следовательно, $\Delta A_2B_2C_2 \sim \Delta ABC$.

Отсюда следует, что $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$.

ч. и т. д.

2. ***<u>ЗАДАЧИ:</u>***

1) Разность двух внутренних односторонних углов при пересечении параллельных прямых секущей равна 50°. Найти эти углы.



Дано:
а ǁ в
с – секущая.
$\angle 1 - \angle 2 = 50^\circ$
Найти:
$\angle 1$ - ?
$\angle 2$ - ?

Решение:

а) Пусть $\angle 2 = x^\circ$, тогда $\angle 1 = x^\circ + 50^\circ$.

По теореме о внутренних односторонних углах:

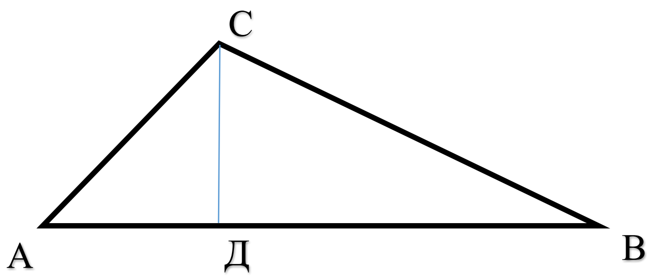
$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, следовательно,

$x^\circ + x^\circ + 50^\circ = 180^\circ$
$2x^\circ = 180^\circ - 50^\circ$
$2x^\circ = 130^\circ$
$x^\circ = 130^\circ : 2$
$x^\circ = 65^\circ$, следовательно, $\angle 2 = 65^\circ$, тогда,

б) $\angle 1 = x^\circ + 50^\circ = 65^\circ + 50^\circ = 115^\circ$.

Ответ: 65°; 115°.

2) В треугольнике АВС известно, что АВ = 25 см, ВС = 20 см, и АС= 15 см. Найти высоту, опущенную на большую сторону.



Дано:
Δ АВС
СД – высота
АВ = 25 см,
ВС = 20 см,
АС = 15 см,
Найти:
СД - ?

Решение:

а) Пусть АД = Х, тогда, ВД = 25 – Х.

б) Рассмотрим Δ АСД, ∟АДС = 90° (СД – высота, по условию).
По теореме Пифагора: $АС^2 = СД^2 + АД^2$,
откуда, $СД^2 = АС^2 – АД^2 = 15^2 – Х^2 = 225 – Х^2$

в) Рассмотрим Δ ВСД, ∟ВДС = 90° (СД – высота, по условию).
По теореме Пифагора: $СД^2 = ВС^2 – ВД^2 = 20^2 – (25 – Х)^2 = 400 – (25 – Х)^2$

г) так как $СД^2 = СД^2$, то и $225 – Х^2 = 400 – (25 – Х)^2$

$225 – Х^2 = 400 – (25^2 – 50Х + Х^2)$

$225 – Х^2 – 400 + 625 – 50Х + Х^2 = 0$

$– 50Х + 450 = 0$

$– 50Х = – 450$

$Х = – 450 : (– 50)$

$Х = 9$,

следовательно, АД = 9 см,

тогда, $СД^2 = АС^2 – АД^2 = 15^2 - 9^2 = 225 – 81 = 144$

$СД = \sqrt{144} = 12$ (см).

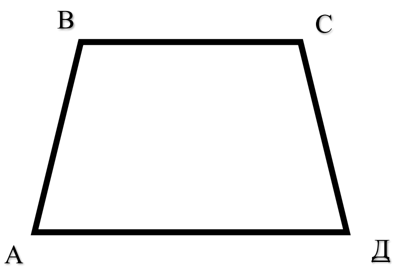
Ответ: 12 см.

БИЛЕТ № 3.

1. *Трапеция. Средняя линия трапеции.*

Определение:

Трапецией называется четырёхугольник, у которого только две противолежащие стороны параллельны.



АВСД – трапеция

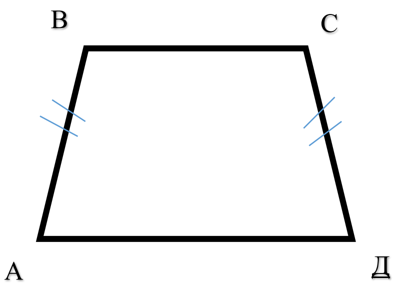
ВС || АД

АД и ВС – основания трапеции

АВ и СД – боковые стороны трапеции.

Виды трапеций:

а) *Равнобокая трапеция* – это трапеция, у которой боковые стороны равны.



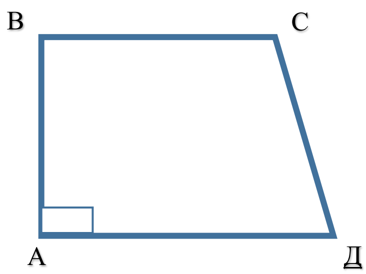
АВСД – равнобокая трапеция

ВС || АД

АД и ВС – основания трапеции

АВ = СД – боковые стороны трапеции.

б) *Прямоугольная трапеция* – это трапеция, та, у которой одна из боковых сторон и основания образовывают прямой угол.



АВСД – прямоугольная трапеция

ВС || АД

АД и ВС – основания трапеции

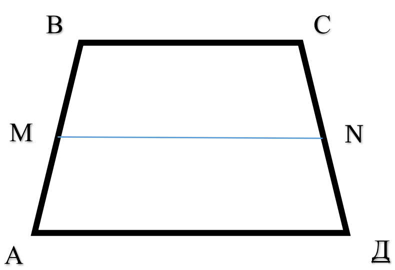
АВ и СД – боковые стороны трапеции.

ВА $\perp$ АД

Средняя линия трапеции:

Определение:

Средняя линия трапеции – это отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции.



АВСД – трапеция

ВС || АД

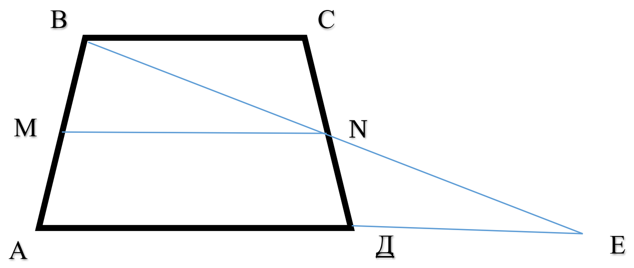
АД и ВС – основания трапеции

АВ и СД – боковые стороны трапеции.

MN – средняя линия трапеции.

Теорема: (о свойстве средней линии трапеции).

Средняя линия трапеции параллельна её основаниям и равна их полусумме.



Дано:

АВСД – трапеция

ВС || АД

АД и ВС – основания трапеции

АВ и СД – боковые стороны трапеции.

MN – средняя линия трапеции.

Доказать:

MN || ВС || АД

MN = $\frac{1}{2}$(АД + ВС)

Доказательство:

а) Дополнительное построение: проведём ВЕ через точку N,

ВЕ ∩ АД = Е.

б) Рассмотрим Δ NВС и Δ NЕД:

∟ВNС = ∟ДNЕ, т.к. они вертикальные.

СN = NД - по условию, т.к. MN – средняя линия трапеции.

∟ВСN = ∟NДЕ, т.к. они внутренние накрест лежащие при ВС || АД и секущей ВЕ.

Следовательно, Δ NВС = Δ NЕД (по II признаку равенства треугольников, по стороне и прилежащим к ней углам).

в) Из равенства треугольников следует, что ВN = NЕ и ВС = ДЕ, а т.к. ВМ = МА – по условию (т.к. MN – средняя линия трапеции), то MN – средняя линия треугольника АВЕ.

г) По свойству средней линии треугольника имеем, что .

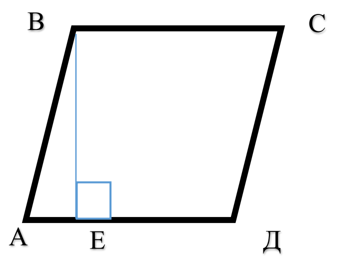
1. MN || АД, а значит, MN || ВС || АД

2. MN = $\frac{1}{2}$ АЕ, следовательно, MN = $\frac{1}{2}$(АД + ВС).

ч. и т. д.

2. ЗАДАЧИ:

1) *Сторона ромба равна 9, а один из углов равен 150°.Найти высоту ромба.*



Дано:
АВСД - ромб
АВ = 9
ВЕ - высота
∟В = 150°
Найти:
ВЕ - ?

Решение:

а) По теореме о внутренних односторонних углах:

∟А + ∟В = 180°, следовательно,

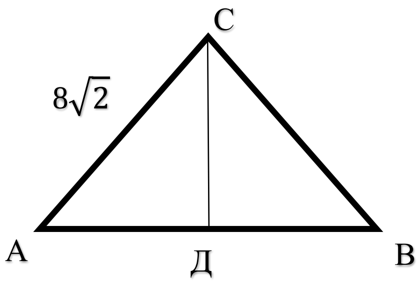
∟А = 180° – ∟В = 180° – 150° = 30°

б) Рассмотрим треугольник АВЕ:

∟АЕВ = 90°, т.к. ВЕ – высота, по условию.
∟А = 30°,
Следовательно, по теореме о угле в 30°,
ВЕ = $\frac{1}{2}$ АВ = $\frac{1}{2}$ * 9 = 4,5.

Ответ: 4,5.

2) ***В прямоугольном равнобедренном треугольнике ABC найти высоту СД, опущенную из вершины прямого угла на гипотенузу, если известно, что АС = $8\sqrt{2}$.***



Дано:
Δ ABC – равнобедренный,
(AC = BC), прямоугольный
(∟C = 90°).
СД – высота
AC = $8\sqrt{2}$
Найти:
СД - ?

Решение:

а) По теореме о сумме углов треугольника: ∟A + ∟B + ∟C = 180°

б) Так как Δ ABC – равнобедренный, AC = BC (по условию) и прямоугольный (∟C = 90°), то
∟A = ∟B (по свойству углов равнобедренного треугольника) и
∟A = ∟B = (180° – ∟C) : 2 = (180° – 90°) : 2 = 90° : 2 = 45°

в) Рассмотрим треугольник АСД:

∟АДС = 90°, СД – высота (по условию), и

∟A = ∟B = 45°

Следовательно, Δ АСД – равнобедренный, прямоугольный,
Значит, АД = СД.

г) Пусть АД = СД = Х, тогда,
По теореме Пифагора: $AC^2 = СД^2 + АД^2$

$(8\sqrt{2})^2 = X^2 + X^2$

$2X^2 = 64 * 2$

$X^2 = 64 * 2 : 2$

$X^2 = 64$

$X = \sqrt{64}$

X = 8.

д) Следовательно, СД = АД = 8.

Ответ: 8.