1. Степень с произвольным действительным показателем и её свойства (повторение)

1.1. Степень действительного числа **a** с натуральным показателем n есть произведение n сомножителей, каждый из которых равен **a** : $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$. Действительное число **a** называют основанием степени, а натуральное число n - показателем степени.

1.2. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ - отрицательный показатель степени, $a \neq 0; n \in \mathrm{N}$.

1.3. $a^0 = 1$ - нулевой показатель степени.

1.4. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ -степень с рациональным показателем, , где a>0; $n \in \mathrm{N}$, $m \in \mathrm{Z}$.

1.5. Правила действий со степенями:

а) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$; б) $a^n : a^m = a^{n-m}$; в) $(a^n)^m = a^{nm}$;

г) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$; д) $(ab)^n = a^n b^n$.

Упражнения на действия со степенями.

1. Произведите указанные действия:

а) $7a^3b^{-1} \cdot 2ab^3$; б) $4{,}5a^4x^{-3}y^{-2} \cdot 2a^{-4}x^3y^5$; в) $(a^{-2})^4 \cdot (2a^2b^{-3})^3$;

г) $\left(\dfrac{6{,}5a^3b^3}{x}\right)^0$; д) $\sqrt[4]{a} : a^{\frac{3}{4}}$; е) $20a^{-2}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{2}{3}} : 4a^{-3}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{3}{4}}$;

ж) $\dfrac{4a^5x^3y}{5b^3cz^4} : \dfrac{8a^6x^3y^4}{3bc^2z^4}$; з) $\dfrac{2a^3b^8c^4}{3x^3y^4z^8} : \dfrac{4a^2b^8c^5}{5x^3y^3z^4}$; и) $\left(\dfrac{8a^{-3}}{27b^6}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

2.Вычислить:

а) $\left(4^{-\frac{1}{4}} + \left(\dfrac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right) \cdot \left(4^{-0{,}25} - \left(2\sqrt{2}\right)^{-4}\right)$; б) $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}} + 343^{\frac{1}{3}} + \left(\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot 0{,}81^{-0{,}5}$;

в) $(0{,}04)^{-1{,}5}\cdot(0{,}125)^{\frac{1}{3}}+125^{\frac{2}{3}}\cdot 3{,}8^{0}$; г) $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{4}\right)^{-0{,}5}\cdot\left(\frac{7}{12}\right)^{0}\cdot 0{,}1^{-2}(0{,}81)^{-\frac{1}{2}}$;

д) $24^{-1}+\dfrac{57\cdot 25^{-1}+2\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}}{8-0{,}2^{-1}}\cdot\left(\frac{4}{49}-\left(\frac{7}{4}\right)^{-1}\right)^{-1}$;

е) $3^{-1}+\dfrac{-117\cdot 16^{-1}+5\cdot\left(\frac{4}{7}\right)^{-2}}{-2+0{,}1^{-1}}\cdot\left(\frac{3}{4}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right)^{-1}$.

ж) $\dfrac{8^{-\frac{2}{3}}\cdot 25^{-\frac{1}{2}}\cdot 2^{-1}}{64^{0{,}25}\cdot 2^{0{,}5}}$; з) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-9{,}25}\cdot 16^{\frac{1}{2}}-2^{-1}\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 8^{\frac{1}{3}}$.

3. Упростить: а) $\dfrac{4a-9a^{-1}}{2a^{0{,}5}-3a^{-0{,}5}}+\dfrac{a+3a^{-1}-4a^{0}}{a^{0{,}5}-a^{-0{,}5}}$; б) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}$;

в) $\dfrac{1-a^{-\frac{1}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}{a-1}$.

2. Логарифм с произвольным основанием; основные свойства логарифмов.

2.1 Определение. Логарифмом числа N по основанию a называется показатель степени x, в которую надо возвести основание a, чтобы получить число N.

Равенство $\log_a N = x$ означает, что $a^x = N$.

$\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$; $\log_3 81 = 4 \Leftrightarrow 3^4 = 81$; $\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$.

Логарифм числа по основанию 10 называется десятичным, а логарифм числа по основанию e, где e=2,7182818… , называется натуральным. Таким образом, $\log_{10} x = \lg x$; $\log_e x = \ln x$.

$\lg 100 = 2 \Leftrightarrow 10^2 = 100$; $\lg 0{,}0001 = -4 \Leftrightarrow 10^{-4} = 0{,}0001$; $\lg 1000 = 3 \Leftrightarrow 10^3 = 1000$

Из определения логарифма вытекает основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a N} = N$ ($N>0$; $a>0$, $a \neq 1$)

а) $2^{\log_2 8} = 8$; б) $7^{\log_7 5} = 5$; в) $11^{\log_{11} 7} = 7$; г) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 4} = 4$.

Тренировочные упражнения.

1. Используя определение логарифма, вычислите:

а) $\log_2 64$; б) $\log_2 \frac{1}{4}$; в) $\log_4 64$; г) $\log_{\frac{1}{3}} 27$; д) $\log_3 1$; е) $\log_5 5\sqrt[3]{5}$;

ж) $\log_4 (\log_2 16)^2$; з) $\log_{0,04} 5$; и) $2\log_5 25 + 3\log_2 64$; к) $5 \cdot 3^{\log_3 4}$.

2. Найдите x:

а) $\log_4 x = -3$; б) $\log_x \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$; в) $\log_x 0{,}125 = 2$; г) $\log_x \frac{1}{27} = -2$;

д) $\log_{3,5} x = 0$; е) $\log_x 4 = -\frac{1}{2}$; ж) $\log_5 x = -3$; з) $\log_{16} x = \frac{3}{4}$.

2.2. Свойства логарифмов.

Отрицательные числа и нуль не имеют логарифмов.

При любом основании a ($a>0$; $a \neq 1$) логарифм единицы равен нулю $\log_a 1 = 0$.

Логарифм числа, равного основанию, всегда есть единица $\log_a a = 1$ ($a>0$; $a \neq 1$).

Если за основание логарифма взять число большее единицы, то большее число имеет больший логарифм. Логарифмы чисел больших единицы положительны, меньших - отрицательны.

Логарифм произведения двух чисел равен сумме логарифмов этих чисел: $\log_a (N_1 \cdot N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2$ (теорема о логарифме произведения).

Логарифм частного двух чисел равен разности логарифмов этих чисел: $\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2$ (теорема о логарифме частного).

Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания: $\log_a (N^m) = m\log_a N$ (терема о логарифме степени).

$\log_a \sqrt[m]{N} = \frac{1}{m}\log_a N$; $\log_{a^n} N = \frac{1}{n}\log_a N$ - следствия из теоремы о логарифме степени.

Зависимость между логарифмами чисел при разных основаниях: $\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$; $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

Прологарифмировать выражение - значит, выразить его логарифм через логарифмы, входящих в это выражение чисел. Действие обратное логарифмированию называется потенцированием.

Тренировочные упражнения.

1. Найдите логарифмы данных чисел по основанию a:

а) 25; $\frac{1}{5}$; $\sqrt{5}$ при a =5; б) 64; $\frac{1}{8}$; 2 при a =8;

в) 16; $\frac{1}{4}$; $\sqrt{2}$ при a =2; г) 27; $\frac{1}{9}$; $\sqrt{3}$ при a =3.

2. Упростите выражения, пользуясь основным логарифмическим тождеством:

а) $3^{\log_3 11}$; б) $5^{1+\log_5 3}$; в) $10^{1-\lg 2}$; г) $3^{2+\log_3 18}$; д) $4^{2\log_4 3}$; е) $0{,}4^{2\log_{0,4} 3}$.

3. Прологарифмировать по основанию 2, где a>0; b>0; c>0:

а) $\frac{4ab^2}{c^3}$; б) $8a^2 \cdot b$; в) $\sqrt{c} \cdot \frac{1}{2} \cdot a$.

4. Вычислите: а) $\log_{12} 4 + \log_{12} 36$; б) $\log_2 7 - \log_2 \frac{7}{16}$; в) $2\log_5 25 + 3\log_2 64$;

г) $\log_4 (\log_2 16)^2$; д) $\log_3 (\log_2 (\lg 100))$.

5. Найти х, если: а) $\log_6 x = 3\log_6 2 + 0{,}5\log_6 25 - \log_6 40$;

б) $\log_4 x = \frac{1}{3}\log_4 216 - 2\log_4 10.$

3. Преобразование и вычисление логарифмических выражений.

1. Записать с помощью логарифма:

а) $3^2 = 9$; б) $2^{-3} = 8$; в) $9^{\frac{1}{2}} = 3$; г) $7^0 = 1$; д) $27^{\frac{2}{3}} = 9$; е) $3^{-1} = \frac{1}{3}$.

2. Вычислите: а) $\log_4 \log_2 \log_3 81$; б) $\log_3 5 \cdot \log_{25} 27$; в) $\frac{\log_3 135}{\log_{15} 3} - \frac{\log_3 5}{\log_{405} 3}$;

г) $\frac{81^{\frac{1}{\log_5 9}} + 3^{\frac{3}{\log_{\sqrt{6}} 3}}}{409} \cdot \left(\left(\sqrt{7}\right)^{2\log_7 25} - 125^{\log_{25} 6} \right)$; д) $16^{0,5\log_4 10+1}$.

3. Известно, что $\log_5 2 = a; \log_5 3 = b$, выразите через a и b :

а) $\log_5 72$; б) $\log_5 15$; в) $\log_3 12$; г) $\log_5 30$.

Показательная функция, её свойства и график.

Функция вида $y = a^x$ (где а>0; а$\neq$ 1) называется *показательной функцией.*

Перечислим основные свойства функции.

Область определения: множество всех действительных чисел.

Область значения: множество всех положительных действительных чисел.

Показательная функция строго монотонна; при a>1 функция возрастает на всей области определения (рис.2), при 0 < a < 1 - убывает (рис.1) .

Функция ни чётная, ни нечётная; ограниченная.

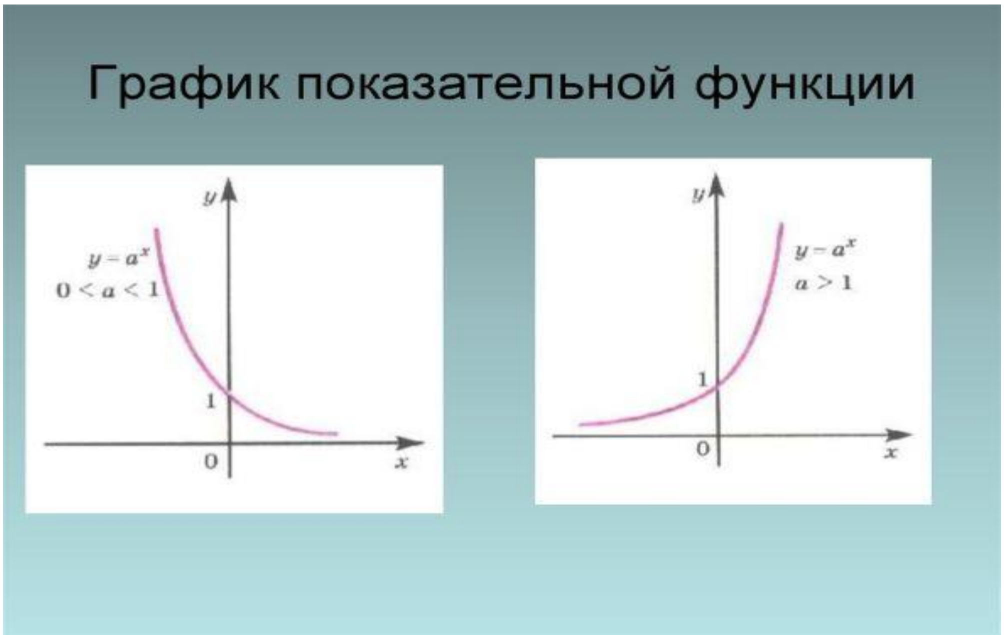

Рис.1 Рис.2

Тренировочные упражнения.

1. Перечислите свойства и постройте графики функций: а) $y = 3^x$; б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.
2. Укажите, какая из данных функций является возрастающей, какая - убывающей на множестве действительных чисел:

   а) $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$; б) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$; в) $y = e^x$; г) $y = e^{-x}$.

3. Постройте схематично графики функций, указать область определения и область значения:

   а) $y = 2^{x+1}$; б) $y = 4^x - 3$; в) $y = (0{,}6)^{x-3} + 2$; г) $y = e^{-x} - 4$; д) $y = 3^{x-4} + 5$.

4. Сравнить: а) $4{,}3^5$ и $4{,}3^6$; б) $0{,}3^{4{,}3}$ и $0{,}3^{5{,}4}$; в) 7^{-4} и 7^{-3}.

5. Логарифмическая функция, её свойства и график.

Функция вида $y = \log_a x$, где a >0; $a \neq 1$, называется логарифмической.

Основные свойства функции.

Область определения логарифмической функции - множество всех положительных действительны чисел.

Область значения - множество всех действительных чисел.

Монотонность: если $a > 1$, то логарифмическая функция строго возрастает(рис.3.), если $0 < a < 1$ - строго убывает (рис. 4.) Функция ни чётная, ни нечётная. Неограниченная.

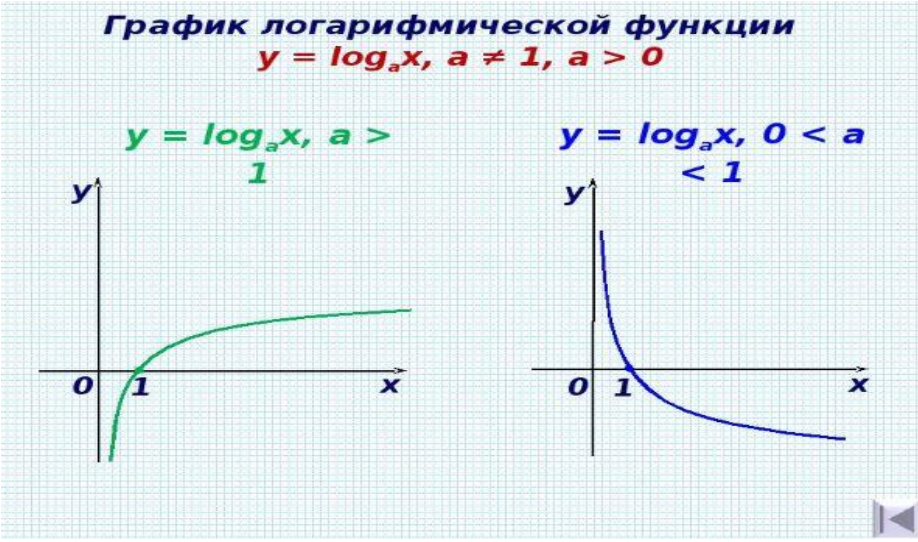

Рис. 3. Рис. 4.

Показательная и логарифмическая функции с одинаковыми основаниями являются взаимно обратными. Их графики симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 5.)

Рис. 5.

Тренировочные упражнения.

1. Найти область определения функций: а) $y=\log_2(x^2-3x-4)$;

   б) $y=\log_3\dfrac{3x+6}{x-2}$; в) $y=\log_2(10-5x)$; г) $y=\log_2(9-x^2)$.

2.Сравнить числа: $\log_2 3{,}8$ и $\log_2 4{,}7$; $\log_{\frac{1}{3}} 0{,}15$ и $\log_{\frac{1}{3}} 0{,}2$; $\log_3 5{,}1$ и $\log_3 4{,}9$; $\log_{0,2} 1{,}8$ и $\log_{0,2} 2{,}1$; $\log_{\sqrt{3}} 3$ и $\log_{\sqrt{3}} 1$.

3. Построить схематически графики функций:

а) $y=\log_2 x+1$; б) $y=\log_{\frac{1}{5}}(x-2)$; в) $y=\log_{0,7}(x+2)-1$; г) $y=\log_2(x-3)$;

д) $y=\log_{\frac{1}{2}} x-1$; е) $y=\ln(x-3)$; ж) $y=\lg(-x+1)$; з) $y=\log_{0,1} x$;

и) $y=-5+\lg x$.

6. Контрольные вопросы и упражнения для закрепления темы и подготовки к зачёту.

1. Сформулируйте определение показательной функции. Приведите примеры показательной функции. Изобразите схематично график функции $y=a^x$ при a>1; при 0<a<1.
2. Начертите графики функций $y=2^x$ и $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ и опишите их свойства.
3. Сравните с единицей числа: а) $e^{-\pi}$; б) $\dfrac{1}{e}$; в) $\left(\dfrac{1}{e}\right)^{-3}$.
4. Сформулируйте определение логарифма числа с произвольным основанием, теоремы о логарифме произведения, частного, степени.
5. Вычислите: а) $\log_2 5+\log_2 1{,}6$; б) $\log_3 10-\log_3\dfrac{10}{9}$.
6. Прологарифмируйте по основанию 10: $x=\sqrt{10}\cdot\dfrac{a+b}{c}$.
7. Найдите х:

а) $\log_3 x=\log_3 18-\dfrac{1}{3}\log_3 8$; б) $\log_3 x=2\log_3 7+\dfrac{1}{5}\log_3 32-\dfrac{1}{2}\log_3 196$.

8. Сформулируйте определение логарифмической функции. Приведите примеры логарифмических функций. Изобразите схематично график функции $y=\log_a x$ при a>1; при 0< a <1 .
9. Найдите область определения функций: а) $y=\log_3(x+6)$;

   б) $y=\lg(x^2-5x+6)$.

Варианты самостоятельной работы 1

Вариант №

1. Вычислить: а) $\log_2 16$; б) $\lg 1000$; в) $\log_{\frac{1}{27}} 3$; г) $25^{\log_{\sqrt{5}} 7}$;

д) $\log_4 2 + \log_4 8$; е) $\log_3 8 - 2\log_3 2 + \log_3 \frac{9}{2}$.

2. Прологарифмировать по основанию 2 : $x = \frac{a^2 c}{\sqrt{b}}$

Вариант №

1. Вычислить: а) $\log_3 \frac{1}{81}$; б) $\lg 0{,}01$; в) $\log_5 \frac{1}{125}$; г) $4^{2\log_4 7}$;

д) $\log_2 5 + \log_2 \frac{8}{5}$; е) $2\log_7 32 - \log_7 256 - 2\log_7 14$.

2. Прологарифмировать по основанию 5: $x = \frac{y}{k^3} \cdot \sqrt{t}$

Вариант №

1. Вычислить: а) $\log_4 32$; б) $10^{2\lg 0{,}5}$; в) $\log_5 \frac{1}{5\sqrt{5}}$; г) $e^{2\ln 5}$;

д) $\log_5 175 - \log_5 7$: е) $\log_3 72 - \log_3 \frac{16}{27} + \log_3 18$.

2. Перейти к логарифму с основанием 10: а) $\log_3 2$; б) $\log_5 10$.

Вариант №

1. Вычислить: а) $9^{\log_3 \sqrt{5}}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 5}$; в) $2^{\log_2 4}$; г) $\log_{\frac{1}{2}} 8$;

д) $\log_5 8 - \log_5 2 + \log_5 \frac{25}{4}$; е) $\log_2 12 + \log_2 \frac{5}{3} + \log_2 \frac{4}{5}$.

2. Перейти к логарифму с основанием 2: а) $\log_3 8$; б) $\ln 4$.

Варианты самостоятельной работы 2

Вариант №

1. Укажите область определения функций:

   а) $y = \log_3(x^2 - \frac{1}{16})$; б) $y = 7^{x-4}$;
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2^x . x \in [-1;1]$
3. Определите монотонность функций: а) $y = 2^{-x}$; б) $y = \lg_{0,1}(x-3)$
4. Постройте схематично графики функций: а) $y = \log_{0,2}(x-3)$; б) $y = 3^{x-3} - 1$.

Вариант №

1. Укажите область определения функций:

а) $y=(0,6)^{x-1}$; б) $y=\lg|x|$.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=3^x; x\in[0;2]$
3. Определите монотонность функций: а) $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$; б) $y=e^{-2x}$
4. Постройте схематично графики функций: а) $y=0,6^{x-3}-2$;

б) $y=\lg(x-2)$.

Вариант №

1. Укажите область определения функций: а) $y=\lg(x^2-4)$;

б) $y=6^{x-2}$.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=3\lg x+2; x\in[1;100]$.
3. Определите монотонность функций: а) $y=\ln(x-3)$; б) $y=\left(\frac{1}{e}\right)^{-x}$;
4. Постройте схематично графики функций: а) $y=0,4^{x-4}+1$;

б) $y=\log_4(x+3)-2$

Список литературы.

1. Богомолов Н.В., практические занятия про математике, учебное пособие для техникумов, М. Высшая школа, 2003 г.;
2. Гусев В.А., Мордкович А.Г., математика, справочные материалы, учебное пособие, М., Просвещение, 1986 г.;
3. Математика. А.А. Дадаян, М. Профессиональное образование, 2004 г.