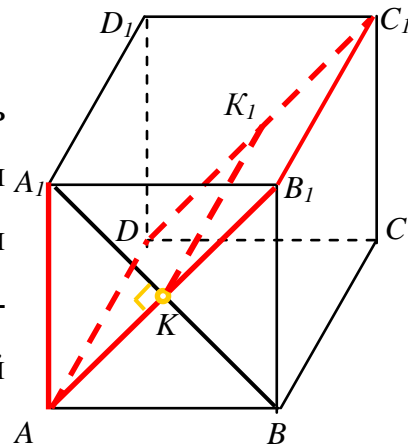


**Задача 1.** Докажите, что в кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  прямая  $A_1 B$  перпендикулярна плоскости  $AB_1 C_1$ .

**Решение.**

1. Изобразим куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .
2. Построим прямую  $A_1 B$  и плоскость  $AB_1 C_1$ . В сечении получаем параллелограмм  $AB_1 C_1 D$  (вспоминаем, что линиями пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью являются параллельные между собой прямые).



3. Докажем, что  $AB_1 C_1 D$  – прямоугольник (для наглядности изменим точку обзора на компьютере и убедимся в этом). Для этого достаточно показать, что угол  $AB_1 C_1$  – прямой. Так в кубе ребро  $B_1 C_1$  перпендикулярно ребрам  $A_1 B_1$  и  $B_1 B$ , то по признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая  $B_1 C_1$  перпендикулярна плоскости  $AB_1 C_1$ , а значит, по определению перпендикулярности прямой и плоскости, перпендикулярна и прямой  $AB_1$ .

Итак, в параллелограмме  $AB_1 C_1 D$  угол  $B_1$  – прямой. Следовательно,  $AB_1 C_1 D$  – прямоугольник

4. Отметим точку  $K$  – пересечение диагоналей  $A_1 B$  и  $AB_1$ . Построим прямую  $KK_1$ , параллельную стороне  $B_1 C_1$ . Из условий  $KK_1 \parallel B_1 C_1$  и  $B_1 C_1 \perp (AB_1 C_1)$  следует  $KK_1 \perp (AB_1 C_1)$ .

5. Из перпендикулярности прямой  $KK_1$  и плоскости  $AB_1 C_1$  следует, что прямая  $KK_1$  перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости  $AB_1 C_1$  и проходящей через точку  $K$ , следовательно,  $KK_1 \perp AB_1$ .

6. Заметим, что прямые  $AB_1$  и  $KK_1$  лежат в плоскости  $AB_1 C_1$ , при этом  $A_1 B \perp AB_1$  (диагонали квадрата) и  $AB_1 \perp KK_1$ . По признаку перпендикулярности прямой и плоскости получаем  $AB_1 \perp (AB_1 C_1)$ . Задача решена.

**Замечание.** В условии задачи существенно, что  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – куб. Компьютер позволяет смоделировать ситуацию, когда в параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребрами равной длины прямая  $A_1 B$  не перпендикулярна плоскости  $AB_1 C_1$ .

**Задача 2.** В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найдите угол между прямой  $AA_1$  и плоскостью  $AB_1 C_1$ .

**Решение.**

1. Построим куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .
2. Изобразим прямую  $AA_1$  и плоскость  $AB_1 C_1$ .
3. Необходимо опустить перпендикуляр из точки  $A_1$  на плоскость  $AB_1 C_1 D$ . Этот перпендикуляр пересекает плоскость в точке  $K$  (задача 1).

4.  $AK$  – проекция прямой  $AA_1$  на плоскость  $AB_1 C_1 D$ .

5. Угол между прямой  $AA_1$  и её проекцией  $AK$ , а значит, и угол между прямой  $AA_1$  и плоскостью  $AB_1 C_1$  равен 45 градусов. Задача решена.

