1.1. Основные понятия метода координат

Прямоугольная декартова система координат на плоскости.

Сущность координатного метода на плоскости заключается в задании системы координат, после чего каждую точку плоскости можно охарактеризовать парой действительных чисел, ее координатами, а геометрические фигуры задавать аналитическими условиями (уравнением, неравенством, системой уравнений или неравенств). Чтобы ввести прямоугольную систему координат, необходимо провести на плоскости две взаимно перпендикулярные прямые, выбрать на каждой из них положительное направление и масштаб. Прямоугольную систему координат на плоскости обычно обозначают Oxy, где Ox и Oy ее координатные оси. Ось Ox называют осью абсцисс, а ось Oy - осью ординат.

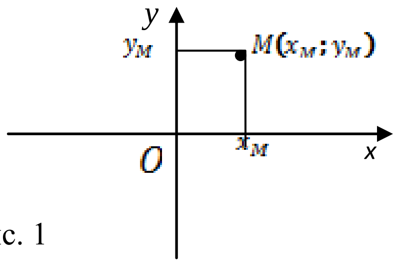


Рис. 1

Каждой точке плоскости в заданной прямоугольной декартовой системе координат соответствует единственная упорядоченная пара действительных чисел $(x_M; y_M)$ называемых координатами точки **M** на плоскости. Координату x_M называют абсциссой точки **M**, а y_M - ординатой точки **M**.

Трехмерная прямоугольная система координат в пространстве.

Для задания декартовой прямоугольной системы координат в пространстве выбирают перпендикулярные прямые, называемые осями. Точка пересечения осей **O** называется началом координат.

Декартовыми прямоугольными координатами точки P в прямоугольной трехмерной системе координат называются взятые с определенным знаком расстояния (выраженные в единицах масштаба) этой точки до осей координат или проекции радиус-вектора r точки Pна три взаимно перпендикулярные координатные оси.

В пространстве координаты x, y, z называются соответственно абсциссой, ординатой и аппликатой. В зависимости от взаимного расположения положительных направлений координатных осей возможны правая (рис. 2) и левая (рис. 3) координатные системы.

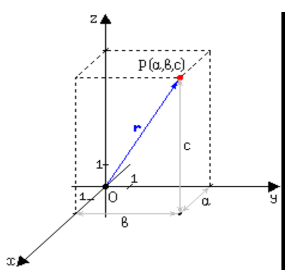


Рис.

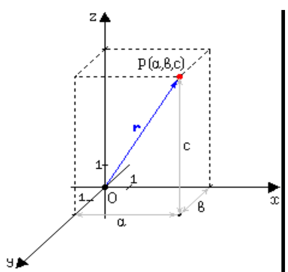


Рис.

Определение 1. Расстоянием между двумя точками называется длина отрезка, что соединяет эти точки.

Расстояние между двумя точками $A\ (x_1; y_1)$ и $B\ (x_2; y_2)$ на плоскости вычисляется по формуле: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Расстояние между двумя точками $A\ (x_1; y_1; z_1)$ и $B\ (x_2; y_2; z_2)$ в пространстве вычисляется по формуле: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Следующие определения, теоремы, следствия и формулы применимы как на плоскости, так и в пространстве.

Определение 2. Середина отрезка – это точка, которая лежит на отрезке и находится на равном расстоянии от конечных точек.

Каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.

В прямоугольной системе координат $Oxyz$ отметим точку А с координатами $(x_1; y_1; z_1)$ и точку В с координатами $(x_2; y_2; z_2)$.

Координаты середины отрезка АВ вычисляются по формуле:

$$x_C = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y_C = \frac{y_1 + y_2}{2};\ z_C = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Следствие 1. Точка С тогда и только тогда является серединой отрезка АВ, когда $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$, где O – произвольная точка плоскости.

Определение 3. Разделить отрезок, значит найти на заданном отрезкетакую точку М, для которой имеет место равенство:

$$\frac{MM_1}{MM_2} = \alpha.$$

Пусть даны точки $M(x_1; y_1)$ и $M_1(x_2; y_2)$. Координаты точки $M\ (x; y)$ вычисляются по формуле:

$$x = \frac{x_1 + \alpha x_2}{1 + \alpha}, \qquad y = \frac{y_1 + \alpha y_2}{1 + \alpha}.$$

1.2 Основные понятия векторного метода

В настоящее время понятие «вектор» имеет различные определения.

По Л. С. Атанасяну: «Отрезок, для которого указано, какой из его концов называется началом, а какой – концом, называется направленным отрезком или вектором» (рис 4).

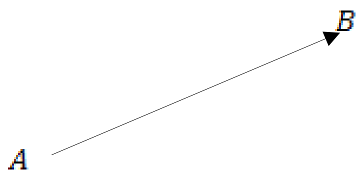


Рис. 4

М. Воловичем было предложено более точное определение: «Вектор – это пара точек, одна из которых является первой. Каждая задающая направленный отрезок пара различных точек задает луч, который начинается в первой из точек пары и проходит через вторую точку, и расстояние между точками. Луч называется направлением направленного отрезка, расстояние между точками – его модулем или длиной».

По В.А. Гусеву: «Под вектором понимается либо множество упорядоченных точек, задающих некий параллельный перенос, либо сам этотперенос».

В.М. Болтянский считает, что «Вектором правильнее называть не один направленный отрезок, а семейство всех равных, параллельных и одинаково направленных отрезков».

Определение 4. Вектор, у которого начало совпадает с концом, называется нулевым вектором.

Определение 5. Длина отрезка АВ называется длиной или модулем вектора $\overline{AB}$.

Определение 6. Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на параллельных прямых или одной прямой.

Определение 7. Векторы, лежащие в одной плоскости или в параллельных плоскостях называются компланарными.

Определение 8. Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – два произвольных вектора на плоскости (рис. 5). Возьмем на плоскости произвольную точку O и отложим вектор $\overline{OM}$, равный вектору $\bar{a}$. Затем от точки М отложим вектор $\overline{MN}$, равный вектору $\vec{b}$. Вектор $\overline{ON}$ называется суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и обозначается через $\bar{a}+\bar{b}$.

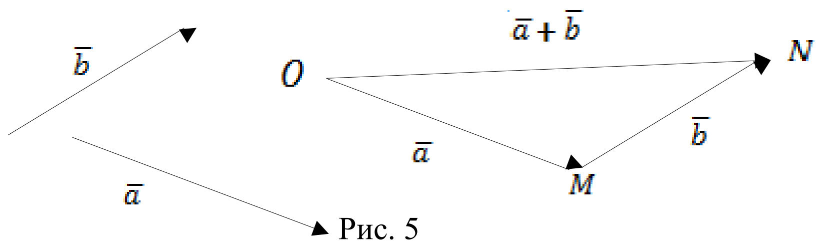


Рис. 5

Свойства сложения векторов:

1. $a+\bar{b}=\bar{b}+a$ (коммутативность).

2. $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$ (ассоциативность).

Определение 9.

Разностью векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется такой вектор $\vec{x}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{x},$$

$$\vec{b}+\vec{x}=\vec{a},$$

$$\vec{x}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

Для получения разности $\vec{a}-\vec{b}$ достаточно отложить векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от одной точки и взять вектор, идущий из конца вектора $\vec{b}$ к концу вектора $\vec{a}$.

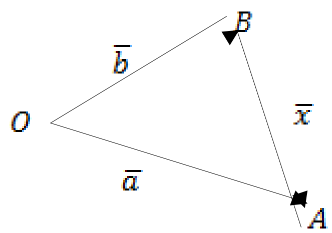


Рис. 6

Определение 10. Углом между векторами, отложенными от одной точки, называется наименьший угол, на который нужно повернуть один из векторов вокруг своего начала до положения сонаправленности с другим вектором. Угол выражается из формулы скалярного произведения.

Определение 11. Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})$$

Свойства скалярного произведения:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (коммутативность)
2. $(\bar{a}+\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\bar{c}+\bar{b}\cdot\bar{c}$ (дистрибутивность)
3. $m\vec{a}\cdot n\vec{b}=(mn)\vec{a}\cdot\vec{b}$, т.е. числовой множитель можно выносить за знак скалярного произведения.
4. Если $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\cos(\vec{a},\vec{b})=0$ и $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
5. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}$
6. $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$

Определение 12. Проекции x, y вектора $\vec{a}$ на оси координатназываются координатами вектора $\vec{a}$.

Скалярное произведение двух векторов на плоскости и в пространствеможно вычислить, зная координаты этих векторов. Скалярное произведение векторов $\vec{a}\{x_1;y_1;z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;y_2;z_2\}$ выражается формулой:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$$

Рассмотрим правила, которые позволяют по координатам данных векторов найти координаты их суммы и разности, а также координаты произведения данного вектора на число.

1. Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов.

Другими словами, если $\vec{a}\{x_1;y_1;z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;y_2;z_2\}$ - данные векторы, то вектор $\vec{a}+\vec{b}$ имеет координаты $\{x_1+x_2;y_1+y_2;z_1+z_2\}$.

2. Каждая координата разности двух векторов равна разностисоответствующих координат этих векторов.

Другими словами, если $\vec{a}\{x_1;y_1;z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;y_2;z_2\}$ - данные векторы, то вектор $\vec{a}-\vec{b}$ имеет координаты $\{x_1-x_2;y_1-y_2;z_1-z_2\}$.

3. Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число.

Другими словами, если $\vec{a}\{x;y;z\}$ – данный вектор, α –данное число, то вектор $\alpha\cdot\vec{a}$

имеет координаты $\{\alpha x; \alpha y; \alpha z\}$

Теорема 1. Пусть xOy – прямоугольная система координат на плоскости, а $\vec{i}, \vec{j}$ - единичные векторы оси Ox и Oy

Для любого вектор $\vec{a}$ справедливо равенство: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$, где x, y – координаты вектора в системе xOy.

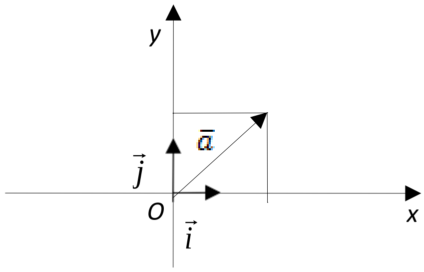


Рис. 7

Теорема 2. Пусть XOYZ - трехмерная прямоугольная система координат, а $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичные векторы оси Ox, Oy, Oz.

Для любого вектора $\vec{a}$ справедливо равенство: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, где x, y, z – координаты вектора в системе XOYZ.

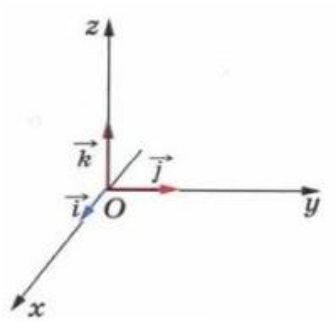


Рис. 8

Определение 13. Вектор, конец которого совпадает с данной точкой, аначало – с началом координат, называется радиус-вектором данной точки.

Для решения задач необходимо ввести систему координат.

Координаты вершин многогранников в декартовой системе координат

1. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a .

Пусть начало координат находится в точке A , направление координатных осей показано на рис. 9. Тогда вершины куба имеют координаты:
$A(0; 0; 0)$, $B(0; a; 0)$, $C(a; a; 0)$, $D(a; 0; 0)$, A_1 $(0; 0; a)$, $B_1(0; a; a)$, $C_1(a; a; a)$, $D_1(a; 0; a)$.

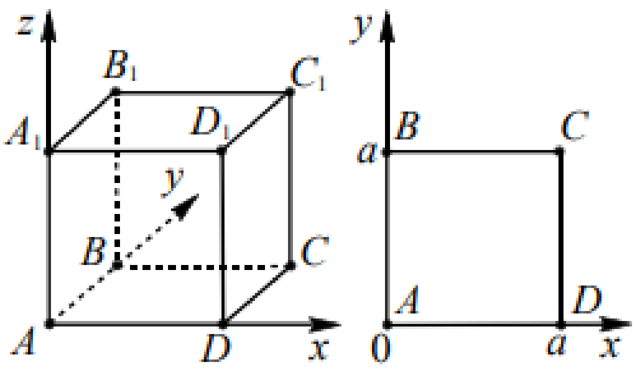


Рис. 9

Такое же расположение системы координат удобно использовать для прямоугольного параллелепипеда. Еще один вариант расположения прямоугольного параллелепипеда (куба) относительно декартовой системы координат связан с размещением начала координат в точке пересечения диагоналей основания.

2. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, сторона основания которой равна $\boldsymbol{a}$, а боковое ребро $\boldsymbol{b}$**.**

Пусть начало координат находится в точке A, ось x направлена вдоль ребра AC, ось y проходит через точку A перпендикулярно AC, ось z направлена вдоль бокового ребра AA_1 (см.рис. 10). Тогда вершины призмы имеют координаты: $A(0;0;0)$, $B\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $C(a;0;0)$,

$A_1(0;0;b)$, $B_1\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};b\right)$, $C(a;0;b)$.

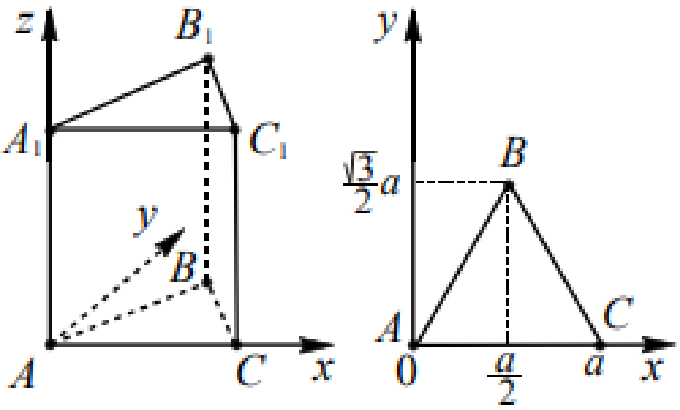


Рис. 10

3. Правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, сторона основания которой равна $\boldsymbol{a}$, а боковое ребро $\boldsymbol{b}$.

Пусть начало координат находится в точке A, ось $\boldsymbol{x}$ направлена вдоль ребра AF, ось $\boldsymbol{y}$ проходит через точку A перпендикулярно AF, ось $\boldsymbol{z}$ направлена вдоль бокового ребра AA_1 (см. рис. 11). Тогда вершины призмы имеют координаты: $A(0;0;0)$, $B\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $C\left(0;a\sqrt{3};0\right)$,

$D\left(a;a\sqrt{3};0\right)$, $E\left(\frac{3a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $F(a;0;0)$, $A_1(0;0;b)$, $B_1\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};b\right)$, $C_1\left(0;a\sqrt{3};b\right)$, $D_1\left(a;a\sqrt{3};b\right)$,

$E_1\left(\frac{3a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};b\right)$, $F_1(a;0;b)$.

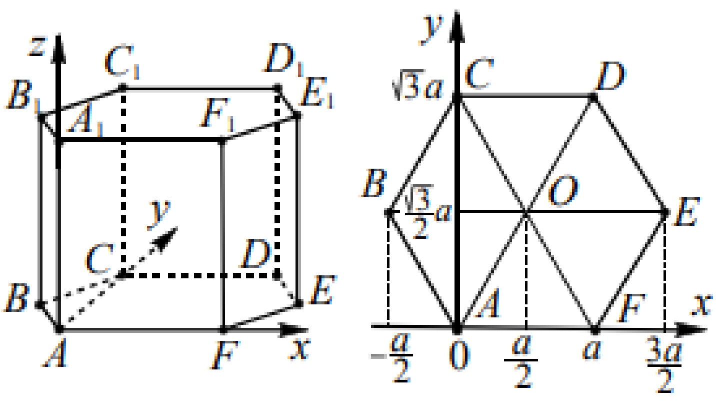


Рис. 11

На выносном чертеже основания $AD = BE = CF = 2a$, $AC = \sqrt{CF^2 - AF^2} = a\sqrt{3}$.

4. Правильная треугольная пирамида *MABC*, сторона основания которой равна ***a***, а высота ***h***.

Обычно используют один из двух вариантов расположения системы координат.

4.1. Пусть начало координат находится в точке *A*, ось ***x*** направлена вдоль ребра *AC*, ось ***y*** проходит через точку *A* перпендикулярно *AC*, ось ***z*** проходит через точку *A* перпендикулярно плоскости *ABC* (см. рис. 12). Тогда вершины пирамиды имеют координаты:

$$A(0;0;0),\ B\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right),\ C(a;0;0),\ M\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{6};h\right).$$

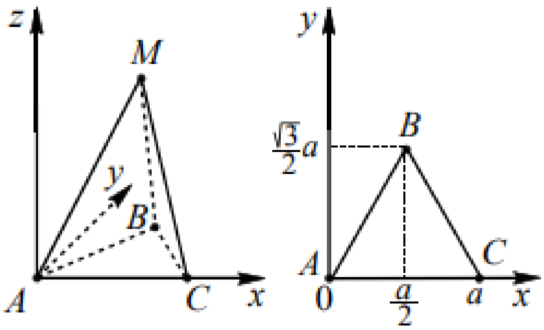


Рис. 12

4.2. Пусть начало координат находится в центре треугольника *ABC* в точке *O*, ось ***x*** проходит через точку *O* параллельно ребру *AC*, ось ***y*** проходит через точку *O* перпендикулярно *AC*, ось ***z*** проходит через точку *O* перпендикулярно плоскости *ABC* (см. рис. 13). Тогда вершины пирамиды имеют координаты: $A\left(-\frac{a}{2};-\frac{a\sqrt{3}}{6};0\right)$, $B\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{3};0\right)$, $C\left(\frac{a}{2};-\frac{a\sqrt{3}}{6};0\right)$, $M(0;0;h)$.

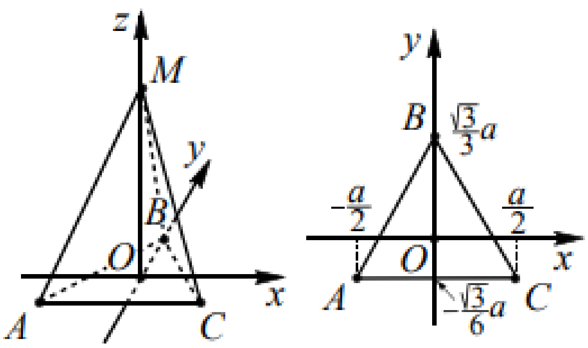


Рис. 13

5. Правильная четырехугольная пирамида *MABC*, сторона основания которой равна ***a***, а высота ***h***.

Обычно используют один из двух вариантов расположения системы координат.

5.1. Пусть начало координат находится в точке *A*, ось ***x*** направлена вдоль ребра *AD*, ось ***y*** – вдоль ребра *AB*, ось ***z*** проходит через точку *A* перпендикулярно плоскости *ABC* (см. рис. 14). Тогда вершины пирамиды имеют координаты: $A(0;0;0)$, $B(0;a;0)$, $C(a;a;0)$, $D(a;0;0)$, $M\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};h\right)$.

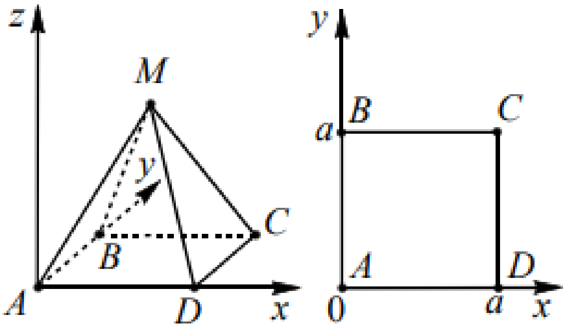


Рис. 14

5.2. Пусть начало координат находится в центре основания в точке *O*, ось ***x*** проходит через точку *O* параллельно ребру *AD*, ось ***y*** проходит через точку *O* параллельно ребру *AB*, ось ***z*** проходит через точку *O* перпендикулярно плоскости основания (см. рис. 15). Тогда вершины пирамиды имеют координаты: $A\left(-\frac{a}{2};-\frac{a}{2};0\right)$, $B\left(-\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$, $C\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$, $D\left(\frac{a}{2};-\frac{a}{2};0\right)$, $M(0;0;h)$.

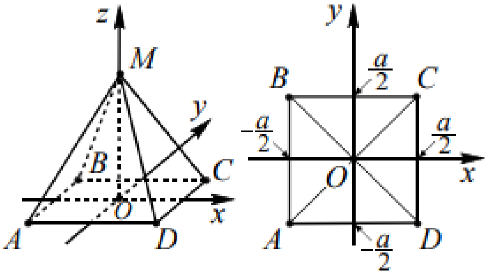


Рис. 15

6. Правильная шестиугольная пирамида *MABCDEF*, сторона основания которой равна ***a***, а высота ***h***.

Пусть начало координат находится в точке *A*, ось ***x*** направлена вдоль ребра *AC*, ось ***y*** проходит через точку *A* перпендикулярно *AC*, ось ***z*** проходит через точку *A* перпендикулярно плоскости *ABC* (см. рис. 16). Тогда вершины пирамиды имеют координаты:

$A(0;0;0)$, $B\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $C\left(0;a\sqrt{3};0\right)$, $D\left(a;a\sqrt{3};0\right)$, $E\left(\frac{3a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $F(a;0;0)$, $M\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};h\right)$.

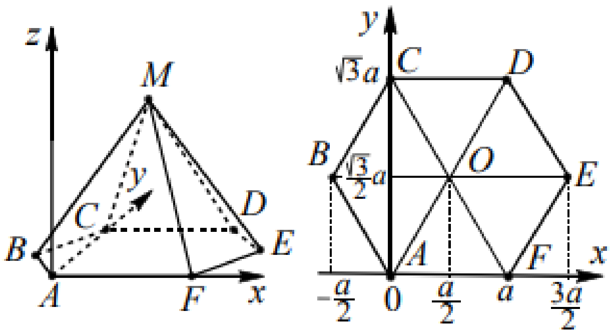


Рис. 16

Сущность координатно-векторного метода

Чтобы использовать в решении задач координатно-векторный метод, необходимо знать формулы косинуса и синуса угла между векторами; уметь составлять уравнение прямой и уравнение плоскости; знать формулынахождения расстояний.

Определение 14. Уравнением линии на плоскости называется уравнение $F(x,y)=0$, которому удовлетворяют координаты любой точки, принадлежащей этой линии, и не удовлетворяют координаты никакой другой точки.

Теорема 3. В декартовой системе координат любая плоскость задается уравнением:

$Ax+By+Cz+D=0$, где A, B, C – координаты вектора нормали к плоскости.

Определение 15. Нормальный вектор к плоскости – любой вектор, перпендикулярный данной плоскости.

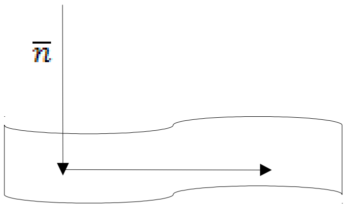


Рис. 17

Теорема 4. Любое уравнение первой степени в декартовой системе координат задает плоскость

Теорема 5. Два уравнения первой степени задают одну и ту же плоскость в том и только в том случае, когда одно получается из другого умножением на число.

Выведем общее уравнение прямой:

Пусть дана прямоугольная система координат ***Оху*** (рис. 18). Отметим точки $A(a;0)$, $B(0;b)$ и $M(x;y)$. Выберем направляющий вектор $\vec{v} = \overrightarrow{BA}(a;-b)$. Векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BM}$ – коллинеарные, следовательно: $\dfrac{x-a}{a} = \dfrac{y}{-b}$; $ab - bx = ay$; Так как ***F(x;y)=0***, то $-bx - ay + ab = 0$.

Таким образом $Ax + By + C = 0$ - общее уравнение прямой, где А, В, С – постоянные коэффициенты.

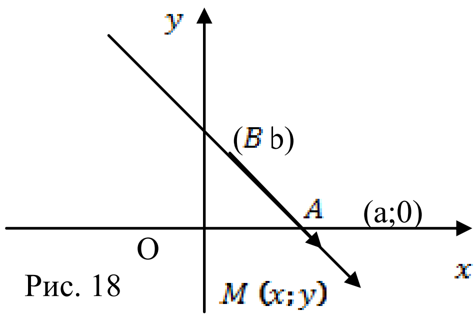


Рис. 18

Определение 16. Любой вектор, коллинеарный данной прямой, называется направляющим вектором этой прямой.

Определение 17. Углом между скрещивающимися прямыми называетсяугол между двумя прямыми, параллельными им и проходящими через произвольную точку.

Косинус угла α между ненулевыми векторами $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$вычисляется по формуле: $\cos\alpha = \dfrac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$.

Определение 18. Угол между плоскостями измеряется углом между нормалями к этим плоскостям и вычисляется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{|\overline{n} \cdot \overline{m}|}{|\overline{n}| \cdot |\overline{m}|}.$$

Определение 19. Углом между плоскостью и не перпендикулярной ей прямой называется угол между этой прямой и её проекцией на данную плоскость.

Синус угла между прямой, направляющий вектор которой имеет координаты $\overline{m} = (x_1; y_1; z_1)$ и плоскостью, заданной уравнением $ax + by + cz + d = 0$ вычисляется по формуле:

$$\sin\varphi = \frac{\left|\bar{n}\cdot\bar{m}\right|}{\left|\bar{n}\right|\cdot\left|\bar{m}\right|}$$, где $\bar{n}(a;b;c)$ вектор нормали к плоскости.

Определение 20. Расстояние от точки до прямой – это длина перпендикуляра, опущенного из точки на эту прямую.

Определение 21. Расстояние от точки до плоскости, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, опущенного из этой точки наплоскость.

Для того чтобы найти расстояние от точки до плоскости, необходимо найти координаты точки, и координаты нормали данной плоскости. После чего воспользоваться следующей формулой:

$$\rho(M;\alpha) = \frac{\left|ax_0 + by_0 + cz_0 + d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$, где точка $M(x_0; y_{0;}; z_0)$, плоскость α задана уравнением $ax+by+cz+d=0$.

Определение 22. Две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.

Исходя из вышесказанного, для решения геометрических задач координатно-векторным методом наиболее общим является следующий способ, представленный в виде алгоритма:

1. Ввести прямоугольную систему координат.
2. Найти координаты необходимых точек.
3. Найти координаты необходимых векторов.
4. Задать уравнения прямой и плоскости, если они необходимы.
5. Использовать формулу для решения конкретной задачи, выполнить вычисления.
6. Записать ответ.

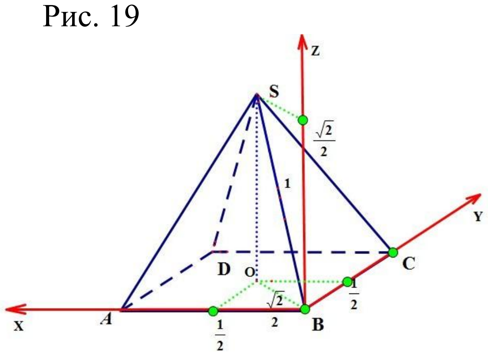
Глава 2. Применение координатно-векторного методадля решения геометрических задач.

Представленный в теоретической части материал помог нам составить классификацию задач, решаемых координатно-векторным методом. Рассмотрим некоторые задачи, при решении которых будет использован координатно-векторный метод.

1. Задачи на нахождение угла между скрещивающимися прямыми.
2. Задачи на нахождение угла между прямой и плоскостью.
3. Задачи на нахождение угла между плоскостями.
4. Задачи на нахождение расстояния от точки до плоскости.
5. Задачи на нахождения расстояния между плоскостями.
6. Задачи на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми.
7. Задачи на нахождение угла между плоскостями.

Задача 1. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ (рис. 19), все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой BD и плоскостью SBC.

Рис. 19



Решение:

1.Введём прямоугольную систему координат. Начало координат поместим в точку *B*, поэтому все координаты этой точки равны нулю.

2.Найдём координаты точек $B(0;0;0)$, $A(1;0;0)$, $C(0;1;0)$, $D(1;1;0)$.

Чтобы найти координаты точки *S*, сначала найдем координаты ее проекции на плоскость основания, а затем ее координаты по оси BZ: $O\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$, $S\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

3.Запишем уравнение плоскости SBC : $ax+by+cz+d=0$.

Так как плоскость SBC проходит через начало координат, получимсистему уравнений:

$$\begin{cases} b=0, \\ \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{\sqrt{2}}{2}c=0; \end{cases} \quad \begin{cases} b=0, \\ \frac{1}{2}a=-\frac{\sqrt{2}}{2}c. \end{cases}$$

Уравнение плоскости имеет вид: $-\sqrt{2}cx+cz=0$. Разделим обе части равенства на *c*, получим: $-\sqrt{2}x+z=0$.

Таким образом, вектор нормали к плоскости SBC имеет координаты: $\overline{n}(-\sqrt{2};0;1)$.

Найдем координаты направляющего вектора прямой *BD:* $\overline{BD}=\overline{(1-0;1-0;0-0)}$.

$\overline{BD}=\overline{(1;1;0)}$.

4.Воспользуемся формулой для нахождения угла между прямой и плоскостью:

$$\sin\alpha=\frac{\left|-\sqrt{2}\cdot 1\right|}{\sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2+1}\cdot\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\alpha=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Задача 2. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 20) со стороной основания 12 и высотой 21 на ребре AA_1 взята точка *M*, так *что* $\overline{AM}=8$. На ребре BB_1 взята точка *K* так, что $\overline{B_1K}=8$. Найдите угол между плоскостью D_1MK и плоскостью CC_1D_1 .

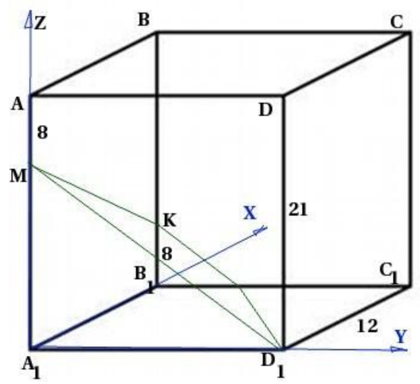


Рис. 20

Решение:

1.Введём прямоугольную систему координат с началом в точке A_1, оси которой совпадают с ребрами A_1B_1, A_1A, A_1D_1.

2.Найдём координаты точек $D_{1,} M, K, C, C_1$: $D_1(0;12;0), M(0;0;13), K(12;0;8), C(12;12;21), C\ (12;12;0)$.

3.Составим уравнение плоскости D_1MK : $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$; $\frac{a_1}{d_1}x + \frac{b_1}{d_1}y + \frac{c_1}{d_1}z + 1 = 0$

Можем переписать это уравнение в виде $A_1x + B_1y + C_1 + 1 = 0$.

$$\begin{cases} 12B_1 + 1 = 0, \\ 13C_1 + 1 = 0, \\ 12A_1 + 8C_1 + 1 = 0; \end{cases} \qquad B_1 = -\frac{1}{12}, C_1 = -\frac{1}{13}, A_1 = -\frac{5}{156}.$$

Таким образом, получим уравнение: $5x + 13y + 12z - 156 = 0$.

4.Составим уравнение плоскости CC_1D_1.

$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$; $\frac{a_2}{d_2}x + \frac{b_2}{d_2}y + \frac{c_2}{d_2}z + 1 = 0$. Можем переписать это уравнение в виде $A_2x + B_2y + C_2 + 1 = 0$.

$$\begin{cases} 12A_2 + 12B_2 + 21C_2 + 1 = 0, \\ 12A_2 + 12B_2 + 1 = 0, \\ 12B_2 + 1 = 0; \end{cases} \qquad B_2 = -\frac{1}{12}, A_2 = 0, C\ = 0.$$

Таким образом, получим уравнение: $y - 12 = 0$.

5.Воспользуемся формулой нахождения угла между плоскостями:

$$\cos\alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad \cos\alpha = \frac{5 \cdot 0 + 13 \cdot 1 + 12 \cdot 0}{\sqrt{5^2 + 13^2 + 12^2} \cdot \sqrt{1}}. \qquad \cos\alpha = \frac{13}{13\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\alpha = 45^\circ$.

Ответ: 45°.

Задача 3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB и CB_1. (рис. 21)

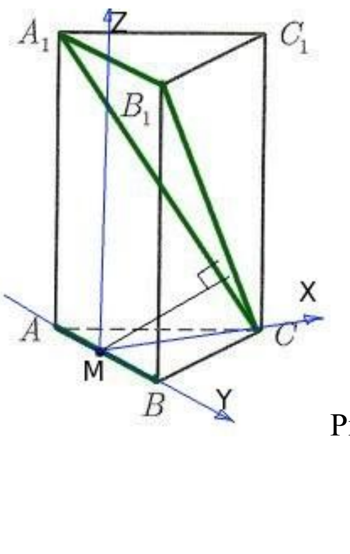


Рис. 21

Решение:

Расстояние между прямыми AB и CB_1 -есть расстояние отточки M, которая является серединой отрезка AB до плоскости . $A_1B_1C_1$.

1.Введём прямоугольную систему координат с началом в точке М.

2.Найдём координаты точек M, A_1, B_1, C:

$$A_1\left(0;-\frac{1}{2};1\right), B_1\left(0;\frac{1}{2};1\right), C\left(\frac{\sqrt{3}}{2};0;0\right), M(0;0;0).$$

3.Составим уравнение плоскости : $A_1B_1C_1$:

Чтобы найти коэффициенты *a*, *b*, *c* и *d* в уравнении $ax+by+cz+d=0$. плоскости $A_1B_1C_1$, примем коэффициент d =1, и подставим координаты точек A_1, B_1 и C в уравнение плоскости. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0\cdot a-\frac{1}{2}\cdot b+c+1=0, \\ 0\cdot a+\frac{1}{2}\cdot b+c+1=0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a+0\cdot b+0\cdot c+1=0; \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{1}{2}\cdot b+c+1=0, \\ \frac{1}{2}\cdot b+c+1=0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a+1=0; \end{cases} \quad \begin{cases} a=-\frac{2}{\sqrt{3}}, \\ b=0, \\ c=-1. \end{cases}$$

Воспользуемся формулой нахождения расстояния от точки доплоскости:

$$\rho(M;(A_1B_1C))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{\left|-\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 0+0\cdot 0+(-1)\cdot 0+1\right|}{\sqrt{\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+0^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}+1}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{7}{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Заключение

Координатно-векторный метод решения задач на сегодняшний день очень востребован, и позволяет решать фактически все виды математических, физических, астрономических и технических задач. Он имеет преимущество перед другими, так как не требует сложных построений в проекциях. Однако важно уметь правильно вводить систему координат индивидуально для каждой задачи. Недостатком данного метода является то, что нередко он требует большого объема вычислений.

Рассмотрела отдельно векторный метод, в котором представили все определения, операции над векторами, их скалярное умножение, базис на плоскости и в пространстве. В методе координат рассмотрела прямоугольную систему координат, нахождение расстояния между точками, вычисление середины отрезка, деление отрезка в заданном отношении. Объединив два метода, получила координатно-векторный метод и представили все необходимые определения, формулы, свойства и теоремы, применяемые для решения геометрических задач. Для решения задач в пространстве я составила обобщенный способ, представленный в виде алгоритма.

Список использованных источников

1. Атанасян, Л.С. Геометрия 10-11. М: Просвещение, 2013.
2. Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Многогранники: типы задач и методы их решения (Электронный ресурс).
3. Вилейтнер, Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия /Г. Вилейтнер. – М.: Физматгиз, 1960. – 469 с.
4. Гельфанд, И.М. Метод координат [Электронный ресурс] : учеб. пособие