1.2. Способы решения уравнений и неравентсв.

Теперь, после перечисления основных понятий, следует вспомнить известные нам из школьной программы способы решения уравнений и неравенств.

Метод разложения на множители

Для разложения на множители используют формулы сокращённого умножения (ФСУ), вынесение общего множителя за скобку, способ группировки, деление многочлена на многочлен.

Суть данного метода в том, чтобы путем равносильных преобразований представить левую часть исходного уравнения или неравенства, содержащую неизвестную величину в какой-либо степени, в виде произведения двух выражений, содержащих неизвестную величину в меньшей степени. При этом справа от знака равенства должен оказаться ноль.

Метод замены переменной

Цель данного метода в том, чтобы удачным образом заменить сложное выражение, содержащее неизвестную величину, новой переменной, в результате чего уравнение принимает более простой вид. Далее полученное уравнение решается относительно новой переменной, после чего происходит возврат к исходной переменной.

Метод решения уравнений с помощью теоремы Виета

Важно!!! Не ко всем квадратным уравнениям имеет смысл использовать эту теорему. Применять теорему Виета имеет смысл только к приведённым квадратным уравнениям.

Приведенное квадратное уравнение – это уравнение, в котором старший коэффициент «*a = 1*». В общем виде приведенное квадратное уравнение выглядит следующим образом: x2 + px + q = 0. разница с обычным общим видом квадратного уравнения ax2 + bx + c = 0 в том, что в приведённом уравнении x2 + px + q = 0 коэффициент a = 1.

Теорема Виета для приведённых квадратных уравнений «*x2 + px + q = 0*» гласит что справедливо следующее:

x1 + x2 = −p,

x1 · x2 = q, где x1 и x2 — корни этого уравнения.

Нестандартные методы решения алгебраических уравнений и неравенств. Метод рационализации

Приведем алгоритм решения уравнений и неравенств методом рационализации:

- Нахождение ОДЗ уравнения/неравенства

- Привести данное неравенство к стандартному виду: слева дробь (или произведение), справа – ноль.
- Заменить выражения левой части на более простые, эквивалентные им по знаку.
- Решить полученное неравенство, например, методом интервалов.

Учёт ОДЗ

Иногда знание ОДЗ позволяет доказать, что уравнение (или неравенство) не имеет решений, а иногда позволяет найти решение уравнения (или неравенства) непосредственно подстановкой чисел из ОДЗ.

<u>Приведём алгоритм решения уравнений и неравенств методом учёта ОДЗ:</u>

- Найти ОДЗ уравнения/неравенства.
- Подставить значение ОДЗ в исходное уравнение/неравенство, чтобы проверить, является ли оно корнем.

Метод мажорант (оценки).

Этим методом можно решать нестандартные уравнения; уравнения повышенной сложности, например, уравнения в левой и правой части которой находятся функции, имеющие различную природу; уравнения или системы уравнений, в которых количество переменных превышает количество уравнений; задачи с параметром.

Метод мажорант также называют методом оценки левой и правой частей, входящих в уравнения и неравенства.

Мажорантой данной функции $f(x)$ на множестве P, называется такое число M, что либо $f(x) \leq M$ для всех $x \in P$, либо $f(x) \geq M$ для всех $x \in P$.

Мажоранты многих элементарных функции известны. Их нетрудно указать, зная область значений функции.

<u>Приведём алгоритм решения уравнений и неравенств методом использования монотонности функции:</u>

- Определить монотонность и область определения функции (ООФ).
- Методом подбора найти корень уравнения/неравенства.
- Исходя из монотонности функции делаем вывод о количестве корней.

Использование графиков

При решении уравнений и неравенств иногда полезно рассмотреть эскиз графиков их правой и левой частей. Тогда этот эскиз графиков поможет выяснить, на какие множества надо разбить числовую ось, чтобы на каждом из них решение уравнения (или неравенства) было очевидно.

Обратим внимание, что эскиз графика лишь помогает найти решение, но писать, что из графика следует ответ, нельзя, ответ ещё надо обосновать.

Приведём алгоритм решения уравнений и неравенств с помощью использования графиков:

- Определить ОДЗ уравнения/неравенства.
- Представить левую и правую части уравнения/неравенства как функции и построить их графики.
- По графику определить решение уравнения/неравенства.
- Доказать справедливость ответа.

Угадывание корня уравнения

Иногда внешний вид уравнения подсказывает, какое число является корнем уравнения.

Приведём алгоритм решения уравнений методом угадывания корня:

- Методом подбора определить корень уравнения.
- Найти ОДЗ уравнения.
- Привести многочлен к стандартному виду.
- Определить остальные корни уравнения.

Метод интервалов — это специальный алгоритм, предназначенный для решения сложных неравенств вида $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$. Алгоритм состоит из 4 шагов:

- Решить уравнение $f(x) = 0$. Таким образом, вместо неравенства получаем уравнение, которое решается намного проще;
- Отметить все полученные корни на координатной прямой. Таким образом, прямая разделится на несколько интервалов; точки зависят вида знаков: нестрогие неравенства ($\geq$,$\leq$) выделяются закрашеными(черными) точками , а строгие ($>$,$<$,$\neq$) выколотыми (пустыми).
- Выяснить знак (плюс или минус) функции $f(x)$ на самом правом интервале. Для этого достаточно подставить в $f(x)$ любое число, которое будет правее всех отмеченных корней;
- Отметить знаки на остальных интервалах. Для этого достаточно запомнить, что при переходе через каждый корень знак меняется.

.

Глава 2. Практические аспекты применения методов решения

2.1 Решение стандартными и нестандартными методами уравнения и неравентсва.

Метод разложения на множители:

Разложение на множители уравнения – это процесс нахождения таких членов или выражений, которые, будучи перемноженными, приводят к начальному уравнению.

Пример

Решим уравнение $x^2+10x-24=0$

Разложим левую часть уравнения на множители:

$X^2+10x-24=x^2+12x-2x-24=x(x+12)-2(x+12)=(x+12)(x-2)$.

Следовательно, уравнение можно переписать так:

$(x+12)(x-2)=0$.

Так как произведение равно нулю, то по крайней мере один из множителей равен нулю. Поэтому левая часть уравнения обращается в нуль при x=2,а уравнение $x^2+10x-24=0$.

Этот способ дает возможность сразу увидеть корни уравнения, если правильно вычислить слагаемых для группировки

Решение уравнения по формуле:

Вывод формулы:

Умножим обе части уравнения $ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$, на 4a и, следовательно, имеем :

$4a^2x^2+4abc+4ac=0$

$((2ax)^2+2ax \cdot b + b^2)-b^2+4ac=0$

$(2ax+b)^2=b^2-4ac$

$2ax+b= \pm \sqrt{b^2-4ac}$

$2ax =-b\pm \sqrt{b^2-4ac}$

$X_{1,2}= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Выражение b^2- 4 ac называют дискриминантом и обозначают D, причем

Если D>0, то уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два различных корня;

Если D=0, то два одинаковых корня;

ЕслиD<0 то уравнение ни имеет корней

Решение квадратных уравнений по формуле с четным коэффициентом.

Если второй коэффициент уравнения $b = 2k$– четное число, то формулу корней $x_{1,2} = \frac{-в \pm \sqrt{в^2 - 4ac}}{2a}$ можно записать в виде

$$x_{1,2} = \frac{-к \pm \sqrt{к^2 - ac}}{a}$$

Приведенное уравнение $x^2 + px + q = 0$ совпадает с уравнением общего вида, в котором $a = 1$, $b = p$ и $c = q$. Поэтому для приведенного квадратного уравнения формула корней принимает вид

$$x_{1,2} = -к \pm \sqrt{к^2 - ac}$$

Формулу удобно использовать, когда p— четное число.

Пример: $3x^2+4x-7=0$

$ax^2+2kx+c=0$,

$3x^2+2\times2x-7=0$,

$D=k^2-ac$,

$D=2^2-3\times(-7)=4+21=25$,

$x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{D}}{a}$,

$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{25}}{3}=\frac{-2\pm5}{3}$,

$x_1=\frac{-2+5}{3}=\frac{3}{3}=1, x_2=\frac{-2-5}{3}=\frac{-7}{3}$.

Если выучить формулы, то этот способ можно применить ко всем квадратным уравнениям.

Решение уравнений с использование теоремы Виета (прямой и обратной)

1)Как известно, приведенное квадратное уравнение имеет вид:

$x^2+ px + q=0$

Его корни удовлетворяют теореме Виета, которая при a=1 имеет вид

$$\begin{cases} x_1x_2 = q \\ x_1+x_2 = -p \end{cases}$$

Отсюда можно сделать следующие выводы (по коэффициентам p и q можно предсказать знаки корней).

А) Если свободный член q приведенного уравнения положителен ($q>0$), то уравнение имеет два одинаковых по знаку корня и это зависит от второго коэффициента p.

Если $p<0$, то оба корня отрицательные, если $p>0$ то оба корня положительны

Например,

$x^2-3x+2=0$; $x_1 = 2$ b$x_2=1$, так как $q = 2>0$ и $p = -3<0$

$x^2 +8x + 7 = 0$; $x_1 = -7$ и $x_2 = -1$, так как $q = 7>0$ и $p = 8>0$.

Б) Если свободный член q приведенного уравнения отрицателен ($q<0$). Например, $x^2 + 4x - 5 = 0$; $x_1 = -5$ и $x_2 = 1$, так как $q = -5<0$; $x^2 - 8x - 9 = 0$; $x_1 = 9$ и $x_2 = -1$, так как $q = -9<0$.

2) Теорема Виета для квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ имеет вид :

$x_1x_2 = \frac{c}{a}$,

$x_1+x_2 = -\frac{b}{a}$.

Справедлива теорема, обратная теореме Виета:

Если x_1 и x_2 таковы, что $x_1+x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$, то x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения

$x^2 + px + q = 0$.

Эта теорема позволяет в ряде случаев находить корни квадратного уравнения без использования формулы корней.

Примеры

1. Решить уравнение $x^2-9x+14=0$

Попробуем найти два числа x_1 и x_2, такие, что

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 9 \\ x_1x_2 = 14 \end{cases}$$

Такими числами являются 2 и 7. По теореме, обратной теореме Виета, они и служат корнями заданного квадратного уравнения.

2.Решить уравнение :$x^2+3x-28 =0$

Попробуем найти два числа x_1 и x_2 , такие, что

$x_1+x_2= - 3$

$x_1x_2 = - 28$

Нетрудно заметить, что такими числами будут - 7 и 4. Они и являются корнями данного уравнения.

Достаточно легкий способ, дает возможность сразу увидеть корни уравнения, но легко находятся только целые корни.

Нестандартные методы решения квадратных уравнений:

1.Метод выделения полного квадрата

Решим уравнение $x^2 + 6x - 7 = 0$.

Выделим в левой части полный квадрат:

$x^2 + 6x - 7 = x^2 + 2*x * 3 + 3^2 - 3^2 - 7 = (x + 3)^2 - 9 - 7 = (x + 3)^2 - 16$.

тогда, данное уравнение можно записать так

$(x + 3)^2 - 16 =0$,

$(x + 3)^2 = 16$,

$x + 3=4$ или $x + 3 = -4$

$x_1 = 1$ $x_2 = -7$

Ответ: 1; -7.

За минимальное количество действий можно найти корни уравнений, если правильно найти все слагаемые для выделения полного квадрата.

2. Решение квадратного уравнения графическим способом

Если в уравнении : $x^2 + px + q = 0$ перенести второй и третий члены в правую часть, то получим $x^2 = - px – q$.

Построим графики зависимости $y=x^2$ и $y=-px-q$.

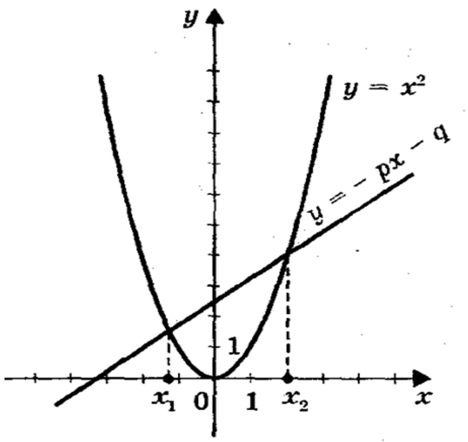


График первой зависимости – парабола, проходящая через начало координат.

График второй зависимости – прямая.

Возможны следующие случаи :

-прямая и парабола могут пересекаться в двух точках, абсциссы точек пересечения являются корнями квадратного уравнения;

- прямая и парабола могут качаться (только одна общая точка), т.е. уравнение имеет одно решение;

-прямая и парабола не имеют общих точек, т.е. квадратное уравнение не имеет корней.

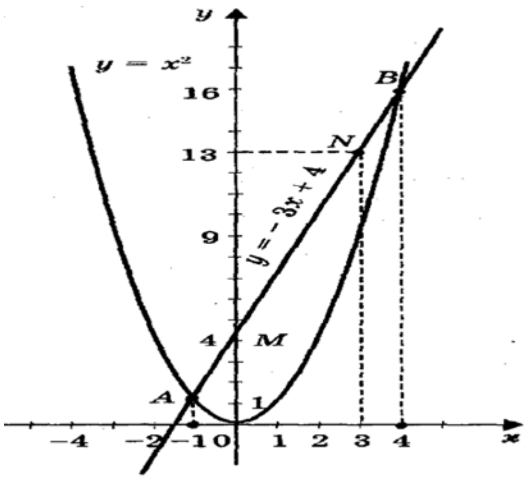
Пример

Решим графически уравнение : x^2 - 3x - 4 = 0

Решение. Запишем уравнение в виде : x^2 = 3x + 4.

Построим параболу y = x^2 и прямую y = 3x + 4.

Прямую y = 3x + 4 можно построить по двум точкам M (0; 4) и N (3; 13).



Прямая и парабола пересекаются в двух точках A и B с абсциссами x_1 = -1 и x_2 = 4.

Ответ.x_1 = -1, x_2 = 4.

Графический способ решения квадратных уравнений с помощью параболы не всегда удобен. Если строить параболу по точкам, то требуется много времени, и при этом степень точность получаемых результатов невелика.

3.Решение квадратных уравнений с помощью свойств коэффициентов.

Пусть дано квадратное уравнение

$ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

А) Если a+ b+ c = 0 (т.е. сумма коэффициентов равна нулю), то x_1 = 1,x_2= c/a.

Б) Если a - b + c = 0, или b = a + c, то x_1= – 1, $x_2 = -\frac{c}{a}$.

Решим уравнение $345x^2 - 137x - 208 = 0$.

Решение. Так кака + b+ c = 0 (345 – 137 – 208 = 0), то

X_1= 1, x_2= c/a= -208/345.

Ответ: 1; -208/345.

Решим уравнение $132x^2 - 247x + 115 = 0$

Решение. Т. к. a-b+c = 0 (132 – 247 +115=0), то

$x_1 = 1$, $x_2 = \frac{115}{132}$

Ответ: 1; $\frac{115}{132}$

Этот способ не требует особых усилий, ноподходит только к некоторым уравнениям.

4.Геометрический способ решения квадратных уравнений

В древности, когда геометрия была более развита, чем алгебра, квадратные уравнения решали не алгебраически, а геометрически. Приведу ставший знаменитым пример из «Алгебры» ал - Хорезми. Уравнение $x^2 + 10x = 39$

В оригинале эта задача формулируется следующим образом : «Квадрат и десять корней равны 39».

Строим квадрат со стороной x и на его сторонах – четыре прямоугольника высотой $\frac{10}{4}$. В углах фигуры построим четыре квадрата со стороной $\frac{10}{4}$. В углах фигуры построим четыре квадрата $\frac{10}{4}$.

Подсчитаем площадь получившегося большого квадрата:

$X^2 + 4 \cdot \frac{10}{4} \cdot (\frac{10}{4})^2 = x^2 + 10x + (\frac{10}{4})^2 \cdot 4$

По условию $x^2 + 10x = 39$, т.е. площадь большого квадрата равна

$39 + (\frac{10}{4})^2 \cdot 4 = 39 + + 25 = 64.$

Значит, его сторона равна 8, тогда $x + 2 \cdot (\frac{10}{4}) = 8$, $x = 3$ (Ал–Хорезми не признавал отрицательных чисел)

А вот, например, как древние греки решали уравнение $y^2 + 6y – 16 = 0$

Решение представлено на рис., где $y^2 + 6y = 16$, или $y^2 + 6y + 9 = 16 + 9$.

Решение. Выражения $y^2 + 6y + 9$ и $16 + 9$ геометрически представляют собой один и тот же квадрат, а исходное уравнение $y2 + 6y - 16 + 9 - 9 = 0$ - одно и то же уравнение. Откуда и получаем, что $y + 3 = \pm 5$, или $y_1 = 2$, $y_2 = - 8$.

5. Решение уравнений с использованием теоремы Безу

Теорема Безу. Если уравнение $a_0x^n + a_1x^{n-1} \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, где все коэффициенты целые, имеет целые корни, то это делители свободный член.

Следствие 2: Если b является корнем многочлена f (x), то этот многочлен делится на (x-b) без остатка.

Теорема Безу даёт возможность, найдя один корень многочлена, искать далее корни многочлена, степень которого уже на единицу меньше.

Таким образом, один корень найден и далее находятся уже корни многочлена, степень которого на единицу меньше степени исходного многочлена. Иногда этим приёмом – он называется понижением степени – можно найти все корни заданного многочлена.

Пример

Решить квадратное уравнение: $x^2 – 4x + 3 = 0$

$f(x) = x^2 – 4x + 3$

Решение :

Делители свободного члена ±1, ±3.

Проверим 1, подставив в уравнение 1 – 4 + 3 = 0. Значит 1 – это корень данного уравнения. Тогда квадратный трёхчлен $x^2 - 4x + 3$ делится нацело на (x-1)Разделим f(x) на (x-1), получим:

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = x - 3$$

Тогда:

$X^2 – 4x + 3 = (x-1)(x-3)$

(x-1)(x-3) = 0 x – 1 = 0 или x-3 =0

$x_1 = 1$ или $x_2=3$

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2=3$.

6.Решение неравенств методом интервалов .

Метод интервалов заключается в том, чтобы перевести неравенство в уравнение, решить его и изобразить его.В конце надо посмотреть на изображение и заисать ответ.

7. Исследование

Я провел опрос одноклассников по следующим вопросам:

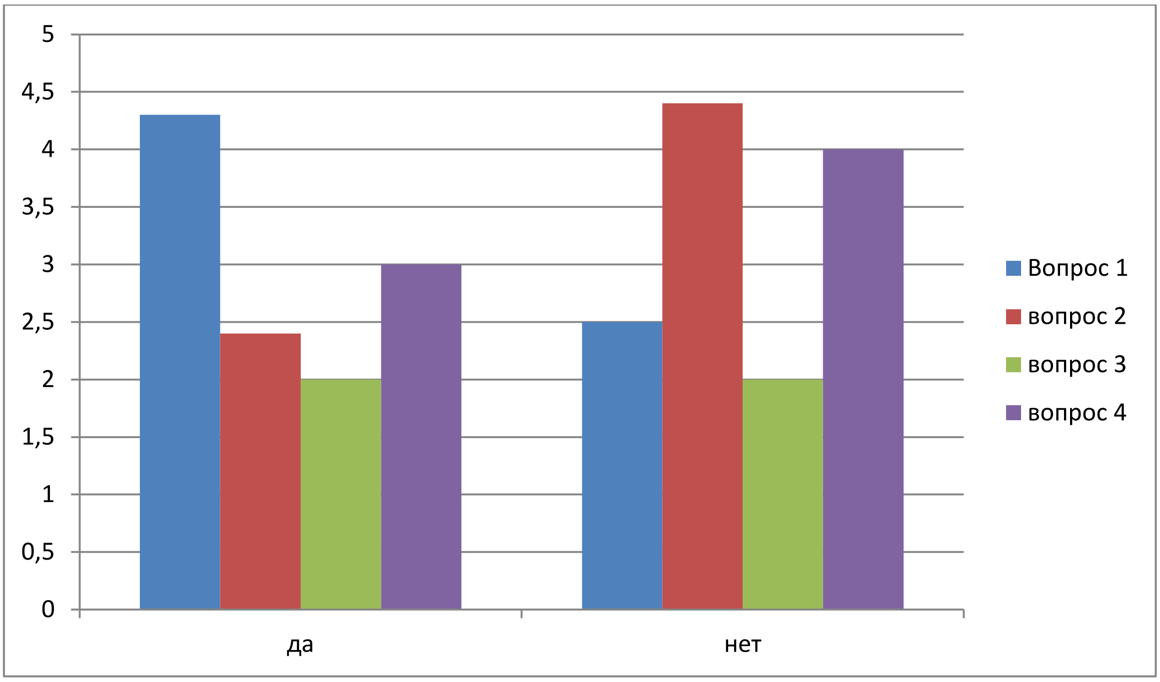
Умеете ли вы решать неравенства?

Умеете ли решать уравнения?

Решаете ли вы неравенства или уравнения дома?

Нужно ли уметь неравенства и уравнения?

В анкетировании приняли участие 30 человек 9Г класса, МОБУ Гимназии №9, г.Сочи. Результаты опроса выглядят представлены в виде диаграммы.



Выводы:

1.Уравнения и неравенства умели решать ещё более трех тысяч лет назад. Способы решения были сложными.

2.Способов решения уравнений и неравенств очень много. Я остановилась на 9 из них. Нужно отметить, что не все они удобны для решения, но каждый из них уникален. Некоторые способы решения помогают сэкономить время, что немаловажно при решении заданий на ОГЭ.

3. Для того чтобы усвоить все методы решения неравенств и уравнений, нужно решить несколько неравенств или уравнений изучаемым способом.

4. Есть способы решения неравенств и уравнений только для отдельных видов.

5. Уравнения и неравенства играют огромную роль в развитии математики. Все мы умеем решать неравенства и уравнения с 8 класса. Эти знания могут пригодиться нам на протяжении всей жизни.

Заключение

Математика – вечно живое дерево науки. С древнейших времен известно, что математика учит правильно и последовательно мыслить, логически рассуждать. Кто занимается математикой, тот развивает свой ум и внимание, воспитывает волю и настойчивость. А эти качества нужны всем без исключения.

В ходе выполнения работы с поставленной целью и задачами я справился, мне удалось изучить,обобщить и систематизировать изученный материал по выше указанной теме. Проанализировав все новые способы решения уравнений и неравенств, я понял, что нельзя однозначно сказать, какой именно метод наиболее удобен или совершенен. Некоторые (такие как, решение с использованием теоремы Безу) удобно применять, когда коэффициенты невелики, другие – допускают большие коэффициенты (например, учёт коэффициентов): графический не всегда точен, а геометрический понятен, но громоздок. Можно сделать вывод, что все способы надо иметь в своем арсенале и применять их по мере необходимости с точки зрения рациональности решения.

Благодаря работе над проектом я расширил свои знания об уравнениях и неравенствах , их появлению и методам их решения.Данная работа помогла мне изучить и обобщить способы решения уравнений и неравенств, которые изучают и не изучают в школе.

Список используемых источников:

1.Дорофеев Г.В., Суворова С.Б., Бунимович Е.А., Алгебра 9 класс:- М.:Просвещение, 2018

2. Гусев В. А., Мордкович А. Г. Математика: Справочные материалы: Книга для учащихся. – М.: Просвещение, 1988

3. Глейзер Г. И. История математики в школе. – М.: просвещение, 1982

4. Окунев А. К. Квадратичные функции, уравнения и неравенства. Пособие для учителя. – М.: Просвещение, 1972

5. Энциклопедический словарь юного математика для среднего и старшего возраста. -2-е издание- М.: «Педагогика», 1989. – 132с.