Задача 1. Найдите значение выражения $(\frac{8}{15}+\frac{3}{10})\cdot 9$

Идеей задачи является *правило выполнения* действий с дробями, основанием – порядок действий выражения со скобками.

Задача 2. Найдите значение выражения $2\sqrt{13}\cdot 5\sqrt{2}\cdot\sqrt{26}$.

Идеей задачи является *формула* $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$, основанием – сочетательный и переместительный закон умножения $\sqrt{2}\cdot\sqrt{26}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\cdot 13}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\sqrt{13}=2\sqrt{13}$.

Задача 3. Найдите корень уравнения $\frac{7}{x-5}=2$

Идеей задачи является *понятие «пропорция»* $\frac{7}{x-5}=\frac{2}{1}$ и её свойства, основанием – тождественное преобразование при решении линейного уравнения $2x = 17$.

Задача 4. Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на стороне AB. Радиус окружности равен 25, найдите AC, если BC = 48.

Идеей задачи является *свойство угла ACB*, опирающегося на диаметр. Он равен 90^0, поэтому Δ ABC – прямоугольный, что предполагает в качестве основания использовать теорему Пифагора для вычисления катета AC.

Следовательно, в основании решения задачи лежит установленный порядок действий, теорема или закон. Но, что лежит в начале решения? С точки зрения логики – идея, а затем идёт основа, при помощи которой находит неизвестная величина. Но в реальных задачах ученик может вспомнить в первую очередь основу, а затем прийти к идее. Это в случае, когда он не совсем усвоил материал. А если в результате рефлексии учащийся начинает сознавать свои действия, то у него постепенно возникнет естественный порядок мышления:

Идея
Ищет основу
В ходе ЁН решения,
Ум в представлении переходит
На новый, зрелый уровень мышления.

Этим уровнем будет сознание оптимального порядка и системы понятий.

1. *Система и метод*

Примером системы является программа занятий, которую составляет учитель. Вот часть программы по математике за 6 класс:

<u>Числовые и буквенные выражения. Уравнения.</u> Темы занятий.

Числовые выражения. Значение числового выражения. Порядок действий в числовых выражениях.

Буквенные выражения. Раскрытие скобок. Подобные слагаемые, приведение подобных слагаемых. Формулы.

Уравнения. Корень уравнения. Основные свойства уравнений. Решение текстовых задач с помощью уравнений.

Числовые и буквенные выражения. Уравнения

<u>По окончании изучения курса учащийся научится:</u>

- выполнять операции с числовыми выражениями;
- выполнять преобразования буквенных выражений (раскрытие скобок, приведение подобных слагаемых);

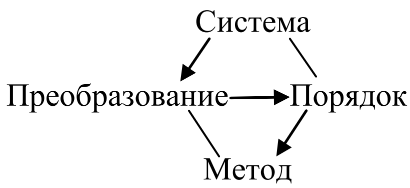
- решать линейные уравнения, решать текстовые задачи алгебраическим методом.

Учащийся получит возможность:

- развить представления о буквенных выражениях и их преобразованиях; овладеть специальными приёмами решения уравнений, применять аппарат уравнений для решения как текстовых, так и практических задач.

Следовательно, в системе есть порядок, нацеленность и некоторые функциональные свойства, приёмы и методы, позволяющие её использовать для решения задач и примеров. И можно дать определение: ***система*** **–** совокупность объектов, предметов, находящихся в определённых отношениях, между которыми устанавливаются связи, позволяющие изменять её форму и функции.

В указанной программе понятия: выражения, уравнения, функция дают конкретное знание, а понятие «*система» – сознание*. И, используя его, как метапонятие, может управлять мышлением и учитель, и ученик. Система – это подвижное образование, поэтому её можно преобразовать, Мы получили новое метапонятие: *преобразование.* Преобразование совершается при помощи правил или формул связей по определённому порядку. Например, порядок тождественных преобразований. *Порядок* – это ещё одно метапонятие. Порядок действий даёт алгоритм, а алгоритм – метод (решения уравнений). Следовательно, метапонятия система, преобразование, порядок и метод могут быть представлены матрицей сознания:



И получается, что основой системного мышления является метод в широком смысле – путь к чему-либо, в нашем случае – это путь к решению задачи.

Задача 5. Найдите значение выражения $216\cdot 6^4/(72)^3$

Идея задачи: найти одинаковое основание, чтобы воспользоваться формулой деления степени. Вначале идём к одинаковому основанию, используя *представление* $72 = 2\cdot 36 = 2\cdot 6^2$, $216 = 6^3$. Подставляем их в исходное выражение и получаем $6^3\cdot 6^4/6^6\cdot 2^3$. *Порядком действия* будет использование формул умножения и деления степеней с одинаковым основанием. И окончательное значение получаем $6/8= 3/4$.

Системное мышление позволяет выделить этапы мыслительной деятельности: *преобразование и порядок действий*.

Задача 6[10]. Решите систему уравнений $x^2 + y^2 = 65$

$$x\cdot y = 8$$

Идея задачи: использование формул квадрата суммы и разности двух величин. А для реализации идеи сделаем тождественное *преобразование* второго уравнения $2\,x\cdot y = 16$. Решение будем искать *методом* сложения и вычитания уравнений:

$$-\begin{array}{c} x^2 + y^2 = 65 \\ 2\,x\cdot y = 16 \\ \hline (x - y)^2 = 49 \end{array} \qquad +\begin{array}{c} x^2 + y^2 = 65 \\ 2x\cdot y = 16 \\ \hline (x + y)^2 = 81 \end{array}$$

Извлекая квадратный корень, получаем новую систему линейных уравнений:

$x - y = \mp 7$

$x + y = \mp 9$, решение которой даёт значения (x,y): (1,8), (-1, -8), (8, 1), ((-8, -1).

В данном случае системное мышление выражается использованием двух понятий *преобразование и метод* сложения и вычитания уравнений.

А в целом можно сделать вывод, что метапонятия позволяют выделить этапы решения задачи, а системное мышление делает его более динамичным и осознанным. И для повышения уровня понимания реального мира важно не только понятие системы, а *сознание её базовых* *понятий и логических основ*. Данный процесс называется осознанием, к нему мы сейчас и переходим.

2. *Менталитет – базовые метапонятия и вывод*

Начнём с понятия текста. Текст – это содержательный отрезок речи, в котором предложения связаны между собой темой и основной мыслью — идеей [12]. Более общее определение: всякая записанная речь [13]. Алгоритм анализа текста сводится к следующему порядку действий: 1.Прочитать текст, 2.Дать заглавие, если его нет, 3.Указать *тему* текста, 4.Определить идею текста, 5.Выявить стиль и тип речи, 6.Указать композицию, 7.Проанализировать средства выразительности [12]. А, что такое синтез текста. И здесь мы имеем определение: метод исследования явления в его единстве и взаимной связи частей, *обобщение*, сведение в единое целое данных, добытых анализом [13].

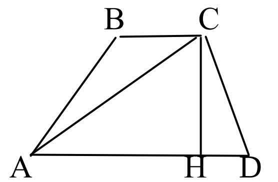
Рассмотрим «простой» текст сказки «Колобок». Анализ ученики младших классов умело проведут, найдут идею, проявят композицию. А дальше должен, по идее, идти синтез. Вот эта часть на уроках русского языка почему-то забывается. Её необходимо производить при помощи *метапонятий*, которые вытекают из образа. Метапонятия мной выделены курсивом.

Действительно, кто такой колобок? Это *самоуверенный человек* или *довольный собой мальчик*. Он имеет *линию жизни*: я от бабушки ушёл… Задаём вопрос: верная ли эта линия жизни (если верная, то должна иметь основание)? Но основанием для Колобка является *личный опыт.* И этот опыт его, в конце концов, подвёл. И можно сделать вывод:

Чтобы жить вполне безопасно,
Нужно мир сей вокруг изучать,
Видеть путь своей жизни ясно,
И лукавого взгляд замечать.

Я думаю, это вывод будет полезен для уроков ОБЖ. А сейчас рассмотрим решение задачи.

Задача 7 [14]. Найдите площадь круга, описанного около трапеции с основаниями 3 и 9 и боковой стороной равной 5 см.



Для решения задачи сделаем чертёж трапеции. Известно, что круг можно описать около треугольника, поэтому, соединяя, стороны основания линией AC, в принципе, по теореме синусов можно определить вначале радиус, а затем и площадь круга $S = \pi R^2$. Эта *идея задачи*.

Произведём дополнительные построения, обозначив, диагональ AC и высоту CH. И здесь возникает трудность. В каком случае круг, описанный около трапеции, совпадает с кругом, описанным около треугольника?

Известно, что четырехугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда сумма его противолежащих углов равна 180º [15]. Отсюда следует, что *вписать в окружность можно только равнобокую трапецию*. Следовательно, сторона AB = CD, т.е. наша трапеция равнобокая. В этом случае радиус описанного круга для трапеции и Δ ACD будет совпадать.

Действительно, предположим обратное, что есть небольшое смещение центров на линии

OO_1. O – центр трапеции, O_1 – центр треугольника ACD. Для трапеции отрезки OA = OB = OC = OD. Для Δ ACD Должно выполняться равенство $AO_1 = O_1C = O_1D$, но мы видим, что $OC > O_1C$ для Δ OCO_1, так как лежит против тупого угла, следовательно, возникает противоречие: с одной стороны все радиусы для обеих фигур должны быть равны, А при несовпадении центров один из радиусов трапеции (OC) больше радиуса Δ O_1C. Полученное противоречие доказывает, что смещения центров OO_1 быть не должно и они совпадают.

Рассмотрим Δ ACD и Δ HCD, AB = CD = 5, BC =3, AD = 9 по условию задачи. Из свойства равнобедренной трапеции HD = $\frac{AD - BC}{2}$ = 3. Вычисление высоты CH производим по теореме Пифагора CD = 5, HD = 3 даёт CH = 4, поэтому можно найти синус угла D: sinD = 4/5.

А теперь можно воспользоваться теоремой синусов для Δ ACD, а именно: $\frac{\mathrm{AC}}{\sin\mathrm{D}}$ = 2R. AC определяем по теореме Пифагора для Δ ACH, катеты которого равны CH = 4, AH = 6. AC = $\sqrt{16+36} = 2\sqrt{13}$, поэтому 2R = $\frac{2\sqrt{13}}{4/5}$ и R = $\frac{5\sqrt{13}}{4}$, а площадь круга S = $\pi R^2 = 3{,}14\frac{325}{16} = 63{,}78$ см^2.

В данной задаче *предпосылкой* является формула определения площади круга, а *посылкой* – равенство радиусов Δ ACD и трапеции ABCD, и сведение её к задаче нахождения искомого радиуса для Δ ACD. И логический вывод, что *вписать в окружность можно только равнобокую трапецию*, вытекает именно из решения задачи для Δ ACD, как самостоятельной задачи.

Как видим, есть метапонятия для текста и метапонятия логики мышления. если их объединить, может возникнуть новый уровень мышления.

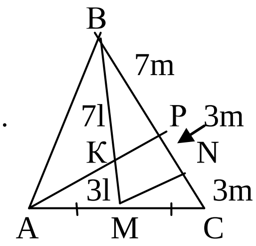
3. АЛЬ-УМ-ОН центр – новый уровень сознания

Сознание можно расширять за горизонт, углублять до основания, повышать за предел существующего знания и доводить до понимания сути. Новый уровень сознания появляется, когда интеллект выходит за грань известного и входит в неизведанную область terra incognita.

Одним из приёмов, которые мы применяли – это использование метапонятий, обобщающих реальность, и помогающих сделать вывод или заключение. Рассмотрим задачу.

Задача 8 [10] В Δ ABC на его медиане BM отмечена точка K так, что BK:BM = 7:3. Прямая AK пересекает сторону BC в точке P. Найдите отношение площади ΔBKP к площади KPCM.

Для решения задачи сделаем чертёж, из которого видны фигуры: ΔBKP и KPCM. Заметим, что данные фигуры входят в ΔBCM, поэтому необходимое отношение



можно записать, как α = $\frac{S\,\Delta\text{вкр}}{S\Delta\text{вмс} - S\Delta\text{вкр}}$, следовательно, если выразить площадь ΔBKP через площадь ΔBMC, то задачу в принципе можно решить. В данном случае получается новое представление.
Возникает вопрос, через какой Δ его можно выразить. И здесь возникает идея – через Δ AKM. Но для этого нужно выделить базовый отрезок.
И здесь мы делаем дополнительное построение: проводим линию MN ‖ AP. При этом получается два подобных треугольника Δ APC ∞ Δ MNC, Δ BKP ∞ Δ BMN, что позволяет записать условия подобия: AP = 2MN, $\frac{\mathrm{BK}}{\mathrm{BM}} = \frac{\mathrm{KP}}{\mathrm{MN}} = \frac{7}{7+3} = \frac{7}{10} \Longrightarrow$ KP = 7/10 MN. AK = AP – KP = 2 MN - 7/10 MN = $\frac{13}{10}$ MN. Итак, базовый отрезок MN позволяет выражать отдельные элементы системы треугольников (KP, AK), которые входят в Δ AKM и Δ BKP.

Поэтому следующим этапом нужно попытаться их связать друг с другом, тем более, что они имеют общий элемент – вертикальные углы. Площадь Δ S = ½ ah. Основанием у нас являются отрезки KP и KM, а высоты можно выразить формулами: h_1 = BK sinφ, h_2 = AK sinφ. Запишем отношения площадей, выбрав в качестве меры некоторую величину l. Тогда BK = 7l, а KM = 3l. Отношение $\frac{S\Delta\text{вкр}}{S\Delta\text{Акм}} = \frac{1/2\mathrm{KP}\cdot\mathrm{BK}\sin\varphi}{1/2\mathrm{KM}\cdot\mathrm{AK}\sin\varphi} = \frac{7\mathrm{l}\cdot\frac{7}{10}MN}{3\mathrm{l}\cdot\frac{13}{10}\mathrm{MN}} = \frac{49}{39}$.Но площадь Δ AKM = 3/10Δ AMB, который составляет половину площади Δ ABC. Обозначим её через $S_{\text{авс.}}$ Тогда $S_{\text{вкр}}$ = 49/39$S_{\text{Акм}}$ = 49/39·3/20 $S_{\text{авс}}$ = 49/260 $S_{\text{авс}}$.

А теперь можно использовать формулу для начального отношения: α = $\frac{\mathrm{S}\text{вкр}}{\frac{1}{2}\mathrm{S}\text{Авс} - \mathrm{S}\text{вкр}}$ = $\frac{49/260\ \mathrm{S}\text{авс}}{81/260\ \mathrm{S}\text{авс}} = \frac{49}{81}$. Это и есть ответ задачи.

У нас есть ход решения, а теперь рассмотрим *логику мышления*.

1.Анализируя фигуры, мы приходим к формуле, выраженной в виде коэффициента α.

2. Основой задачи является площадь Δ ABC S_{ABC}, разделённая на две равные части.

3. Через величину S_{ABC} из пропорции может быть выражена площадь Δ S_{AKM}, и здесь возникает идея *связать* её с площадью Δ ВКР, но как?

4. Стороны этих Δ имеют общее отношение сторон и равные вертикальные углы. Нужно найти *связь* между другими сторонами, а это можно сделать, если есть *система подобных треугольников.* Но, как её организовать? Идёт процесс сознания – второй этап мышления.

5. *Организующей идеей* и является построение линии MN, которая связывает подобные Δ APC ∞ Δ MNC, Δ BKP ∞ Δ BMN треугольники.

6. При этом строится *метод* выражения отдельных элементов системы (KP, AK), которые входят в Δ AKM и Δ BKP. На этом заканчивается этап сознания и начинается следующий этап.

7. Теперь остаётся выразить по формуле площади треугольников через их элементы и найти отношение.

8. Наступает заключительный этап вычисления отношения α.

Таким образом, мы рассмотрели третий этап – управления, который является взглядом свыше на решение задачи, и именно данный взгляд начинает формировать новый уровень сознания и АЛЬ-УМ-ОН центр интеллекта. Этого в современной школе не делают, а отдельные учащиеся доходят до осознания его интуитивно.

Если внимательно прочитать этапы логики мышления при решении задачи, то можно заметить метапонятия, которые ею управляют: *идея, основа, система, связь, организация, метод.* Так, например, понятие связи ориентирует мышление на нахождение связи площадей Δ AKM и Δ BKP, а понятие система – на использование свойства отношений подобия треугольников.

Но управление связано с *линией сознания*, которую образуют понятия: идея, отношение-связь-система. И возникает вопрос? Можно ли для решения использовать другую систему треугольников. В этом случае, если провести линию к точке К – КС, то получится новая система. И она решается чисто алгебраически путём составления системы алгебраических уравнений относительно неизвестных площадей Δ BKP – x, и Δ CKP – y, которые тоже могут быть выражены через площадь Δ ABC (идея задачи).

Действительно, $\alpha = \frac{S_{вкр}}{\frac{1}{2}S_{Aвс} - S_{вкр}} = \frac{x}{y + \frac{1}{2}S_{Aвс}}$. Отношение площадей Δ BKP и Δ CKP равно: как отношение сторон (высота одна и та же) $\frac{x}{y} = \frac{7}{6}$, а сумма x +y + 3/20 Sabc =1/2 Sabc. Решение системы линейных уравнений даёт $x = \frac{49}{260}$ Sabc, и для $\alpha = \frac{49}{81}$. Поэтому *базовые понятия и выбранная система определяют метод и порядок решения.*

А в целом путь решения и идея зависит от системы, выбранной за основу, поэтому, если *мы выбрали идею, то она ищет себе основу, а если у нас есть основа (система), то в ней и находит идея свою форму выражения*. В этом и состоит вывод и диалектика мета логики мышления, которая основана на *мета системе*, представленной в форме *матрицы сознания*:

Идея – начало действия,
Если система понятий есть,
Метапонятия в логику мысли

Надо сознанием собрать суметь.

И теперь мы можем дополнительно к обозначенным уровням сформулировать этапы формирования интеллектуального центра:

1. Выделить систему метапонятий в ходе решения и анализа задачи;
2. Научиться строить металогику мысли после нахождения решения, чтобы сознавать уровни подъёма мышления;
3. Выстроить мета систему или матрицу сознания, чтобы зримо представлять её образ на внутреннем плане;
4. Учиться формулировать на языке метапонятий выводы или заключения в результате осознания движение мысли на том или ином уровне мышления.

Следовательно, для формирования интеллектуального центра есть четыре уровня подъёма мышления и четыре этапа осознания мета системы, что являют необходимые и достаточные условия его существования, позволяющие видеть и оценивать этапы решения задачи. Может возникнуть вопрос, где он находиться? Пока ответить можно так: на тонком или ментальном плане сознания.

Интеллектуальный центр, если ум видит метапонятия в полноте, в зависимости от условий существующей системы и своих возможностей, помогает выбирать оптимальный путь решения задачи или проблемы. А если он видит одну какую-либо сторону, то старается расширить свои возможности за счёт дополнительного знания или действий, формирующих новую систему.

Выводы

– В работе рассмотрены пути и возможности формирования центра интеллекта при решении задач по математике в пространстве многомерности существующих понятий;
– Показано, что на пути в*и*дения идеи и основы ум ищет *порядок действий*, ведущий к решению задачи;
– При усвоении материала, если учащийся строит систему понятий, то через неё у него возникает в*и*дение возможных путей решения, а *сознание её базовых понятий и логических основ* делает мышление ум гибким и динамичным;
– Показано, что при помощи базовых понятий и метапонятий, выходящих за рамки системы, ум может делать вывод или формулировать ведущую мысль;
– Показано, что новый уровень сознания появляется, когда интеллект выходит за грань известного, и путь решения, и идея зависит от системы, выбранной за основу, поэтому, если *мы выбрали идею, то она ищет себе основу, а если у нас есть основа (система), то в ней и находит идея свою форму выражения;*
– В работе представлена мета система в форме матрицы сознания и сформулированы четыре этапа её осознания;
– Центр интеллекта формируется из многомерности метапонятий при помощи металогики мышления в ходе в ходе осознания и видения в полноте их мета системы, позволяющей выбирать оптимальные средства достижения цели.

Список литературы

1. Харламов И.Ф. Педагогика. М.: Юрист, 1997, 507 с
2. Хоккинс Д., Блейсли С. Об интеллекте, М.: Вильямс, 2016, 240 с.
3. Холодная М.А. Психология интеллекта. Парадоксы исследования, Спб.: Питер, 2002, 272 с.
4. Айзенк Г. Природа интеллекта. Битва за разум! Как формируются умственные способности. М.: ЭКСМО-Пресс, 2002, 347 с.
5. Боно Э. Учите своего ребёнка мыслить. М.: Попурри, 2014, 368 с.
6. Вуджек Т Тренировка ума. Спб.: Питер, 1996, 284 с.
7. Анурин В.Ф. Интеллектуальный тренинг. М.: Акад. Просп, 2005, 325 с.

8. Адлер Г. НЛП-техники развития интеллекта. Спб.: Питер, 2011, 192 с.
9. Джонс Дж. К. Методы проектирования М.: Мир, 1986, 326 с.
10. Философский энциклопедический словарь, М.: Советская энциклопедия, 1983, с. 201.
11. Математика ОГЭ. //под ред. И.В. Ященко, М.: Экзамен, 2020, 278 с.
12. https://russkiiyazyk.ru/sintaksis/analiz-teksta.html/
13. Ожегов С.И. словарь русского языка. М.: Русский язык, 1982, 703 с.
14. Мирошин В.В., Рязановский А.Р. Математика, решение задач. М.: Эксмо, 2017, 496 с.
15. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. М.: Наука, 1964, 420 с.