3.2 Работа в группах.

Учитель.
Пусть *функция z=f(t)* описывает изменения производительности некоторого производства с течением времени. Найдем объём продукции V , произведенный за промежуток времени [0, T].
Учитывая определение определенного интеграла получаем

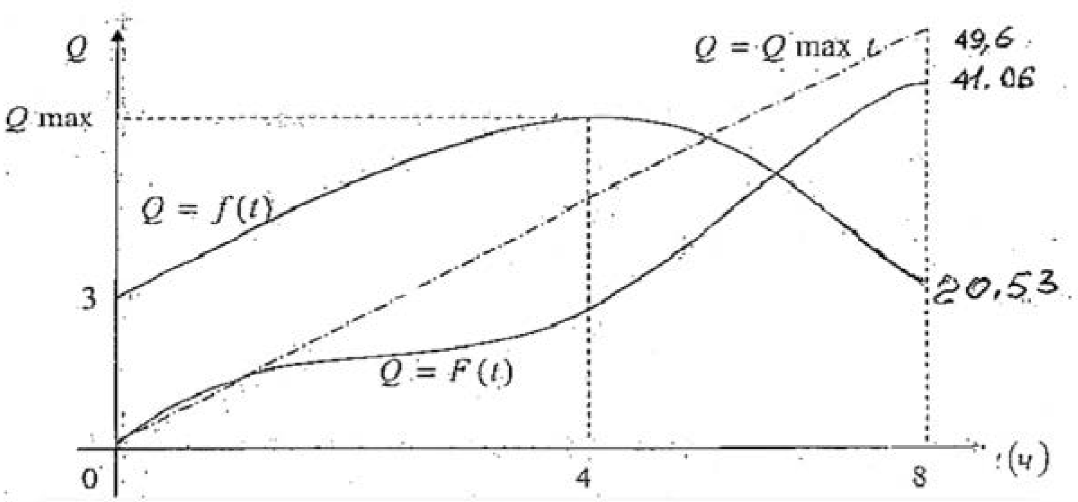
$$V = \int_0^T f(t)dt,$$

т.е. если $f(t)$ – производительность труда в момент времени t , то $\int_0^T f(t)dt$ есть объем выпускаемой продукции за промежуток [0, T].

В курсе микроэкономики рассматриваются так называемые предельные величины, т.е. для данной величины представляемой некоторой функцией $f(x)$, рассматривают ее производную $f\ (x)$. Поэтому, часто приходится находить экономическую функцию (первообразную) по данной функции предельных величин (производной).

Группа «Экономисты»

1	**Пример 1.** Вычислить объем продукции, выпущенной за седьмой час рабочего дня, если производительность труда на это отрезке времени задана формулой $f(t) = \frac{3}{4t+6} + 4$
	Решение. $V = \int_6^7 \left(\frac{3}{4t+6} + 4\right) dt = \frac{3}{4}\ln\|4t+6\| \Big\|_6^7 + 4t\Big\|_6^7 = \frac{3}{4}(ln34 - ln30) + 4 = \frac{3}{4}\ln\frac{34}{30} + 4 = \frac{3}{4}\ln\frac{17}{14} + 4 \approx 4,09$ (ед. продукции)
2	**Пример 2.** Вычислить запас продукции К на складе, какой образуется за рабочий день, если поступление продукции описывается функцией $f(t) = 3t^2 + 2t + 3$ (рабочий день составляет 7 часов).
	Решение. $$\text{К} = \int_0^7 (3t^2 + 2t + 3)dt = 3\frac{t^3}{3}\Big\|_0^7 + \frac{2t^2}{2}\Big\|_0^7 + 3t\Big\|_0^7 = 7^3 + 7^2 + 21 = 413\ (\text{ед. товара})$$
3	**Пример 3.** Найти среднее значение издержек $K(x) = 6x^2 + 2x + 1$, выраженных в денежных единицах, если объем продукции x изменяется от $x_1 = 1$ до $x_2 = 3$.
	Решение. Если объем продукции изменяется от x, до x_2, то среднее значение издержек производства *K(x)* выражается формулой $$K(c) = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} K(x)dx.$$ Если $f(x) = 6x^2 + 2x + 1,\ x_1 = 1, x_2 = 3$, то

	$K(c) = \frac{1}{3-1}\int_1^3 (6x^2+2x+1)dx = \frac{1}{2}(2x^3+x^2+x)\Big\|_1^3 = \frac{1}{2}(54+9+3-2-1-1) = 31$ т.е. среднее значение издержек равно 31 денежной единице.
4	**Пример 4.** Найти объем произведенной продукции за время $t = 6$ час, если производительность труда задана функцией $f(t) = -t^2 + 10t$ (ед/час)
	Решение. Воспользуемся формулой нахождения объема продукции. $V = \int_0^t f(t)dt = \int_0^6 (-t^2 + 10\,t)dt = \left(-\frac{t^3}{3} + \frac{10t^2}{2}\right)\Big\|_0^6 == 108(\text{у. е.})$
5	**Пример 5.** Найти дневную выработку Q за рабочий день продолжительностью 8 часов, если, производительность труда в течение дня изменяется по формуле: $f(t) = -0{,}2t^2 + 1{,}6t + 3,$ где t – время в часах. Провести экономический анализ.
	Решение. Дневную выработку найдем по формуле $Q = \int_0^t f(t)dt$. $Q = \int_0^8 (-0{,}2)t^2 + 1{,}6t + 3)dt = F(t)\Big\|_0^8 = \left(-\frac{0{,}2}{3}t^3 + 0{,}8t^2 + 3t\right)\Big\|_0^8 == 41{,}06\ у.е.$ Простроим график функции.
	 Рис. 1 Если бы в течение всего дня работа велась ритмично и с максимальной производительностью $f(t)$ = 6,2, то дневная выработка составила бы О max =49,6 или на 21% больше. На рис.1 дневная выработка численно равна площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой $f(t)$, вторая кривая $F(t)$ показывает рост выпуска продукции во времени. Значение $t = 4$ ч. соответствует точке перегиба кривой $F(t)$: в первой половине рабочего дня производительность выше, чем во второй. Прямая $Q = Q\max t$ соответствует выпуску продукции с равномерной производительностью. В этом случае объем

	продукции составил бы 49,6 у.е.
6	**Пример 6.** Определить выработку рабочего: а) за весь рабочий день; б) за третий час работы; в) за последний час работы, если продолжительность рабочего дня 6 часов, а $f(t) = -3t^2 + 18t$ – производительность труда; г) провести экономический анализ задачи.
	Решение. Находим общую выработку рабочего за весь день (6 часов) по формуле $V = \int_0^t f(t)dt$ $V = \int_0^6 (-3t^2 + 18t)dt = (-\frac{3t^3}{3} + 18\frac{t^2}{2})\Big\|_0^6 = (-t^3 + 9t^2)\Big\|_0^6 = (-216 + 324) = 108\ (у.е)$ Определяем выработку рабочего за третий час работы $V = \int_2^3 (-3t^2 + 18t) = (-t^3 + 9t^2)\|_2^3 = 26(у.е.).$ Аналогично определяем выработку рабочего за последний час работы: $V = \int_5^6 (-3t^2 + 18t) = (-t^3 + 9t^2)\|_5^6 = 8(у.е.).$ За полный рабочий день выработка составил 108 у.е. продукции. За третий час работы 26 у.е., за последний час 8 у.е.. Вероятно, что работы утомительная и требует большего напряжения, поэтому к концу смены производительность труда
7	**Пример 7.** Наиболее известной производственной функцией является функция Кобба-Дугласа $Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$, где А, $\alpha, \beta,$ - неотрицательные константы и $\alpha + \beta \leq 1$. K – объём фондов либо в стоимостном, либо в натуральном выражении (скажем, число станков), L – объём трудовых ресурсов (число рабочих, число человеко-дней), Q – выпуск продукции в стоимостном, либо в натуральном выражении. Если в функции Кобба-Дугласа считать, что затраты труда есть линейная зависимость от времени, а затраты капитала неизменны, то она примет вид $f(t) = (\alpha t + \beta)e^{rt}$. Тогда объем выпускаемой продукции ха время Т лет составит: $Q = \int_0^T (\alpha t + \beta)e^{rt}dt.$ Найти объем продукции, произведенный за 5 лет, если функция Кобба-Дугласа

	имеет вид $f(t) = (1+t)e^{2t}$.
	Решение. Объем произведенной продукции равен $$Q = \int_0^5 (1+t)e^{2t}dt.$$ Используем для вычисления интеграла метод интегрирования по частям. Пусть $u = 1+t, du = dt, dv = e^{2t}dt, v = \frac{1}{2}e^{2t}$. Тогда $$Q = \frac{1}{2}(1+t)e^{2t}dt\Big\|_0^5 - \frac{1}{2}\int_0^5 e^{2t}dt = \frac{1}{2}(1+t)e^{2t} - 1/4e^{2t}\Big\|_0^5 = 7549899(у.е.)$$

Учитель.

Нахождение среднего времени изготовления изделия

Пусть известна функция $t = t(x)$, описывающая изменение затрат времени t на изготовление изделия, в зависимости от степени освоения производства, где x — порядковый номер изделия в партии.

Тогда среднее время $t_{ср}$, затраченное на изготовление одного изделия в период освоения от x_1 до x_2 изделий вычисляется по теореме о среднем:

$$t_{ср} = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} t(x)dx$$

Функция изменения затрат времени на изготовление изделий $t = t(x)$ часто имеет вид

$$t = ax^{-b},$$

где a – затраты времени на первое изделия, b – показатель производственного процесса.

Нахождение дисконтированной стоимости денежного потока

Определение начальной суммы по ее конечной величине, полученной через время t лет при годовом удельном проценте p, называется дисконтированием.

Задачи такого рода встречаются при определении экономической эффективности капиталовложений. Пусть поступающий ежегодно доход изменяется во времени и описывается функцией $f(t)$ и при удельной норме процента, равной p, процент начисляется непрерывно. Тогда дисконтированный доход K за время вычисляется по формуле:

$$K = \int_0^T f(t)e^{-pt}dt.$$

Нахождение капитала по известным инвестициям

Чистыми инвестициями (капиталовложениями) называют общие инвестиции, производимые в экономике в течение определенного промежутка времени (чаще всего года), за вычетом инвестиций на возмещение выходящих из строя основных фондов (капитала).

Таким образом, за единицу времени капитал увеличивается на величину чистых инвестиций.

Если капитал обозначит как функцию по времени $K(t)$, а чистые инвестиции - $I(t)$, сказанное выше можно записать

$$I(t) = \frac{d}{dt}K(t)$$

т.е. производная от капитала по времени t.

Часто требуется найти приращение капитала за период от времени t_1 до t_2, т.е. величину

$$\Delta K = K(t_2) - k(t_1)$$

Функция $K(t)$ является первообразной для функции $I(t)$, поэтому можно записать:

Группа «Инвесторы»

1	**Пример 1.** Найти среднее время, затраченное на освоение одного изделия в период освоения от $x_1 = 50$ до $x_2 = 75$ изделий, если функция изменения затрат – времени $t = 100\,x^{-0.5}$(ч).
	Решение. Используя теорему о среднем, получаем: $$t_{ср.} = \frac{1}{75-50}\int_{50}^{75} 100x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{100}{25}\int_{50}^{75}\frac{dx}{\sqrt{x}} = 8\sqrt{x}\Big\|_{50}^{75} \approx 11{,}2(ч).$$
2	**Пример 2.** Определить дисконтированный доход за три года при процентной ставке 10%, если первоначальное капиталовложение составили 15 млн. руб. и намечается ежегодно капитал увеличивать на 5 млн. руб. Провести экономический анализ.
3	**Пример 3.** Пусть заданы чистые инвестиции функцией I(t) = 500 /t(у.е). Требуется определить приращение капитала за 2 года.
	Решение. Найдём приращение капитала за 2 года: $$\Delta K = \int_0^2 500\sqrt{t}\,dt = \frac{500t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg\|_0^2 = \frac{500 * 2}{3}\sqrt{8} \approx 943{,}3(е.у).$$
4	**Пример 4.** Задана функция чистых инвестиций $I(t) = 300\sqrt[3]{t}$. Определить, сколько лет потребуется, чтобы приращение капитала составило 5000 у.е.
	Решение. Обозначим искомый промежуток времени [0,T] и, используя формулу прирощения капитала, получим $$5000 = \int_0^T (300\sqrt[3]{t^4})dt = (\frac{4 * 300\sqrt[3]{t^4}}{3})\Bigg\|_0^T = 400\sqrt[3]{T^4}$$ Запишем уравнение $5000 = 400\sqrt[3]{T^4}$ Решая его, находим: T = 6.64

	Чтобы приращение капитала составило 5000, потребуется 6,64 лет.
5	**Пример 5.** Пусть известна непрерывная функция $f(x) = 10 + 2\,sin^2\,\pi x$, которая характеризует изменение производительности труда от времени x рабочего некоторого предприятия. Определить объем продукции, произведенной рабочим за промежуток времени от $x_1 = 4$ до $x_2 = 6$. **Ответ:** 22 (ед. продукции).
6	**Пример 6.** Найти среднее значение издержек $\text{К}(x) = 2^{x+1} + 4$ выраженных в денежных единицах, если объем продукции x изменяется от $x_1 = 4$ до $x_2 = 5$. **Ответ:** $\frac{15}{\ln 2} + 4 \approx 25{,}64(\text{ден. ед.})$.
7	**Пример 7.** Вычислить объем продукции, выпущенной рабочим за промежуток времени от $x_1 = 0$ до $x_2 = 2$, если производительность труда на этом отрезке времени дана формулой $f(x) = 42\left(1 + \frac{x}{x^2+1}\right)$. **Ответ:** $84 + 21\ln 5 \approx 117{,}79$ (ед. продукции).

Учитель.

Применение интеграла в области финансов

1. Если начальный вклад составляет p , процентная ставка равна r, то величина вклада через промежуток времени t определяется по формуле:

$$S = pe^{\frac{rt}{100}}.$$

Рассмотрим обратную задачу для нахождения стоимости аннуитета (регулярных платежей) применительно к непрерывным процентам. В этом случае платежи зависят от времени t, то есть является функцией от t, что можно записать

$$p = p(t)$$

Тогда величина вклада S через T лет определяется формулой:

$$S = \int_0^T p(t)e^{\frac{r(T-t)}{100}}.$$

Если рассмотреть понятие дисконтированной суммы, связанное для непрерывных процентов с формулой

$$S = pe^{\frac{r(T-t)}{100}},$$

то эта формула даёт возможности определять величину начального вклада P, если известно, что через t лет он должен составить величину S, а непрерывная процентная ставка равна r . Задача аннуитета в этом случае может быть сформулирована так: найти величину начального вклада P, если регулярные выплаты по этому вкладу должны составить S ежегодно в течение T лет.

Расчетная формула имеет вид

$p = \int_0^T Se^{\frac{rt}{100}} dt.$

Выпуск оборудования при постоянном темпе роста

Производство оборудования некоторого вида характеризуется темпом роста

его выпуска

$$K = \frac{y'(t)}{y(t)}$$

где K - известная постоянная величина (ежегодный темп роста), $y(t)$ - это уровень производства за единицу времени на момент времени t, $y'(t)$ - прирост выпуска оборудования за промежуток времени t = 1.

Общее количество оборудования к моменту времени t (единицей которого является год), а в начальный момент времени t=0 уровень ежегодного производства оборудования составлял yo, находится по формуле

$$Y(t) = \int_0^t y_0 e^{kt} dt$$

Вычисление коэффициента Джини

Для анализа социально-экономического строения общества применяется так называемая «диаграмма или кривая Джини» распределение богатства в обществе. Исследуя кривую Лоренца y = f(x) - зависимость процента дохода от процента имеющего их население (кривую ОБА, рис. 2), мы можем оценить степень неравенства в распределении доходов населения.

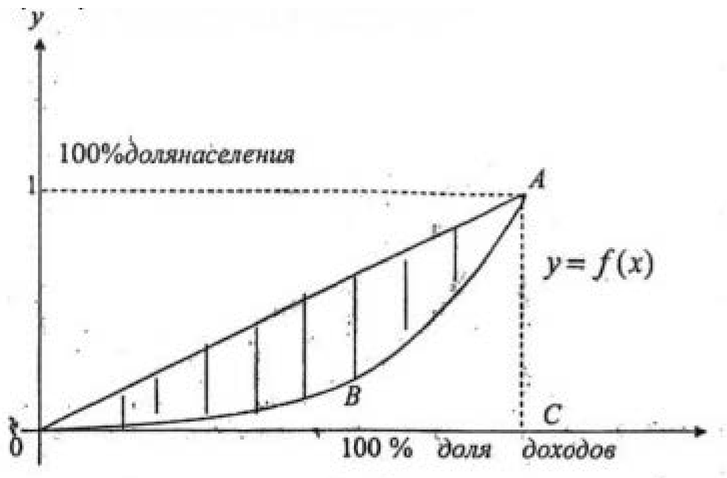


Рис 2.

При равномерном распределении доходов кривая Лоренца вырождается в прямую ОА.

Поэтому, чем больше площадь заштрихованной части, тем неравномернее распределено богатство в обществе.

Коэффициентом Джини называют площадь фигуры ОАВ, отнесенную к площади треугольника ОАС, т.е.

$$K = \frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta OAC}}$$

По определению имеем:

$K = \frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta OAC}} = \frac{\frac{1}{2} S_{\text{OBAC}}}{\frac{1}{2}} = 1 - 2\int_0^1 f(x)dx,$

где $S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}$, $S_{\text{OBAC}} = \int_0^1 f(x)dx.$

Группа «Финансисты»

1	**Пример 1.** Определить величину вклада через 2 года, если начальный капитал 50 000 у.е., процентная ставка 8%.
	Решение. Используя формулу $p = \int_0^T Se^{-\frac{rt}{100}}dt$, получим общую величину вклада через 2 года: 8(2-t) 16-8t $$S = \int_0^2 50000e^{\frac{8(2-t)}{100}}dt = 50000\int_0^2 e^{\frac{16-8t}{100}}dt = 50000(-\frac{100}{8}e^{\frac{8(2-t)}{100}})\Big|_0^2 = 108437{,}5\ у.о$$
2	**Пример 2**. Требуется определить начальный вклад, если выплаты должны составить 75 у.е. в течение трёх лёт, а процентная ставка 5%.
	Решение. Применим формулу $p = \int_0^T Se^{-\frac{rt}{100}}dt$, получим $p = \int_0^3 75e^{-\frac{5t}{100}}dt = 75(-\frac{100}{5}e^{-\frac{5t}{100}})\Big|_0^3 \approx 206{,}25\ \text{у. е.}$ Искомый начальный вклад составит 206,25 у.е.
3	**Пример 3**. Найти общее количество произведенного оборудования за три года, если k = 7% ежегодного роста, а $y_o = 12$ у. е.
	Решение. Применяя формулу (6), получим $$Y(t) = \int_0^3 12e^{0{,}07t}dt = 12 * \frac{100}{7}e^{0{,}07t}\Big|_0^3 = \frac{1200}{7}(e^{0{,}21} - e^0) = \frac{1200}{7}(e^{0{,}21} - 1) = 39{,}43(\text{у. е}).$$
4	**Пример 4.** По данным исследования в распределении доходов в одной из стран кривая Лоренца может быть описана уравнением $y = \sqrt[3]{x}$, где x - доля населения, y - доля доходов населения. Вычислить коэффициент Джини, провести экономический расчет.
	Решение. Применяя формулу, $\text{К} = 1 - 2\int_0^1 f(x)dx$, получим $$\text{К} = 1 - 2\int_0^1 (1 - \sqrt[3]{x})dx = 1 - 2\left(x - \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{4}{3}}\right)\Bigg|_0^1 = 1 - 2\left(1 - \frac{3}{4}\right) = 0{,}5$$

	Достаточно высокое значение К показывает существенно неравномерное распределение доходов среди населения в рассматриваемой стране.
5	**Пример 5**. Требуется определить начальный вклад, если выплаты должны составить 75 у.е. в течение трёх лет, а процентная ставка 5%.
	Решение. Применим формулу (26), получим $$p = \int_0^3 75e^{-\frac{5t}{100}}dt = 75(-\frac{100}{5}e^{-\frac{5t}{100}})\Big\|_0^3 \approx 206{,}25 \text{ у. е.}$$ Искомый начальный вклад составит 206,25 у.е.
6	**Пример 6.** Найти общее количество произведенного оборудования за три года, если k =7% ежегодного роста, а y_o =12у.е.
	Решение. применяя формулу (27), получим $$Y(t) = \int_0^3 12e^{0{,}07t}dt = 12 * \frac{100}{7}e^{0{,}07t}\Big\|_0^3 = \frac{1200}{7}(e^{0{,}21} - e^0) = \frac{1200}{7}(e^{0{,}21} - 1) = 39{,}43(\text{у. е}).$$ Причем уровень производства за указанный период увеличится на 27,3%.