1. Теория комплексных чисел

Определение комплексного числа, действия над комплексными числами в алгебраической форме

Комплексными числами называются числа вида $z = a + bj$,
где a и b - действительные числа, а $j(i)$ - мнимая единица (в электротехнике символ «i» заменили символом «j» т.к. «i» обозначает мгновенное значение силы тока).

$$j^2 = -1 \Rightarrow j = \sqrt{-1}$$

a -действительная часть комплексного числа;
b - мнимая часть комплексного числа.

Числа $z = a + bj$ и $z = a - bj$ называются комплексно-сопряжёнными.

На множестве комплексных чисел выполняются все известные математические действия, в том числе и извлечение корня чётной степени из отрицательного числа.

Например:

1) $(2+3j)+(-4-5j)=(2+(-4))+(3j+(-5j))=-2-2j$;

2) $(7-3j)-(6+2j)=(7-6)+(-3j-2j)=1-5j$;

3) $(3-2j)\cdot(4+8j)=3\cdot 4+3\cdot 8j-2j\cdot 4-2j\cdot 8j=12+24j-8j-16j^2=28+16j$;

4) $(8+3j):(1-3j)=\dfrac{(8+3j)\cdot(1+3j)}{(1-3j)\cdot(1+3j)}=\dfrac{8\cdot 1+8\cdot 3j+3j\cdot 1+3j\cdot 3j}{1^2+3^2}=\dfrac{8+24j+3j-9}{10}=$

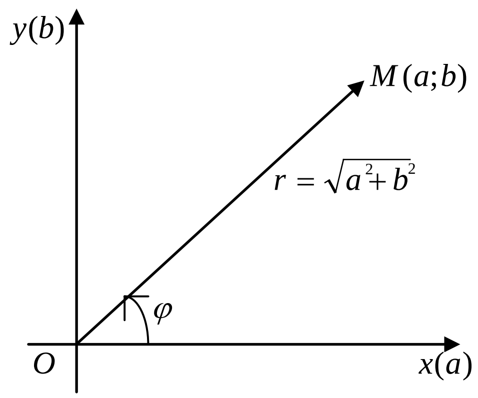
$=\dfrac{-1+27j}{10}=-0{,}1+2{,}7j.$

При выполнении деления комплексных чисел нужно числитель и знаменатель умножать на число, сопряжённое знаменателю.

Геометрическое изображение комплексных чисел.
Модуль и аргумент комплексного числа.

Любое комплексное число $z = a + bj$ можно изобразить на координатной плоскости в виде точки $M(a;b)$, где по оси *Ox* отмечают действительную, а по оси *Oy* мнимую часть комплексного числа. Каждой точке плоскости с координатами $(a;b)$ соответствует один и только один вектор с началом в точке $O(0;0)$ и концом в точке $M(a;b)$. Он называется радиус – вектором. Длина этого вектора называется модулем комплексного числа и вычисляется по формуле $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ а угол, образованный радиус-вектором с положительным направлением оси *Ox* , называется аргументом комплексного числа. Радиус вектор вычисляется по формуле: $tg\varphi = \dfrac{b}{a}$ (учитывая четверть). Аргумент определяется неоднозначно. Наименьшее по абсолютной величине значение аргумента из промежутка $-\pi \le \varphi \le \pi$ называется главным значением аргумента.

$$z = a + bj$$



Пример: Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = 8 - 5j$.
Решение:

$r = \sqrt{8^2 + (-5)^2} = \sqrt{89} \approx 9{,}43$;

$tg\varphi = \frac{-5}{8} = -0{,}625 \Rightarrow \varphi = arctg(-0{,}625)$

т.к. точка с координатами $(8;-5)$ лежит в 4 четверти, то $\varphi \approx -32^\circ$.

Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.

Кроме алгебраической формы $z = a + bj$ существует ещё две формы: тригонометрическая и показательная.

$z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$ − тригонометрическая форма комплексного числа;

$z = re^{j\varphi}$ − показательная форма комплексного числа. В алгебраической форме удобно выполнять действия сложения и вычитания, а в показательной и тригонометрической формах удобно выполнять умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня.

3. Выполнение арифметических действий над комплексными числами.

Выполните действия:

1) $(10 - 2j) + (-7 + 5j) =$

2) $(-2 + 12j) - (-7 - 24j) =$

3) $(5 - 6j) \cdot (9 + 11j) =$

4) $(-8 - j) : (3 + 4j) =$

4. Нахождение модуля и аргумента комплексного числа.

Найдите модуль и аргумент комплексного числа $z = -7 + 2j$.
Решение:

Проверка заданий:

1) $(10-2j)+(-7+5j)=3+3j$;

2) $(-2+12j)-(-7+24j)=5-12j$;

3) $(5-6j)\cdot(9+11j)=111+j$;

4) $(-8-j):(3+4j)=-1{,}12+1{,}16j$

$z=-7+2j$

$r=\sqrt{(-7)^2+2^2}=\sqrt{53}\approx 7{,}28$;

$tg\,\varphi=\dfrac{2}{-7}\approx -0{,}28 \Rightarrow \varphi\approx 164{,}05^\circ$ (т.к. $\varphi\in 2$ четв.)

5. Объяснение нового материала.

Как видите, вычисления комплексных чисел вызывают определённые затруднения. Особенно действия умножения, деления, нахождение модуля и аргумента комплексного числа. А если учесть, что задания с комплексными числами являются частью других задач по электротехнике или по электрическим машинам, то естественно хочется найти способ, позволяющий ускорить и облегчить эту работу. Таким помощником для нас является калькулятор. В начале первого курса мы просим всех студентов приобрести инженерные калькуляторы. Для специальности «Электрик» калькуляторы должны содержать кнопочки:

$\rightarrow$ re	$\rightarrow$ xy	cpl x
a	b	$\rightarrow$

а) Выполнение арифметических действий над комплексными числами.

- Войти в режим комплексных чисел – 2ndF- cpl x $\boxed{\rightarrow}$

- Ввести необходимое комплексное число:

«действительная часть числа - кнопка a - мнимая часть числа - кнопка b »;

- Указать нужное действие;

- Ввести следующее комплексное число (аналогично);

- Нажать знак «=», после чего появится действительная часть результата;

- Нажать кнопку «b»,после чего появится мнимая часть результата.

Пример:

$(12-9j):(-4-2j)$

Решение:

В режиме комплексных чисел выполнить действия:

12 –«*a*» - 9 – «b» - «:» - 4 – «+/-» - «*a*» - 2 – «+/-» - «*b*»-
- «=» *(получим действительную часть результата «-3.3»)* - «*b*»*(получим мнимую часть результата «-0.6»)*

Можно проверить с помощью калькулятора предыдущие примеры.

б) Нахождение модуля и аргумента комплексного числа.

- Установить с помощью кнопки «DRG» режим калькулятора «DEG» (т.е. величина угла будет показана в градусах; если нужно величину угла в радианах, то с помощью этой же кнопки установить режим «RAD»);
- Набрать комплексное число на калькуляторе:

«действительная часть числа - кнопка *a* - мнимая часть числа - кнопка *b* »;

- Нажать «2ndF –***a*** *(появится модуль комплексного числа)* – ***b****(появится аргумент комплексного числа).*

Пример:

Перевести число *z= 5+10j* в показательную и тригонометрическую формы.

Решение:

Найдём модуль и аргумент данного комплексного числа:

5-«а» - 10 – «b» - «2ndF» - «а» *(получим модуль данного числа 11,18)* – «b» - -*(получим аргумент данного числа* $63{,}43^0$ *).*

$Z=11{,}18(\cos 63{,}43^0+j\sin 63{,}43^0)$ *– тригонометрическая форма)*;

$Z=11{,}18\ e^{j63{,}46}$ *- показательная форма.*

6. Закрепление нового материала

В качестве закрепления нового материала можно решить задачи из сборника по ТОЭ.