Сравнительный анализ наборов задач по теме «Первый признак подобия треугольников»

Автор – учитель математики ГБОУ школы №472 им. А.Т.Карпова Выборгского района Санкт-Петербурга Савенко О.А.

Сравнительный анализ задачного материала по теме «Первый признак подобия треугольников» будет реализован с использованием двух учебников: *«Геометрия. 7-9 классы» Л. С. Атанасяна*, *«Геометрия. 8 класс» Аркадия Мерзляка.* Так как необходимо осуществить анализ задач, которые могут быть применены на этапе введения нового материала, а именно теоремы, то целесообразно будет рассматривать функции задач по их дидактической цели. Также выделим для последующего рассмотрения, исходя из предложенного контекста методической задачи, функции задач по уровню сложности. К тому же рассмотрим функции задач, которые представлены в выделенных выше учебниках, по особенностям требования.

Составим типологию задач из данных учебников по выделенным выше функциям.

Так как *этап введения нового материала* в контексте изучения с учащимися теоремы предполагает под собой следующие подэтапы: профессиональный, подготовительный и основной, то выделим ниже дидактические цели задач, которые удовлетворяют данным этапам. Также включим в данную типологию задачи на первичное закрепление, так как контекст методической ситуации предполагает дифференцированный подход, и учащиеся с сильным уровнем усвоения образовательной программы могут решать данные задачи на этапе введения нового материала. В контексте работы со всеми остальными типологиями укажем на то, что составление типологии задач, необходимых на этапе введения нового материала, очень тривиальна. Соответственно, составим типологию задач по уровню сложности и по особенностям требования на основании рассмотрения всего набора задач по данной теме.

Типология задач по дидактическим целям

1) Для актуализации знаний и умений.

2) Для мотивации к изучению теоремы.

3) Для первичного закрепления изученного материала.

Отметим, что задачи на актуализацию необходимых знаний и умений для последующего изучения теоремы о первом признаке подобия треугольников были подобраны из разных параграфов учебников. Во второй части данной работы с помощью ЛМА и составления поиска доказательства данной теоремы было выявлено, что на основании образовательных программ по разным учебникам, необходимо актуализировать разный набор знаний и умений.

1) Задачи на актуализацию знаний из учебника *Л. С Атанасяна*.

1. На знание формулировки и умение применять теорему о сумме углов треугольника:

223 Найдите угол C треугольника ABC, если: а) $\angle A=65°$, $\angle B=57°$; б) $\angle A=24°$, $\angle B=130°$; в) $\angle A=\alpha$, $\angle B=2\alpha$; г) $\angle A=60°+\alpha$, $\angle B=60°-\alpha$.

2. На знание сущности и определения понятия подобных треугольников, сходственных сторон и пропорциональных отрезков:

542 В подобных треугольниках ABC и KMN стороны AB и KM, BC и MN являются сходственными. Найдите стороны треугольника KMN, если $AB=4$ см, $BC=5$ см, $CA=7$ см, $\frac{KM}{AB}=2{,}1$.

2) Задачи на мотивацию для изучения теоремы в учебнике *Л. С. Атанасяна* отсутствуют.

3) Задачи для первичного закрепления из учебника *Л. С. Атанасяна:*

551 На стороне CD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E. Прямые AE и BC пересекаются в точке F. Найдите: а) EF и FC, если $DE=8$ см, $EC=4$ см, $BC=7$ см, $AE=10$ см; б) DE и EC, если $AB=8$ см, $AD=5$ см, $CF=2$ см.

552 Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD пересекаются в точке O. Найдите: а) AB, если $OB=4$ см, $OD=10$ см, $DC=25$ см; б) $\frac{AO}{OC}$ и $\frac{BO}{OD}$, если $AB=a$, $DC=b$; в) AO, если $AB=9{,}6$ дм, $DC=24$ см, $AC=15$ см.

554 Основания трапеции равны 5 см и 8 см. Боковые стороны, равные 3,6 см и 3,9 см, продолжены до пересечения в точке M. Найдите расстояния от точки M до концов меньшего основания.

1) Задачи на актуализацию знаний из учебника *Аркадия Мерзляка:*

1. На знание сущности понятия и определения подобных треугольников, сходственных сторон:

424.° Подобны ли треугольники ABC и MNK, если $\angle A = 40°$, $\angle B = 82°$, $\angle M = 40°$, $\angle K = 58°$, $AB = 2{,}4$ см, $BC = 2{,}1$ см, $AC = 3{,}9$ см, $MN = 3{,}2$ см, $NK = 2{,}8$ см, $MK = 5{,}2$ см?

423.° На рисунке 134 изображены подобные треугольники ABC и DEF, равные углы которых отметили одинаковым количеством дуг. Какие стороны этих треугольников пропорциональны? Запишите соответствующие равенства.

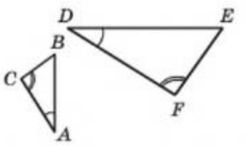


Рис. 134

451.° На рисунке 146 $\angle ABC = \angle BDC$. Какие треугольники на этом рисунке подобны? Запишите равенство отношений их соответственных сторон.

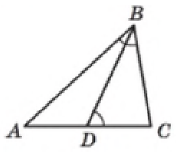


Рис. 146

2. На знание формулировки леммы о подобных треугольниках и на умение применять данную лемму:

429.° На рисунке 135 $AB \parallel CD$. Найдите на этом рисунке подобные треугольники. Запишите пропорции, начинающиеся с отношения: 1) $\frac{AE}{CE}$; 2) $\frac{CD}{AB}$; 3) $\frac{AB}{AE}$.

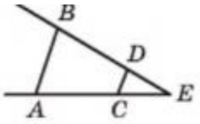


Рис. 135

3. На рисунке 170 $A_1C_1 \parallel AC$. Тогда:

А) $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{BA_1}{A_1A}$;

В) $\frac{BC}{BC_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$;

Б) $\frac{BA_1}{AB} = \frac{CB}{BC_1}$;

Г) $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BA_1}{AB}$.

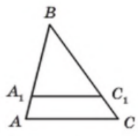


Рис. 170

3. На знание теоремы о втором признаке равенства треугольников, а также на умение ее применять:

170. На рисунке 141 $\angle ABC = \angle DEF$, $BO = OE$. Докажите, что $\Delta BCO = \Delta EFO$.

Рис. 140

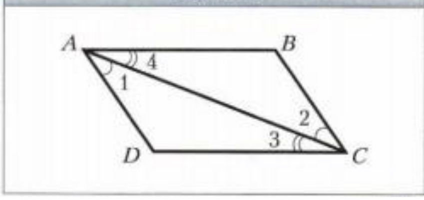
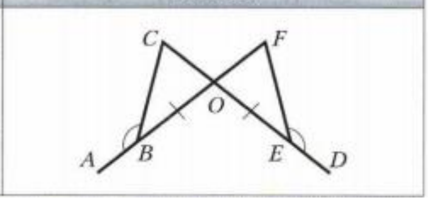
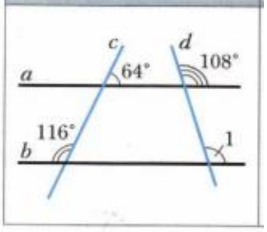


Рис. 141



4. На знание теоремы о соответствующих углах, образованных секущей при параллельных прямых и на умение ее применять:

Рис. 230



326. На рисунке 230 найдите угол 1.

2) Задачи на мотивацию для изучения теоремы в учебнике *Аркадия Мерзляка:*

470.• Объясните с помощью рисунка 149, как можно найти ширину BM реки, используя подобие треугольников.

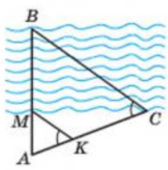


Рис. 149

471.* Дерево находится на расстоянии 60 м от объектива фотоаппарата. Высота его изображения на пленке равна 8 мм. Расстояние от объектива до пленки равно 40 мм (рис. 150). Какова высота дерева?

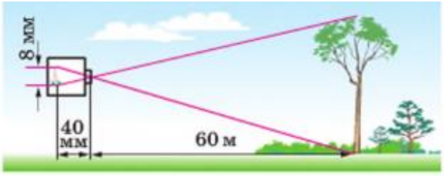


Рис. 150

472.* Найдите высоту дерева, если длина его тени равна 8,4 м, а длина тени от вертикального столба высотой 2 м в это же время суток равна 2,4 м (рис. 151).

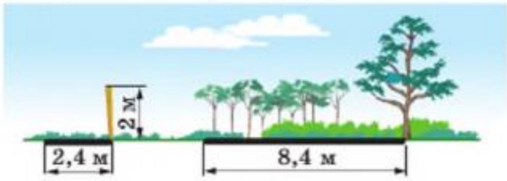


Рис. 151

3) Задачи для первичного закрепления данной темы из учебника *А. Мерзляка:*

449.° На рисунке 144 $\angle BAC = \angle BED$. Подобны ли треугольники ABC и EDB? В случае утвердительного ответа укажите пары соответственных сторон.

450.° На рисунке 145 $DE \perp AB$, $BC \perp AD$. Укажите все пары подобных треугольников, изображенных на этом рисунке.

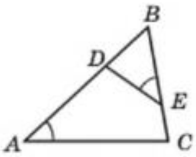


Рис. 144

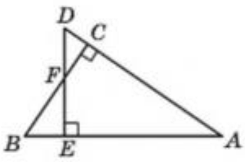


Рис. 145

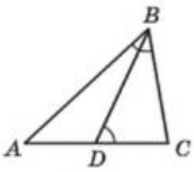


Рис. 146

451.° На рисунке 146 $\angle ABC = \angle BDC$. Какие треугольники на этом рисунке подобны? Запишите равенство отношений их соответственных сторон.

452.° Укажите пары подобных треугольников, изображенных на рисунке 147, найдите длину отрезка x (размеры даны в сантиметрах).

452.° Укажите пары подобных треугольников, изображенных на рисунке 147, найдите длину отрезка x (размеры даны в сантиметрах).

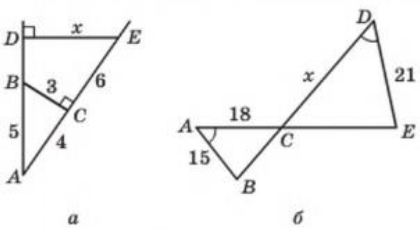


Рис. 147

453.° В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ известно, что $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $A_1B_1 = 9$ см, $A_1C_1 = 18$ см. Найдите неизвестные стороны данных треугольников.

Типология задач по уровню сложности

1. Задачи репродуктивного уровня.

2. Задачи продуктивного уровня.

3. Задачи творческого уровня.

---

1) Задачи репродуктивного уровня, которые содержатся в учебнике *Л. С. Атанасяна* по данной теме:

551 На стороне CD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E. Прямые AE и BC пересекаются в точке F. Найдите: а) EF и FC, если $DE=8$ см, $EC=4$ см, $BC=7$ см, $AE=10$ см; б) DE и EC, если $AB=8$ см, $AD=5$ см, $CF=2$ см.

552 Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD пересекаются в точке O. Найдите: а) AB, если $OB=4$ см, $OD=10$ см, $DC=25$ см; б) $\frac{AO}{OC}$ и $\frac{BO}{OD}$, если $AB=a$, $DC=b$; в) AO, если $AB=9{,}6$ дм, $DC=24$ см, $AC=15$ см.

554 Основания трапеции равны 5 см и 8 см. Боковые стороны, равные 3,6 см и 3,9 см, продолжены до пересечения в точке M. Найдите расстояния от точки M до концов меньшего основания.

2) Задачи продуктивного уровня, которые содержатся в учебнике *Л. С. Атанасяна* по данной теме:

553 Подобны ли равнобедренные треугольники, если они имеют: а) по равному острому углу; б) по равному тупому углу; в) по прямому углу? Ответ обоснуйте.

555 Точки M, N и P лежат соответственно на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC, причем $MN \parallel AC$, $NP \parallel AB$. Найдите стороны четырехугольника $AMNP$,

если: а) $AB=10$ см, $AC=15$ см, $PN : MN = 2:3$; б) $AM=AP$, $AB=a$, $AC=b$.

557 Стороны угла A пересечены параллельными прямыми BC и DE, причем точки B и D лежат на одной стороне угла, а C и E — на другой. Найдите: а) AC, если $CE=10$ см, $AD=22$ см, $BD=8$ см; б) BD и DE, если $AB=10$ см, $AC=8$ см, $BC=4$ см, $CE=4$ см; в) BC, если $AB:BD=2:1$ и $DE=12$ см.

562 В треугольнике ABC сторона AB равна a, а высота CH равна h. Найдите сторону квадрата, вписанного в треугольник ABC так, что две соседние вершины квадрата лежат на стороне AB, а две другие — соответственно на сторонах AC и BC.

563 Через точку M, взятую на медиане AD треугольника ABC, и вершину B проведена прямая, пересекающая сторону AC в точке K. Найдите отношение $\frac{AK}{KC}$, если: а) M — середина отрезка AD; б) $\frac{AM}{MD} = \frac{1}{2}$.

604 Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, $AB = 6$ см, $BC = 9$ см, $CA = 10$ см. Наибольшая сторона треугольника $A_1B_1C_1$ равна 7,5 см. Найдите две другие стороны треугольника $A_1B_1C_1$.

3) Задачи творческого уровня, которые содержаться в учебнике *Л. С. Атанасяна* по данной теме:

605 Диагональ AC трапеции $ABCD$ делит ее на два подобных треугольника. Докажите, что $AC^2 = a \cdot b$, где a и b — основания трапеции.

611 Докажите, что медиана AM треугольника ABC делит пополам любой отрезок, параллельный стороне BC, концы которого лежат на сторонах AB и AC.

---

1) Задачи репродуктивного уровня, которые содержатся в учебнике *А. Мерзляка* по данной теме:

449.° На рисунке 144 $\angle BAC = \angle BED$. Подобны ли треугольники ABC и EDB? В случае утвердительного ответа укажите пары соответственных сторон.

450.° На рисунке 145 $DE \perp AB$, $BC \perp AD$. Укажите все пары подобных треугольников, изображенных на этом рисунке.

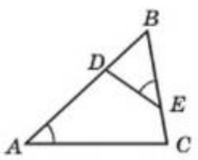


Рис. 144

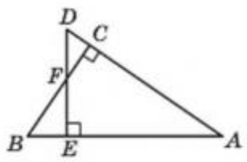


Рис. 145

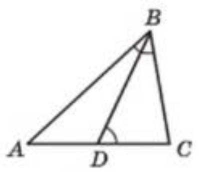


Рис. 146

451.° На рисунке 146 $\angle ABC = \angle BDC$. Какие треугольники на этом рисунке подобны? Запишите равенство отношений их соответственных сторон.

452.° Укажите пары подобных треугольников, изображенных на рисунке 147, найдите длину отрезка x (размеры даны в сантиметрах).

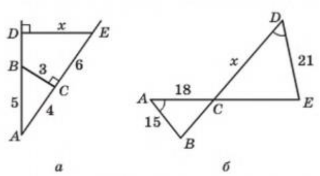


Рис. 147

453.° В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ известно, что $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $A_1B_1 = 9$ см, $A_1C_1 = 18$ см. Найдите неизвестные стороны данных треугольников.

2) Задачи продуктивного уровня, которые содержатся в учебнике *А. Мерзляка* по данной теме:

454.° На стороне CD параллелограмма $ABCD$ (рис. 148) отметили точку E, прямые BE и AD пересекаются в точке F, $CE = 8$ см, $DE = 4$ см, $BE = 10$ см, $AD = 9$ см. Найдите отрезки EF и FD.

455.° В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) известно, что $AD = 20$ см, $BC = 15$ см, O — точка пересечения диагоналей, $AO = 16$ см. Найдите отрезок OC.

456.° Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD пересекаются в точке O. Найдите основание AD, если $BO : OD = 3 : 7$, $BC = 18$ см.

457.° Подобны ли два прямоугольных треугольника, если среди углов одного из них есть угол, равный 38°, а среди углов другого — угол, равный 52°?

458.° Докажите, что два равнобедренных треугольника подобны, если углы, противолежащие их основаниям, равны.

459.° Можно ли утверждать, что два равнобедренных треугольника подобны, если у них есть: 1) по равному острому углу; 2) по прямому углу; 3) по равному тупому углу?

460.° Угол между боковой стороной и основанием одного равнобедренного треугольника равен углу между боковой стороной и основанием другого равнобедренного треугольника. Боковая сторона и основание первого треугольника равны 18 см и 10 см

соответственно, а основание второго равно 8 см. Найдите боковую сторону второго треугольника.

461.° Из вершины прямого угла треугольника опущена высота на гипотенузу. Сколько подобных треугольников образовалось при этом?

462.° Стороны параллелограмма равны 20 см и 14 см, высота, проведенная к большей стороне, равна 7 см. Найдите высоту параллелограмма, проведенную к меньшей стороне.

463.• В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD диагонали пересекаются в точке O, $BO = 4$ см, $OD = 20$ см, $AC = 36$ см. Найдите отрезки AO и OC.

466.• Докажите, что в подобных треугольниках высоты, проведенные из вершин соответственных углов, относятся как соответственные стороны.

467.• Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 28 см и 63 см, $\angle ABC = \angle ACD$. Найдите диагональ AC.

468.• На стороне AC треугольника ABC отметили точку D такую, что $\angle ABD = \angle C$, $AB = 20$ см, $BC = 28$ см, $AC = 40$ см. Найдите неизвестные стороны треугольника ABD.

469.• Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 20 см, а больший катет — 16 см. Найдите отрезки, на которые серединный перпендикуляр гипотенузы делит больший катет.

470.• Объясните с помощью рисунка 149, как можно найти ширину BM реки, используя подобие треугольников.

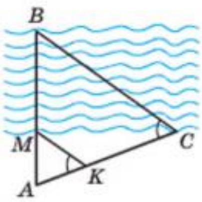


Рис. 149

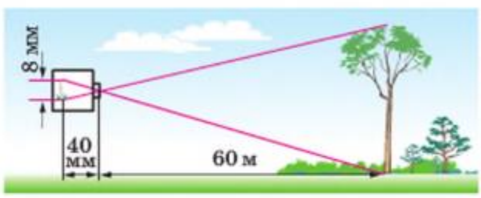


Рис. 150

473.$^{\bullet}$ Может ли прямая пересекать две стороны равнобедренного треугольника, отсекать от него треугольник, ему подобный, и не быть параллельной третьей стороне?

474.$^{\bullet}$ Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M, $AM = 6$ см, $BM = 14$ см, $CM = 12$ см. Найдите отрезок DM.

471.$^{\bullet}$ Дерево находится на расстоянии 60 м от объектива фотоаппарата. Высота его изображения на пленке равна 8 мм. Расстояние от объектива до пленки равно 40 мм (рис. 150). Какова высота дерева?

472.$^{\bullet}$ Найдите высоту дерева, если длина его тени равна 8,4 м, а длина тени от вертикального столба высотой 2 м в это же время суток равна 2,4 м (рис. 151).

Рис. 151

475.$^{\bullet}$ Хорды MK и NP окружности пересекаются в точке F, $MF = 9$ см, $KF = 12$ см, а отрезок NF в 3 раза длиннее отрезка PF. Найдите длину хорды NP.

476.$^{\bullet}$ Точка K делит хорду AC окружности пополам, а хорду DE — на отрезки длиной 2 см и 32 см. Найдите длину хорды AC.

3) Задачи творческого уровня, которые содержатся в учебнике *А. Мерзляка* по данной теме:

477.$^{\bullet\bullet}$ Точка E делит хорду CD окружности на отрезки длиной 15 см и 16 см. Найдите радиус окружности, если расстояние от точки E до центра окружности равен 4 см.

478.$^{\bullet\bullet}$ Точка P делит хорду MK окружности на два отрезка длиной 8 см и 12 см. Найдите расстояние от точки P до центра окружности, если ее радиус равен 11 см.

479.$^{\bullet\bullet}$ Через точку A проведены к окружности касательная AM (M — точка касания) и секущая, которая пересекает окружность в точках K и P (точка K лежит между точками A и P). Найдите отрезок KP, если $AM = 12$ см, $AP = 18$ см.

480.$^{\bullet\bullet}$ Через точку A, лежащую вне окружности, проведены две прямые, одна из которых касается окружности в точке B, а другая пересекает окружность в точках C и D (точка C лежит между точками A и D), $AB = 18$ см, $AC : CD = 4 : 5$. Найдите отрезок AD.

481.$^{\bullet\bullet}$ Через точку A, лежащую вне окружности (рис. 152), проведены две прямые, одна из которых пересекает окружность в точках B и C (точка B лежит между точками A и C), а другая — в точках D и E (точка D лежит между точками A и E).

1) Докажите, что $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

2) Найдите отрезок AE, если $AB = 18$ см, $BC = 12$ см и $AD : DE = 5 : 7$.

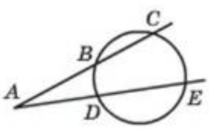


Рис. 152

482.** В окружности, радиус которой равен 8 см, проведена хорда AB. На прямой AB вне отрезка AB отметили точку C такую, что $AC : BC = 1 : 4$. Найдите расстояние от точки C до центра окружности, если $AB = 9$ см.

483.** В треугольник ABC вписан квадрат так, что две его соседние вершины принадлежат стороне AC, а две другие — сторонам AB и BC соответственно. Найдите сторону квадрата, если $AC = a$, а высота, проведенная к стороне AC, равна h.

484.** В треугольнике ABC известно, что $BC = 72$ см, AD — высота, $AD = 24$ см. В данный треугольник вписан прямоугольник $MNKP$ так, что вершины M и P принадлежат стороне BC, а вершины N и K — сторонам AB и AC соответственно. Найдите стороны прямоугольника, если $MP : MN = 9 : 5$.

488. Как два равных выпуклых четырехугольника разрезать на части, из которых можно составить параллелограмм?

Типология задач по особенностям требования

1. Задачи на построение.

2. Задачи на вычисление.

3. Задачи на доказательство.

4. Задачи на определение (выяснение).

---

1) Задачи на построение в учебнике *Л. С. Атанасяна* по данной теме отсутствуют.

2) Задачи на вычисление, которые содержатся в учебнике *Л. С. Атанасяна* по данной теме:

№ 551, № 552, № 554, № 555, № 557, № 562, № 563, № 604.

3) Задачи на доказательство из учебника *Л. С. Атанасяна* по данной теме:

№ 605, № 611.

4) Задачи на определение (на выяснение) из учебника *Л. С. Атанасяна* по данной теме:

№ 553.

---

1) Задачи на построение в учебнике *А. Мерзляка* по данной теме отсутствуют.

2) Задачи на вычисление, которые содержатся в учебнике *А. Мерзляка* по данной теме:

№452, № 453, № 454, № 455, № 456, № 460, № 462, № 467, № 468, № 469, № 471, № 472, № 474, № 475, № 476, № 477, № 479, № 480, № 481, № 482, № 483, № 484.

3) Задачи на доказательство из учебника *А. Мерзляка* по данной теме:

№ 458, № 466, № 470, № 481.

4) Задачи на определение (выяснение) из учебника *А. Мерзляка* по данной теме:

№ 449, № 450, № 451, № 452, № 457, № 459, № 461, № 473, № 488.

Сравнительный анализ задач для реализации *этапа введения нового материала* из данных учебников отразим в таблице 1.

Таблица 1

Критерий сравнения	**Учебник Л. С. Атанасяна**	**Учебник А. Мерзляка**
1. Есть ли в учебнике разделение задач по их дидактической функции?	Нет, такое разделение отсутствует. Поэтому задачи необходимо отбирать учителю самостоятельно, анализируя текст всего учебника.	Нет, такое разделение отсутствует. Поэтому задачи необходимо отбирать учителю самостоятельно, анализируя текст всего учебника.
2. Анализ набора задач на актуализацию знаний и умений.	Набор задач является неполным, так как в данном учебнике отсутствуют задачи на актуализацию умений по применению теоремы о площадях треугольников с соответственно равными углами.	Набор задач для актуализации знаний, представленный в данном учебнике, является полным.
3. Анализ набора задач на мотивацию.	В данном учебнике задачи на мотивацию по данной теме отсутствуют.	В данном учебнике представлен достаточный набор задач на мотивацию, связанных с применением полученных знаний по изучаемой теме в жизненных ситуациях.
4. Анализ набора задач на первичное закрепление.	В данном учебнике содержится достаточный набор задач для реализации первичного закрепления. В	В данном учебнике содержится достаточно большой набор задач на первичное закрепление. В основном данные задачи по условию

	основном данные задачи по условию требования являются задачами на вычисление.	требования являются задачами на выяснение.
5. Есть ли в данном учебнике некоторый инструментарий для применения дифференцированного подхода?	Есть, так как в данном учебнике содержатся дополнительные задачи к главе повышенного уровня сложности.	Есть, так как в параграфе учебника есть соответствующие условные обозначения для уровня сложности задач.
6. Насколько большим и разнообразным является набор задач для реализации введения нового материала в данных учебниках по данной теме?	Набор задач является отчасти скудным, так как суммарное количество задач по данной теме является небольшим, а также задачи на мотивацию, как уже говорилось выше, совершенно отсутствуют.	Набор задач является практически полным, ибо суммарное количество задач по данной теме для реализации этапа введения нового материала достаточно большое. Было бы здорово для полноты данного набора добавить задания, предполагающие в результате их решения подведение учащихся к новому теоретическому факту.

Таким образом, при проведении урока по данной теме можно предлагать учащимся для решения как задачи из учебника Л. С. Атанасяна, так и задачи из учебника А. Мерзляка. Из учебника Л. С. Атанасяна можно позаимствовать задачи на вычисление с целью первичного закрепления учебного материала учащимися с сильным уровнем усвоения образовательной программы по математике. Из учебника А. Мерзляка целесообразно будет взять задачи на мотивацию и задачи на выяснение с целью первичного закрепления для учащихся с сильным уровнем усвоения образовательной программы. Также отметим то, что необходимо при подборе задач на актуализацию знаний выбирать задачи из учебника, с которым работают дети и учитель на протяжении всего курса обучения геометрии, так как принцип доказательства первого признака подобия треугольников в данных учебниках разный.

Часть 2. Подбор заданий для реализации этапа актуализации знаний

Осуществим логико-математический анализ теоремы и реализуем поиск ее доказательства для того, чтобы выделить актуализируемые знания и умения с целью подбора задач на актуализацию знаний и умений учащихся.

Формулировка теоремы о первом признаке подобия треугольников. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

$$\forall\ (x, y) \in A \times B \quad f(x, y) \rightarrow g(x, y),$$

где $A \times B$ — множество пар треугольников,

$f(x, y)$ — два угла в x равны двум углам в y,

$g\ (x, y)$ — x подобен y.

Составим обратное утверждение к данному, противоположное и обратное к противоположному.

1. $\forall\ (x, y) \in A \times B \quad g(x, y) \rightarrow f(x, y).$

Если два треугольника подобны, то два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника. *Данное утверждение является истинным.*

2. $\forall\ (x, y) \in A \times B \quad \neg\ f(x, y) \rightarrow \neg\ g(x, y).$

Если два угла одного треугольника соответственно не равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники не являются подобными. *Данное утверждение является истинным.*

3. $\forall\ (x, y) \in A \times B \quad \neg\ g(x, y) \rightarrow \neg\ f(x, y).$

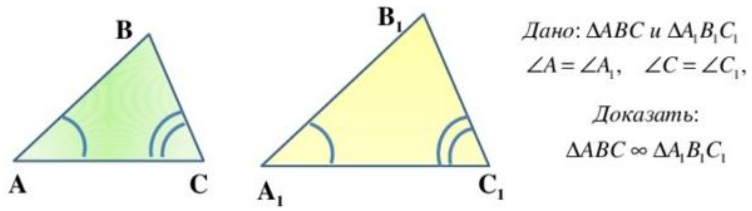
Если два треугольника не являются подобными, то два угла одного треугольника соответственно не равны двум углам другого треугольника. *Данное утверждение является истинным.*

Исходя из осуществленного логико-математического анализа выделим необходимые для актуализации знания и умения.

1. Знание сущности и определения понятия подобных треугольников.

2. Знание сущности и определения понятия треугольника и его элементов.

Осуществим поиск доказательства данной теоремы.



Нам необходимо доказать, что данные треугольники подобны. Соответственно, нам нужно обратиться к определению подобных треугольников. «Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого треугольника». Исходя из данного определения, нам необходимо доказать, что $\angle B = \angle B_1$, а также пропорциональность сходственных сторон треугольников, то есть: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$. Равенство указанных выше углов легко доказать, воспользовавшись теоремой о сумме углов треугольника. Пропорциональность сходственных сторон можно доказать с помощью теоремы о площадях треугольников с соответственно равными углами.

Исходя из реализованного поиска доказательства данной теоремы, выделим актуализируемые знания и умения.

1. Знание сущности понятия подобных треугольников, сходственных сторон и коэффициента подобия.

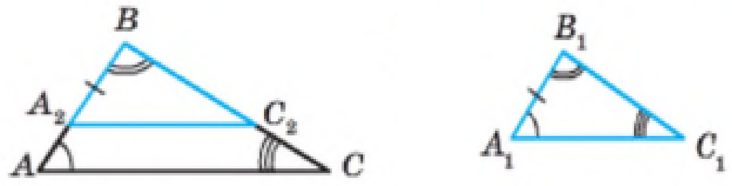
2. Знание сущности и определения понятия треугольника и его элементов.

3. Знание формулировки теоремы о сумме углов треугольника и умение ее применять.

4. Знание формулировки теоремы о площадях треугольников с соответственно равными углами и умение ее применять.

5. Знание сущности и определения понятия пропорциональных отрезков.

Заметим, что в разных учебниках доказательство данной теоремы реализуется по-разному: на основании различных вспомогательных теорем, которые были ранее изучены учащимися. Исходя из этого факта, отметим, что целесообразно рассмотреть второй вариант поиска доказательства данной теоремы на основании тех геометрических фактов, которые учащиеся изучали по учебнику А. Мерзляка.



Дано: $\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1$.

Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Для того, чтобы доказать, что треугольники подобны, то есть $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, можно воспользоваться леммой о подобных треугольниках.

Согласно лемме о подобных треугольниках, прямая, параллельная стороне треугольника и пересекающая две другие его стороны, отсекает от данного треугольника ему подобный. Соответственно, исходя из данного геометрического факта, нам необходимо осуществить дополнительное построение. Построим треугольник A_2C_2B, равный треугольнику $A_1C_1B_1$ и подобный треугольнику ABC, отложив на стороне ВА отрезок, равный стороне A_1B_1. Также сторона данного треугольника, A_2C_2, должна удовлетворять следующим условиям: $A_2C_2 \parallel AC, A_2C_2 \cap AB = A_2,\ A_2C_2 \cap BC = C_2$. При этом построении, согласно вышеуказанной лемме, $A_2C_2B \sim ABC,$ а также $A_2C_2B = A_1C_1B_1,$ по второму признаку равенства треугольников, так как $\angle A = \angle A_2 = \angle A_1$ (как соответствующие углы, образованные двумя параллельными прямыми и секущей), $A_1B_1 = A_2B$ (по построению), $\angle B = \angle B_1$(из условия теоремы).

Исходя из реализованного поиска доказательства данной теоремы, выделим актуализируемые знания и умения.

1. Знание сущности понятия и определения подобных треугольников, сходственных сторон и коэффициента подобия.

2. Знание формулировки леммы о подобных треугольниках и умение применять данную лемму.

3. Знание формулировки второго признака равенства треугольников и умение применять данный признак.

4. Знание аксиомы об откладывании единственного отрезка, равному данному, на любом луче и умение применять данную аксиому.

5. Знание теоремы о соответствующих углах, образованных двумя параллельными прямыми и секущей и умение применять данную теорему.

6. Знание определения и сущности понятия параллельных прямых и углов, образованных данными прямыми.

7. Знание сущности и определения понятия треугольника и его элементов.

Составим задания на актуализацию знаний и умений учащихся, исходя из контекста задачи, а именно из того, что для реализации данного этапа урока можно осуществить групповую форму работы, в которой сильные учащиеся выполняли бы роль консультантов. Также укажем на то, что этап актуализации знаний будет реализовываться на основании образовательной программы по учебнику Л. С. Атанасяна.

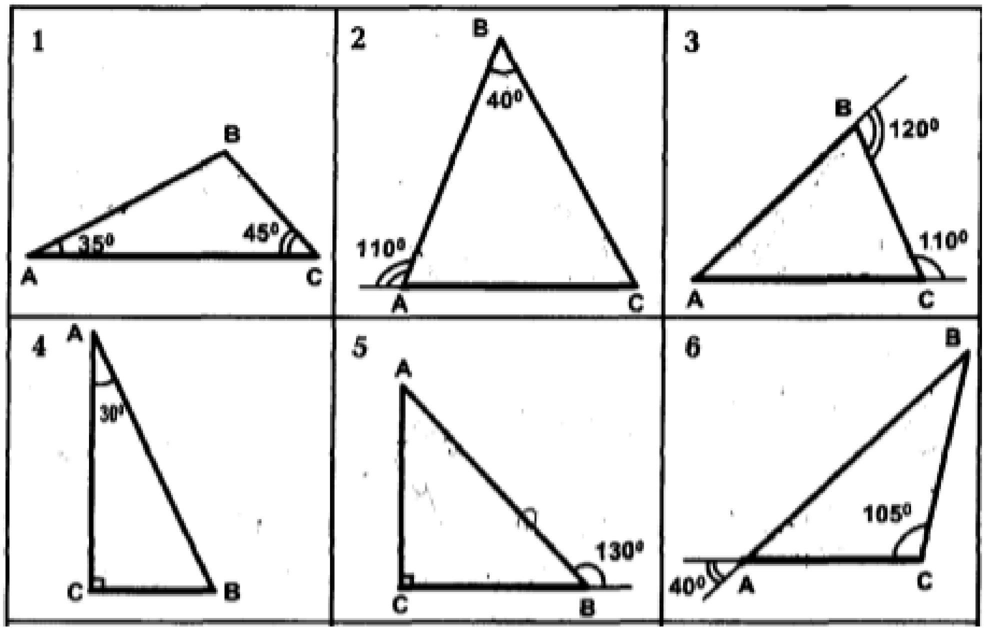
Опишем организационный момент перед данным этапом урока. Класс необходимо разделить на несколько групп, в которых будет не больше 4 человек таким образом, чтобы в каждой команде были сильные, средние и слабые учащиеся в контексте уровня усвоения ими образовательной программы. В каждой группе необходимо выбрать ответственного учащегося с отличным или хорошим уровнем подготовки по математике, который будет как консультировать участников данной группы, так и оценивать их деятельность по окончанию данного этапа урока.

Допустим, что в учебном классе, в котором планируется проведение данной работы, 24 человека, и класс удалось разделить на 6 команд, каждые из которых равноценны в аспекте уровня усвоения ее членами образовательной программы. С целью экономии времени учащимся по мере реализации данного этапа урока будут выдаваться соответствующие заготовки на листах бумаги для внесения туда ответов, которые представлены в приложении 1.

Задание № 1

Организационный аспект данного задания	*Содержательный аспект данного задания*	*Оценочный аспект данного задания*
Каждой команде выдается несколько карточек, представленных на рисунке 1, а также соответствующие заготовки для внесения туда командами ответов. Количество карточек, выдаваемых на одну команду, будет равно количеству учащихся в группе. Задача учащихся состоит в том, чтобы за наиболее короткое время всей командой правильно решить набор заданий. Учителю необходимо зафиксировать то, какая команда справится первой, второй и третьей. Это можно реализовать, попросив команды поднять руки в тот момент, когда они справятся с заданием, и отдать ответ на задание учителю. Проверка данного задания будет осуществляться учителем во время того, как учащиеся будут работать над вторым заданием.	Учащимся необходимо найти сумму углов в треугольнике, который представлен на карточке.	Оцениваться будет, во-первых, скорость решения данного задания командами, а, во-вторых правильность. Той команде, которая справится первой, дается 3 дополнительных балла, второй команде – 2 балла, 3 команде – 1 балл. За каждую верно выполненную карточку команда получает 1 балл.

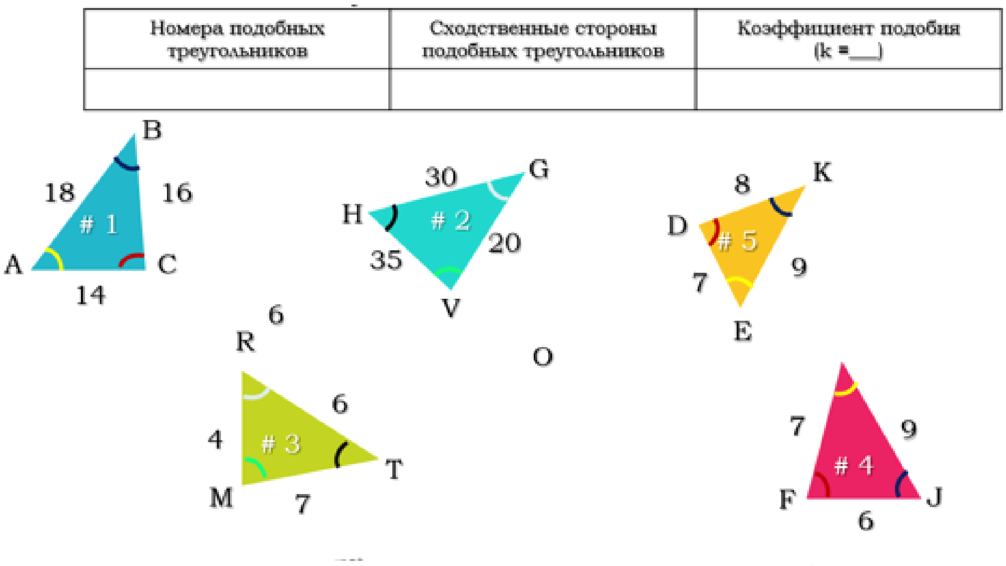
Рисунок 1



Задание № 2

Организационный аспект данного задания	*Содержательный аспект данного задания*	*Оценочный аспект данного задания*
Учитель выводит на мультимедийную доску ту информацию, которая содержится на рисунке 2, и выдает учащимся соответствующие заготовки для внесения туда ответов. На выполнение данного задания учащимся дается 3 минуты. После выполнения данного задания командой учитель просит сдать учащихся листы с ответами для их последующей проверки во время выполнения учащимися третьего задания.	Учащимся необходимо заполнить таблицу, представленную на рисунке 2. А именно, выписать в таблицу номера пар подобных треугольников из предложенных, указать их сходственные стороны и найти коэффициент подобия. Причем равные углы в данных треугольниках обозначены дугами одинаковых цветов.	Максимальное количество баллов, которое можно получить за данное задание, равно 6. За каждый недочет из максимального количества баллов вычитается 1 балл, а за каждую ошибку – 2 балла.

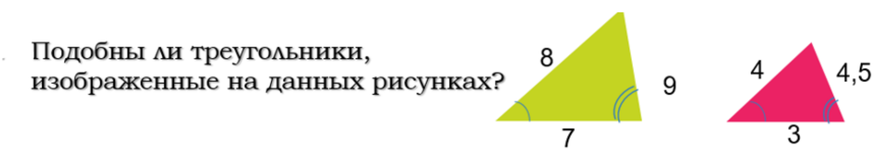
Рисунок 2



Задание № 3

Организационный аспект данного задания	*Содержательный аспект данного задания*	*Оценочный аспект данного задания*
Учитель выводит на мультимедийную доску ту информацию, которая содержится на рисунке 3, и выдает учащимся заготовки для внесения туда ответов. На выполнение данного задания учащимся дается 2 минуты. После выполнения задания командой учитель просит сдать учащихся листы с ответами для их последующей проверки во время выполнения учащимися четвертого задания.	Учащимся необходимо ответить на вопрос о том, подобны ли треугольники, представленные на рисунке 3, а также дать обоснование своему ответу.	Максимально за данное задание можно получить 4 балла. За верно данный ответ, но допущенную ошибку в обосновании дается 2 балла. За верно данный ответ, но допущенный недочет в обосновании дается 3 балла.

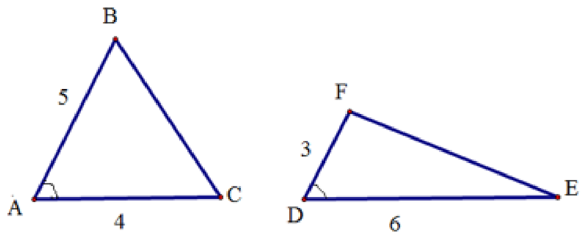
Рисунок 3



Задание № 4

Организационный аспект данного задания	*Содержательный аспект данного задания*	*Оценочный аспект данного задания*
Учитель выводит на мультимедийную доску ту информацию, которая содержится на рисунке 4, и выдает учащимся заготовки для внесения туда ответов. На выполнение данного задания учащимся дается 2 минуты. После выполнения командой задания учитель просит сдать учащихся листы с ответами для их последующей проверки учителем.	Ученикам необходимо найти отношение площадей треугольников, представленных на рисунке 4, и написать обоснование своего ответа.	Максимально за данное задание можно получить 4 балла. За верно данный ответ, но допущенную ошибку в обосновании дается 2 балла. За верно данный ответ, но допущенный недочет в обосновании дается 3 балла.

Рисунок 4



Далее учитель подводит итоги и указывает на общее количество баллов, полученное командами, а также разбирает типовые ошибки, допущенные в заданиях. К тому же в конце данного этапа урока ученикам-консультантам предлагается оценить деятельность каждого учащегося в его команде следующим образом: добавить к общей сумме баллов команды от 3 до 0 баллов в зависимости от того, насколько хорошо работал данный учащийся в аспекте групповой деятельности, а также оценить свою деятельность, и сдать результаты оценки учителю.

Учитель может как выставить отметки учащимся по результатам данной деятельности, так и не выставить, а учитывать их, например, при выставлении отметок за самостоятельную или контрольную работу. В таблице 2 представлено соответствие задания и максимального количества баллов, которое может получить команда за каждое задание. В таблице 3 представлен вариант перевода полученных каждым конкретным учащимся баллов в пятибалльную систему оценивания.

Таблица 2

№ задания	**Максимальное количество баллов, которое команда может получить**
1.	7
2.	6
3.	4
4.	4
Максимальное количество баллов за все задания: 21 балл.	

Таблица 3

Количество баллов	**Отметка**
0-11	2
12-16	3
17-21	4
22-24	5

Если большинство команд получило меньше 12 баллов за командную деятельность, то учителю необходимо посвятить часть данного урока дополнительной актуализации знаний, решив номера из учебников, представленные в таблице 4, в зависимости от номера задания, с которым возникли затруднения.

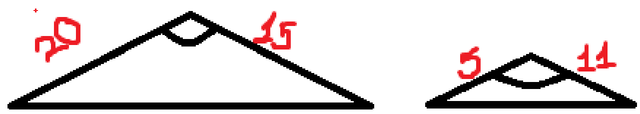
Таблица 4

С каким заданием на этапе актуализации знаний учащиеся справились плохо?	**Какие номера из рассмотренных учебников необходимо дополнительно решить вместе с учащимися?**
С заданием № 1.	№ 223 (Л. С. Атанасян).
С заданием № 2.	№ 542 (Л. С. Атанасян), № 424 (А. Мерзляк), № 423 (А. Мерзляк), № 451 (А. Мерзляк).
С заданием № 3.	№ 542 (Л. С. Атанасян), № 424 (А. Мерзляк), № 423 (А. Мерзляк), № 451 (А. Мерзляк).

Так как в ни в одном учебнике не были обнаружены задачи на актуализацию знаний по умению работать с теоремой о соотношении площадей треугольников с равными углами, то предоставим дополнительно несколько заданий на применение данной теоремы.

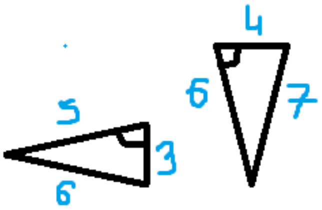
Задание № 1.

Найдите отношение площадей треугольников, представленных на данном рисунке.



Задание № 2.

Найдите отношение площадей треугольников, представленных на данном рисунке.



Приложение 1

Лист для выполнения первого задания

Номер карточки	**Ответ**

Лист для выполнения второго задания

Номера подобных треугольников	**Сходственные стороны данных треугольников**	**Коэффициент подобия (k = ???)**

Лист для выполнения третьего задания

Ответ (да/нет)	**Обоснование данного ответа**

Лист для выполнения четвертого задания

Ответ	**Обоснование данного ответа**
$\frac{S_{ABC}}{S_{DFE}} = —$	

Используемая литература

1. Е. М. Рабинович «Геометрия 7-9. Задачи на готовых чертежах»».

2. Атанасян Л. С. «Геометрия 7-9».

3. А. Мерзляк «Геометрия. 8 класс».