Занятие №1 (1 час)

Тема. Исторические сведения о конических сечениях.
Конические сечения как сечения прямого кругового конуса.

Основная цель: Ознакомить учащихся с историей конических сечений. Дать понятие о конических сечениях; изучить их виды.

План.
1. История конических сечений.
2. Определение конических сечений.
3. Виды конических сечений.

Методический комментарий.

Это занятие является вводным в данном курсе. Поэтому необходимо заинтересовать учащихся. Для этой цели можно использовать красочные плакаты с изображением конических сечений, макеты.

При изучении истории конических сечений, учитель может заранее предложить учащимся темы докладов. Темы могут быть следующими:

1. Конические сечения в древности.
2. "Конические сечения" Аполлония.

Доклады могут быть и о жизни ученых, занимавшихся вопросами конических сечений.

В конце каждого урока предусмотрено домашнее задание. Его можно проверить как в начале следующего урока, так и в конце всего факультатива. Домашнее задание имеет своей целью закрепить знания и навыки полученные на уроке. На этом уроке домашнее задание является творческим. После того как учащиеся его выполнят можно провести конкурс на лучший макет конуса.

Занятие расчитано на один час.

Содержание занятия.

Три замечательные кривые - эллипс, гипербола и парабола, объединенные общим названием "конические сечения", были известны еще в Древней Греции. Их открыл около 360 г. до н.э. Менехм, один из учеников знаменитого астронома, врача и математика Евдокса. Менехм пользовался параболой и равнобочной гиперболой для решения задачи удвоения куба (IV век до н.э.), но, к сожалению, его сочинения до нас не дошли. Примерно тогда же писал и Аристей "О пространственных местах", т.е. о конических сечениях, рассматриваемых как геометрические места. Его работа утеряна. Евклид написал "Начала конических сечений", которые до нас не дошли. Архимед доказывал ряд вспомогательных предложений, относящихся к кривым второго порядка. Всем этим ученым уже было известно основное свойство каждого из конических сечений, его *симптом*, т. е. условие, которому оно удовлетворяет, равносильное нашему уравнению кривой .

Однако, полное и систематическое учение об этих кривых было впервые изложено Аполлонием. Его труд "Конические сечения" состоял из восьми книг, из которых только первые четыре дошли до нас в оригинале, следующие три - в арабском переводе, последняя - утеряна.

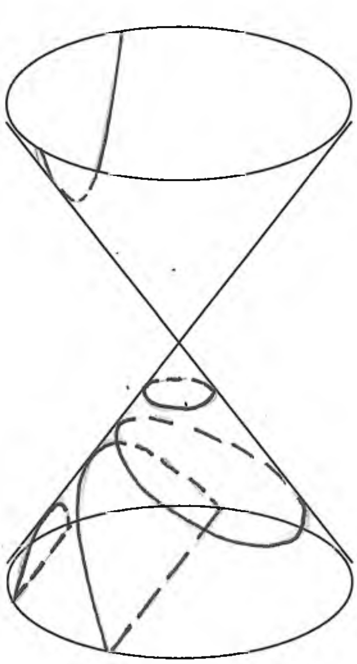


Рис.1

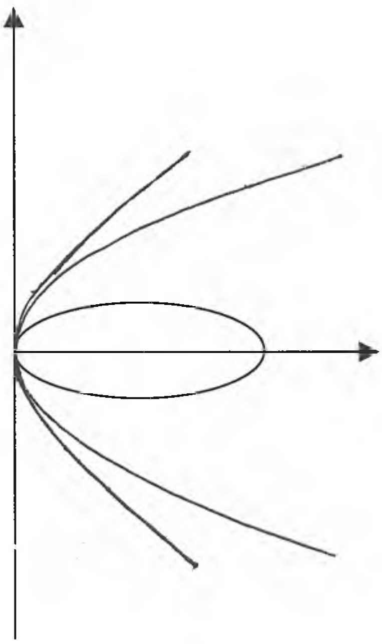


Рис.2

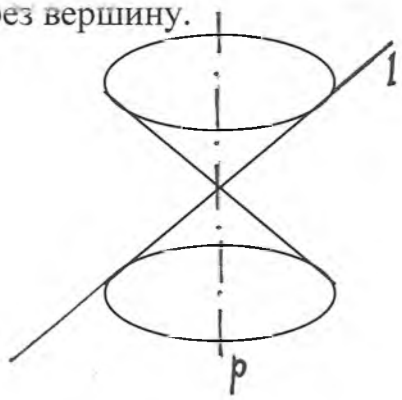
В первой же книге Аполлоний, в отличие от своих предшественников, рассматривает все три вида кривых второго порядка как плоские сечения одного и того же произвольно взятого прямого или наклонного кругового конуса, полости которого простираются по обе стороны от вершины. Он получает эллипс, гиперболу или параболу в зависимости от того, пересекает ли плоскость одну только полость конуса, обе его полости или она параллельна одной из образующих конуса (рис. 1). Аполлоний впервые вводит термины "эллипс", "парабола", "гипербола". Он, как и его предшественники, устанавливает уравнения кривых. Аполлоний, вероятно, сознательно не пользовался алгебраическими обозначениями, но многие из его выводов легко записать в виде уравнений, выражающих зависимость между координатами кривых. В современной записи получаем выражение:

$$y^2 = 2px \pm \frac{p}{a}x^2 \qquad (1),$$

где эллипсу соответствует знак "минус" перед вторым членом правой части этого уравнения, гиперболе - знак "плюс", а параболе - равенство этого члена нулю. Отсюда и названия самих кривых. Для параболы площадь квадрата, построенного на ординате y некоторой ее точки (рис. 2), в частности, *равна* площади прямоугольника D=2px, одна сторона которого равна соответствующей абсциссе x, а другая - постоянному отрезку 2p (удвоенному параметру параболы). Греческое слово parabole и означает "приложение", т.е. построение прямоугольника с данным основанием (2p), равновеликого данному прямоугольнику или квадрату (y^2). Из уравнения (1) видно, что эллипс является геометрическим местом точек, для которых площадь квадрата, построенного на ординате, *меньше* площади прямоугольника D. Греческое слово elleipsis означает "недостаток". Гипербола же представляется уравнением (1) как геометрическое место точек, для каждой из которых площадь y^2 *больше* площади D. Отсюда и греческий термин hyperbole, означающий "избыток", "преувеличение".

Определение конических сечений как сечений прямого кругового конуса.

<u>Коническим сечением</u> называется кривая, которая получается в результате пересечения круговой конической поверхности с плоскостью, не проходящей через вершину.



При этом, под конической поверхностью понимают поверхность, образованную вращением прямой l вокруг пересекающей ее (и не перпендикулярной к ней) прямой p; эта поверхность состоит из двух частей или пол, смыкающихся в точке пересечения прямых l и p - вершине конуса (рис. 3).

Рис 3

ТЕОРЕМА. Если плоскость пересекает все образующие конуса (только одну его полу), то линия пересечения- эллипс.

Если плоскость параллельна одной образующей (пересекает одну полу), то линия пересечения - парабола.

Если плоскость параллельна двум образующим (пересекает обе полы), то линия пересечения - гипербола.

Окружность так же является частным случаем конического сечения, поскольку ее можно получить при пересечении конуса с плоскостью, перпендикулярной к его оси.

Если плоскость сечения проходит через вершину конической поверхности или параллельно образующей конической поверхности, то говорят, что коническое сечение ***вырождается*** или ***распадается.***

К числу вырожденных конических сечений относятся: пара пересекающихся прямых - образующих конуса; единственная прямая - образующая конуса; "линия", состоящая из единственной точки или даже вовсе не содержащая точек (например - шар).

Это определение конических сечений довольно громоздко и неудобно тем, что имеет стереометрический характер, в то время как сами конические сечения являются плоскими кривыми и могут изучаться в рамках планиметрии.

Далее покажем, что конические сечения можно определять не прибегая к представлениям, связанным с геометрией в пространстве.

Вопросы для закрепления.

1. Какие ученые работали над вопросом о конических сечениях?
2. В чем заслуга Аполлония в изучении конических сечений?
3. Как в древности определялись конические сечения?
4. Что мы называем коническим сечением в наше время?
5. Что называется вырожденным коническим сечением? Приведите примеры.

Домашнее задание.

1. На альбомном листе попробуйте начертить вырожденные конические сечения следующих видов:
   а) пара пересекающихся прямых - образующих конуса;
   б) образующая конуса (единственная прямая);
   в) точка;
   г) "сечение", не содержащее точек;

   изобразите плоскость сечения во всех случаях.
2. Изготовьте макет конуса в сечении которого плоскостью получается эллипс.

Занятие № 2 (2 часа)

Тема. Определение эллипса. Его элементы.Уравнение эллипса.

Основная цель: Ознакомить учащихся с понятием эллипса; изучить его элементы и их свойства; сформировать умение применять полученные факты в решении задач.

План.

1. Определение эллипса.
2. Уравнение эллипса.
3. Элементы эллипса: оси, вершины, эксцентриситет, фокальные радиусы-векторы, директрисы.
4. Решение задач.

Содержание занятия.

Определение 1:

Эллипсом называется фигура, полученная в результате растяжения-сжатия окружности (или круга).

Определение 2:

Эллипсом называется геометрическое место точек, для каждой из которых сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых *фокусами*, есть данное число 2а, большее, чем расстояние 2с между фокусами.

Уравнение эллипса.

Дано: F_1F_2 - фокусы ; точка М - произвольная.

$|MF_1|+|MF_2|=2a$ (1).

Найти: уравнение эллипса.

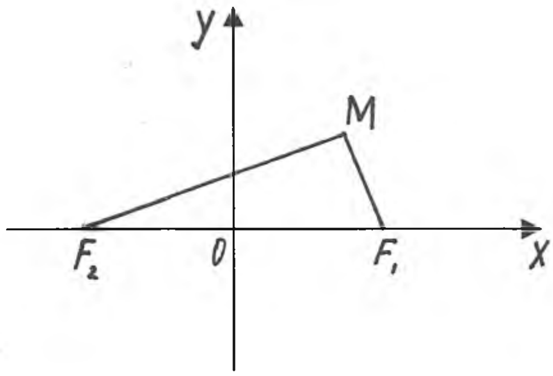


Рис. 4

Решение:

Выбираем прямоугольную систему координат. (Рис. 4)

1) Ось Ох совпадает с прямой F_2F_1 ;

2) $OF_1=OF_2$, O - начало координат;

3) Оу $\perp$ Ох ;

$F_2F_1=2c$;

$F_2(-c;0)$, $F_1(c;0)$. Обозначая координаты точки М эллипса через х и у, будем иметь $|MF_2|=\sqrt{(-c-x)^2+y^2}$; $|MF_1|=\sqrt{(c-x)^2+y^2}$;

$\sqrt{(-c-x)^2+y^2}+\sqrt{(c-x)^2+y^2}=2a$

или $\sqrt{(-c-x)^2+y^2}=2a-\sqrt{(c-x)^2+y^2}$;   (2)

Возводя обе части уравнения (2) в квадрат, получим

$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2+x^2-2cx+c^2+y^2-4a\sqrt{(c-x)^2+y^2}$,

или $a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}=a^2-cx$.

Возводя обе части этого уравнения в квадрат, получим

$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2$,

или $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$.

Так как по условию a > c, то $a^2-c^2>0$. Обозначая a^2-c^2 через b^2

$$a^2-c^2=b^2,$$

получим

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Это каноническое уравнение эллипса.

X - это главная ось эллипса. (рис. 5)

Расстояние между фокусами F_2F_1=2c называется ***фокусным расстоянием.***

A_2A_1 - ***большая*** (фокальная) ***ось*** эллипса.

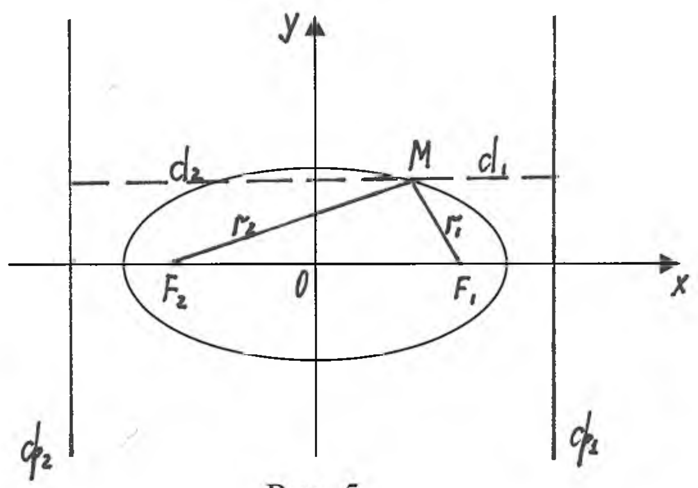


Рис. 5

Главная ось эллипса является его осью симметрии; она содержит две точки эллипса, которые служат концами его большой оси и называются ***вершинами эллипса***.

A_1,A_2,B_1,B_2 - вершины эллипса.

A_1(a;0), A_2(-a;0),

B_1(b;0), B_2(-b;0).

О - середина большой оси, это ***центр*** эллипса.

Центр эллипса является его центром симметрии.

$[A_2A_1]=2a$; $[B_2B_1]=2b$;
B_1 и B_2 симметричны относительно оси Ox.
B_2B_1 - ***малая*** ось эллипса.

Таким образом, прямая, проходящая через центр эллипса перпендикулярно к его большой оси, является второй осью симметрии эллипса. На этой оси расположены две точки эллипса, называемые вершинами эллипса и являющиеся концами его малой оси. Расстояние между каждой из этих вершин до фокуса равно большой полуоси эллипса.

Эксцентриситетом (e) эллипса называется отношение расстояния (2c) между фокусами к большой оси (2a), т.е.

$$e = \frac{c}{a}$$

очевидно, что $e < 1$.

Расстояния любой точки M(x;y) эллипса до фокусов называются ее **фокальными радиусами-векторами** r_1 и r_2; мы имеем:

$$r_1 = a - ex, \quad r_2 = a + ex,$$

и по самому определению эллипса: $r_1 + r_2 = 2a$,
т.е. сумма фокальных радиусов-векторов любой точки эллипса равна его большой оси.

Директрисами эллипса называются две прямые, параллельные малой оси и отстоящие от нее на расстоянии, равном $\frac{a}{e}$ (прямые EG и CD).

Уравнения директрис следующее:

$$x = \frac{a}{e} \quad \text{и} \quad x = -\frac{a}{e}.$$

Отношение расстояния любой точки эллипса до фокуса (r_1 или r_2) к расстоянию той же точки до соответствующей директрисы (d_1 или d_2) равно эксцентриситету :

$$\frac{r_1}{d_1} = e \quad \text{и} \quad \frac{r_2}{d_2} = e;$$

Т.о., эллипс может быть определен как геометрическое место точек, отношение расстояний которых от данной точки и данной прямой есть величина постоянная, меньшая единицы.

ЗАДАЧА № 1 Составить простейшее уравнение эллипса, зная, что:

1) полуоси его соответственно равны 4 и 2;
2) расстояние между фокусами равно 6, а большая полуось равна 5;
3) большая полуось равна 10 и эксцентриситет $e = 0,8$;
4) малая полуось равна 3 и эксцентриситет $e = \sqrt{2}/2$.

Решение.

1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 2) 2c=6, a=5, b=$\sqrt{5^2-3^2}=4$; $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

3) a=10, e=0,8; c=e*a=8; b=$\sqrt{100-64}=6$; $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$

4) b=3, e=$\frac{\sqrt{2}}{2}$; 9=a^2-c^2; e=$\frac{c^2}{a^2}=0{,}5$; $\frac{c^2}{9+c^2}=\frac{1}{2}$; c=2; a=9+9=18

$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$

ЗАДАЧА № 2 Дано уравнение эллипса: $25x^2+169y^2=4225$. Вычислить длину осей, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса.
Решение.

$\frac{25x^2}{4225}+\frac{169y^2}{4225}=1$; $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$

a=13; 2a=26; b=5; 2b=10; $c^2=a^2-b^2=169-25=144$; c=12; e=$\frac{c}{a}=\frac{12}{13}$;

F_2(-12;0), F_1(12;0)

ЗАДАЧА № 3 Дан эллипс $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$. Написать уравнение его директрис.

Решение.

a=6, b=$\sqrt{20}$; $c^2=a^2-b^2$=36-20=16; c=4;

$x=\frac{a}{e}=6:\frac{2}{3}=9$ или x=-9 уравнение директрис.

ЗАДАЧА №4 На эллипсе $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$ найти точку, отстоящую на расстоянии пяти единиц от его малой оси.

Решение.

$x = \pm 5$; $\frac{25}{30} + \frac{y^2}{24} = 1 \rightarrow$ $y^2=4$, $y=\pm 2$ Ответ: $(\pm 5; \pm 2)$

Вопросы для закрепления.

1. Что называется эллипсом?
2. Как выглядит уравнение эллипса?
3. Что называется эксцентриситетом и директрисами эллипса?
4. Какие координаты имеют вершины эллипса?
5. Что называется фокальным радиусом-вектором эллипса?

Домашнее задание.

1. Составить уравнение эллипса, зная, что сумма полуосей равна 8 и расстояние между фокусами тоже равно 8.
2. Прямые $x = \pm 8$ служат директрисами эллипса, малая ось которого равна 8. Найти уравнение этого эллипса.
3. Определить эксцентриситет эллипса, зная, что расстояние между фокусами равно расстоянию между вершинами малой и большой осей.
4. Эллипс проходит через точки $M(\sqrt{3}; -2)$ и $N(-2\sqrt{3}; 1)$. Составить уравнение эллипса, приняв его оси за оси координат.

Занятие № 3 (1 час)

Тема. Способы построения эллипса.

Основная цель: Ознакомить учащихся с различными способами построения эллипса; закрепить навык построения этой фигуры; развить пространственное воображение учащихся.

План.

1. Вычерчивание эллипса с помощью окружностей.
2. Вычерчивание эллипса при помощи нити.

Содержание занятия.

Способы построения эллипса.

1. Вычерчивание эллипса с помощью окружностей.

Если заданы оси эллипса, то проще всего начертить эллипс от руки, построив сначала фундаментальный прямоугольник, а затем вписав в него овальную кривую. Но это метод не точен, существует много овальных кривых с одними и теми же осями симметрии, но только одна из них является эллипсом.

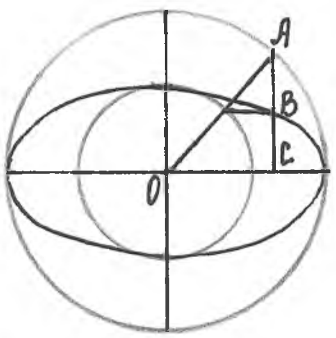


Рис 6

Можно точно построить сколько угодно точек эллипса. Наиболее употребительный и простой способ такого построения изображен на рис.6. На нем две концентрические окружности имеют радиусы a и b. **Построение**: На большой окружности берем любую точку A; проводим радиус OA, затем строим перпендикуляр AC к диаметру большой окружности. Из точки пересечения малой окружности с OA восстанавливаем перпендикуляр на AC, получаем точку B. Это точка эллипса.

Сделав такое построение для нескольких точек A_1, A_2, ... окружности, можно получить соответствующие точки эллипса. Остается соединить их плавной линией от руки или с помощью лекала.

2. Вычерчивание эллипса при помощи нити.

Положим лист бумаги на чертежную доску и прикрепим его. Приколем к листу две кнопки

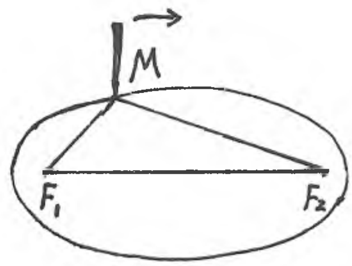


Рис. 7

(или булавки) (рис.7). Набросив на них нитяное кольцо (длина кольца должна быть больше удвоенного расстояния между кнопками), натянем нить острием карандаша, чтобы получился треугольник F_1MF_2 . Если вести карандаш по бумаге так, чтобы нить оставалась натянутой, то треугольник будет деформироваться, но его периметр останется постоянным .

Постоянной будет и длина стороны F_1F_2; значит $F_1M + F_2M = const$, и карандаш опишет эллипс.

3. Построение эллипса при помощи прямоугольника.

Для построения эллипса можно воспользоваться приемом вписывания эллипса в прямоугольник с примерным соотношением сторон 1:2,5 .Для этого нужно:

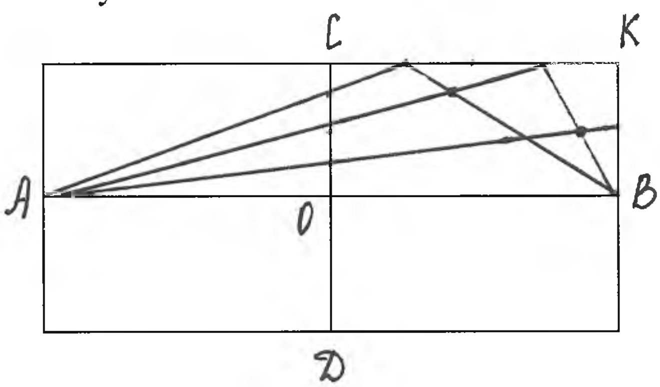


Рис. 8

1) начертить прямоугольник с указанным соотношением сторон;
2) соединить середины противолежащих сторон прямоугольника, получим прямые AB и CD (это оси эллипса).
3) отрезки CO и CK разделить на четыре равные части; в результате получим точки, которые, как показано на рис.8 нужно соединить с вершинами эллипса A и B;

4)при пересечении соответствующих прямых получаются точки эллипса.

Вопросы для закрепления.

1. Расскажите о построении эллипса с помощью окружностей.
2. На каком определении основано построение эллипса при помощи нити.

Домашнее задание.

Изготовить наглядное пособие для построения эллипса.

Занятие № 4 (2 часа)

Тема Определение гиперболы. Ее форма. Уравнение гиперболы.

Основная цель: Сформировать представление о гиперболе и ее элементах; рассмотреть определения и формулы, имеющие важное значение для характеристики гиперболы; сформулировать умение применять полученные факты в решении задач.

План.

1. Определение гиперболы.
2. Уравнение гиперболы.
3. Элементы гиперболы: оси, вершины, эксцентриситет, фокальные радиусы- векторы, директрисы.
4. Равносторонняя гипербола.
5. Решение задач.

Методический комментарий.

При изучении гиперболы (почти на всех этапах), можно проводить аналогию с эллипсом. Так, например, уравнения эллипса и гиперболы отличаются только знаком, а уравнения эксцентриситетов и директрис совпадают.

Пользуясь уравнением гиперболы, можно показать, что каждая гипербола имеет единственный центр симметрии и только две (взаимно перпендикулярные) оси симметрии. По аналогии с эллипсом, учащимся рекомендуется рассказать как получается график гиперболы.

Хорошо пользоваться большим изображением рис.10. Этот чертеж используется и при решении задач.

Задачи в этой теме на составление уравнения гиперболы, но в каждой из них к этому уравнению приходят различными путями, используя весь изученный материал.

Занятие расчитанно на 2 часа.

Содержание занятия.

Гиперболой - называется геометрическое место точек, для каждой из которых абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых *фокусами*, есть данное положительное число 2а,меньшее, чем расстояние 2с между фокусами.

Уравнение гиперболы.

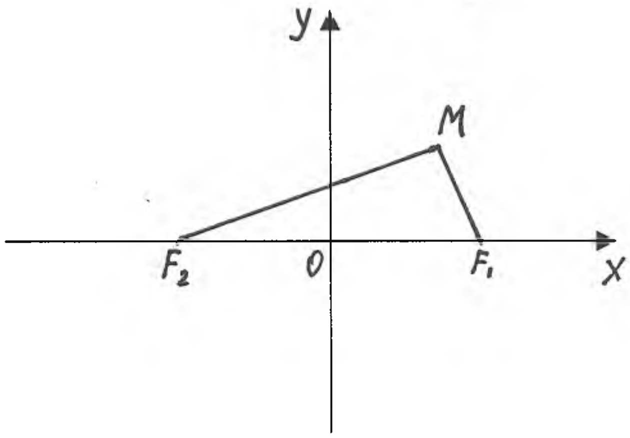


Рис. 9

Дано: F_2, F_1-фокусы;
точка M -произвольная;
$|F_2M - F_1M| = 2a$ (1);
Найти: уравнение гиперболы.
Решение:
Выбираем прямоугольную систему координат.(Рис.9)
1) Ось Ox совпадает с прямой F_2F_1 ;
2) $OF_1 = OF_2$, O - начало координат;
3) Oy $\perp$ Ox ;

F_2F_1=2c;
F_2(-c;0), F_1(c;0). Обозначая координаты точки M гиперболы через x и y, будем иметь $MF_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$; $MF_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$;
и соотношение (1) принимает вид

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a$$

Преобразуя это уравнение так же, как и для эллипса

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$ и т. д.,

получим уравнение

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right).$$

Однако теперь a < c. Обозначая a^2-c^2 через $-b^2$: $a^2-c^2=-b^2$,
или
$$c^2=a^2+b^2, \qquad (2)$$

получим

$$-b^2x^2+a^2y^2=-a^2b^2,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (3).$$

Это каноническое уравнение гинерболы.

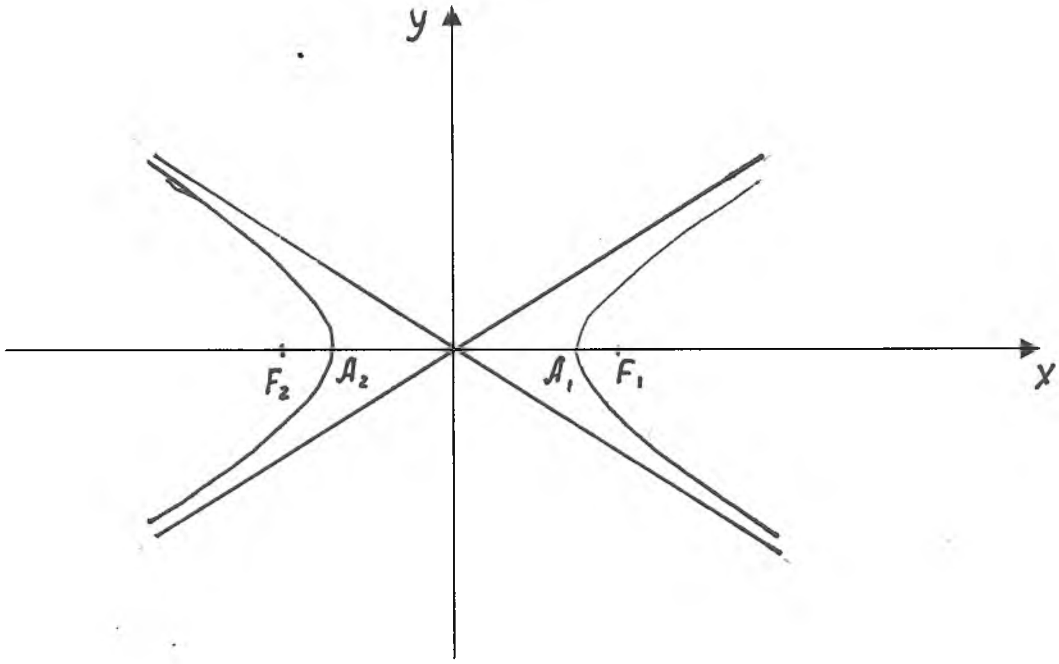


Рис. 10

Прямая, соединяющая фокусы гиперболы, служит осью абсцисс, и начало координат выбрано в середине между фокусами; при этом оси координат совпадают с осями симметрии гиперболы и начало координат - с ее центром симметрии (***оси*** и ***центр*** гиперболы).(рис. 10)

Гипербола имеет две действительные ***вершины*** (A_1 и A_2) на фокальной оси; отрезок, заключенный между ними, $A_2A_1 = 2a$, называется ***действительной (вещественной) осью*** гиперболы. Со второй осью гипербола пересекается в двух мнимых точках (0; $\pm ib$); но, условно, действительный отрезок 2b называется ***мнимой осью*** гиперболы. Таким образом, параметры a и b, входящие в уравнение гиперболы, дают длину действительной и мнимой полуосей гиперболы. Для гиперболы возможны все три случая: a>b, a=b, a<b.

Если a=b, гипербола называется ***равносторонней.***

Если мнимая ось гиперболы имеет длину 2a и направлена по оси x, а действительная ость, длиной 2b, совпадает с осью y, то уравнение такой гиперболы будет $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (3').

Гиперболы (3) и (3') называются ***сопряженными гиперболами.***

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами к действительной оси: $e=\frac{c}{a}$, при этом e>1.

Гипербола (3) состоит из двух ветвей (правой и левой), простирающихся в бесконечность.

Для точек правой ветви ***фокальные радиусы-векторы*** вычисляются по формулам: $r_1 = ex - a$;

$r_2 = ex + a$;

$r_2 - r_1 = 2a$.

Для точек левой ветви имеем: $r_1 = -ex + a$;

$r_2 = -ex - a$;

$r_1 - r_2 = 2a$.

Таким образом, разность фокальных радиусов-векторов любой точки гиперболы равна действительной оси.

Директрисами гиперболы называются прямые, перпендикулярные к фокальной оси и отстоящие от центра на расстоянии $\frac{a}{e}$.

Их уравнения $x = \frac{a}{e}$; $x = -\frac{a}{e}$.

Отношение расстояния любой точки гиперболы от фокуса к расстоянию той же точки от соответствующей директрисы равно эксцентриситету гиперболы:

$$\frac{r_1}{d_1} = e; \quad \frac{r_2}{d_2} = e.$$

Таким образом, геометрическое место точек, отношение расстояний которых от данной точки и данной прямой постоянно, есть гипербола, если только это постоянное отношение больше единицы.

ЗАДАЧА №1 Составить уравнение гиперболы, оси которой совпадают с осями координат, зная, что:

1) расстояние между вершинами равно 8, а расстояние между фокусами 10;

2) вещественная полуось равна 5 и вершины делят расстояния между центром и фокусами пополам;

3) вещественная ось равна 6 и гипербола проходит через точку (9;-4).

Решение.

1) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; 2a=8, a=4; 2c=10, c=5.

$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9$, b=3. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

2) a=5, c=2a=10, $b^2 = 100 - 25 = 75$, $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{75} = 1$

3) 2a=6, a=3, M(9;-4)

Подставим координаты точки М в уравнение гиперболы:

$\frac{9^2}{3^2}-\frac{4^2}{b^2}=1$; $b^2=2$, $b=\sqrt{2}$. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{2}=1$

ЗАДАЧА № 2 Найти длины полуосей и координаты фокусов следующих гипербол:

а) $25x^2-16y^2-1=0$

б) $x^2-y^2-5=0$

Решение.

а) $\frac{x^2}{\frac{1}{25}}-\frac{y^2}{\frac{1}{16}}=1$, a=1/5, b=1/4, $c^2=b^2+a^2=41/400$, c=$\pm\frac{\sqrt{41}}{20}$;

$F_1(\frac{\sqrt{41}}{20};0)$, $F_2(-\frac{\sqrt{41}}{20};0)$

b) $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{5}=1$; $a=b=\sqrt{5}$; $c^2=a^2+b^2=10$; $c=\pm\sqrt{10}$.

$F_1(\sqrt{10};0)$, $F_2(-\sqrt{10};0)$

ЗАДАЧА № 3 Составить каноническое уравнение гиперболы, если расстояние между директрисами равно 8/3 и эксцентриситет e=3/2.

Решение.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; e=3/2; l=8/3; x=a/e уравнение директрисы,

l=2x=2a/e=8/3, a=2,

c=ae=$\frac{3}{2}2=3$; $b^2=c^2-a^2=9-4=5$;

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

ЗАДАЧА № 4 Составить уравнение гиперболы, имеющей общие фокусы с эллипсом $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ при условии, что ее эксцентриситет e=1,25.

Решение.

$a^2=49$, $b^2=24$, $c^2=a^2-b^2=25$, c=5, $c_{ýë}=c_{ãèï}=5$, a=c/e=5/1.25=4, $b^2=c^2-a^2=9$, $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{6}=1$

ЗАДАЧА № 5 Для равнобочной гиперболы $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1$ написать уравнение софокусной с ней гиперболы, проходящей через т. М (4; $\sqrt{2}$).
Решение.
$a^2=b^2=9$, $c^2=a^2+b^2=18$, Подстдвим координаты точки М в уравнение гиперболы:

$$\begin{cases}\frac{16}{a^2}+\frac{2}{b^2}=1\\ a^2+b\ \ =18\end{cases};\quad \begin{cases}b^2=6\\ a^2=12\end{cases};\quad \frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{6}=1.$$

Вопросы для закрепления.

1. Что называется гиперболой?
2. Как выглядит уравнение гиперболы?
3. Что представляет собой мнимая ось гиперболы?
4. Какая гипербола называется равносторонней?
5. В чем сходство и разница эксцентриситетов и директрис эллипса и гиперболы?
6. Как выглядят формулы фокальных радиусов-векторов гиперболы?

Домашнее задание.

1. Составить уравнение гиперболы, оси которой совпадают с осями координат, зная, что: гипербола проходит через две точки P(-5;2), Q($2\sqrt{5}$; $\sqrt{2}$).
2. Найти площадь прямоугольника, вершины которого лежат на гиперболе $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{10}=1$, а две стороны проходят через фокусы, параллельно оси Оу.
3. Написать уравнение гиперболы, проходящей через фокусы эллипса $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$ и имеющей фокусы в вершинах этого эллипса.
4. Составить уравнение гиперболы, зная фокусы $F_1(10;0)$, $F_2(-10;0)$ и одну из точек гиперболы М(12; $3\sqrt{5}$).
5. На гиперболе $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$ взята точка, абсцисса которой равна 10 и ордината положительна. Вычислить фокальные радиусы- векторы этой точки.

Занятие № 5 (2 часа)

Тема Асимптоты гиперболы. Построение гиперболы.

Основная цель: Ознакомить учащихся с понятием асимптоты гиперболы; отработать умение вычерчивать гиперболу при помощи нити; развить пространственное воображение учащихся; сформировать умение применять полученные факты в решении задач.

План.

1. Асимптоты гиперболы.

2.Вычерчивание гиперболы при помощи нити.

3.Решение задач.

Методический комментарий.

На этом занятии об асимптотах гиперболы можно рассказывать по разному. Если учащиеся знакомы с понятием предела, то при изучении асимптот им желательно воспользоваться. Если учащиеся не имеют представления о пределе, то об асимптотах можно рассказать так как это дано ниже.

Задачи в этом пункте на составление уравнений асимптот и гиперболы.

Занятие расчитанно на 2 часа.

Содержание занятия.

Асимптота представляет собой прямую y=kx, где k-угловой коэффициент. **Асимптоты** гиперболы проходят через ее центр и выражаются равенствами:

$$y=\frac{b}{a}x; \qquad y=-\frac{b}{a}x.$$

Здесь угловой коэффициент $|k|=\frac{b}{a}$.

Если $|k|<\frac{b}{a}$, то прямая y=kx будет пересекать гиперболу в двух точках, симметричных относительно центра гиперболы. Если $|k|\geq\frac{b}{a}$, то прямая y=kx не имеет общих точек с гиперболой. Если точка, двигаясь по гиперболе, неограниченно удаляется, то расстояние ее от одной из асимптот стремится к нулю. Асимптоты служат диагоналями прямоугольника, центр которого совпадает с центром гиперболы, а стороны равны и параллельны осям гиперболы (рис. 11). Вершины этого прямоугольника имеют координаты P(a;b), Q(a;-b), R(-a;b), S(-a;-b).

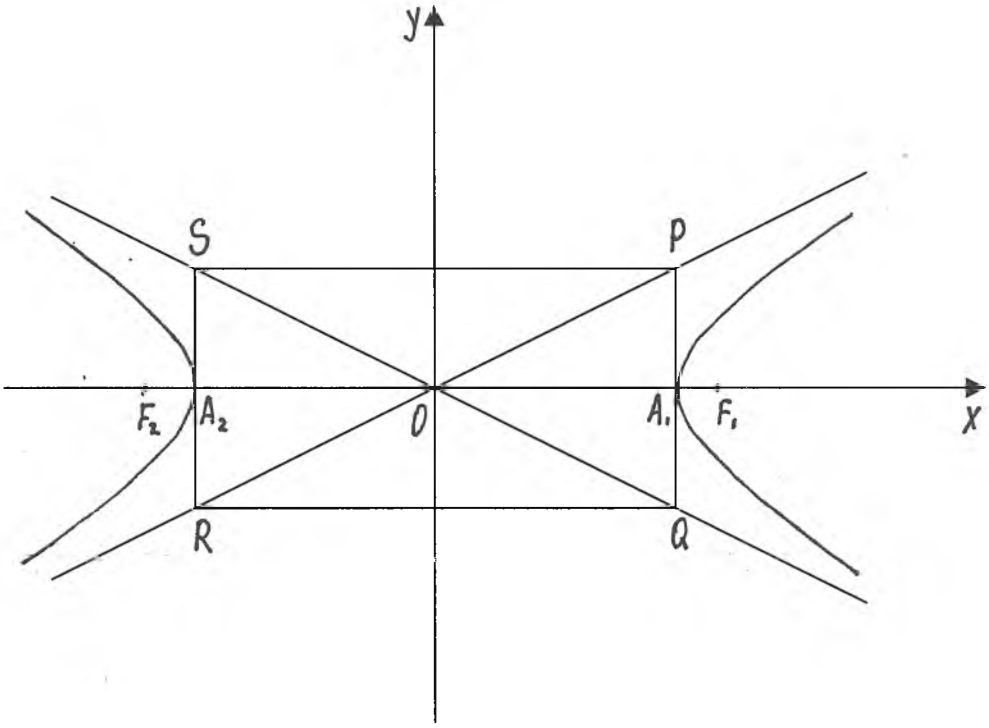


Рис. 11

Прямая линия имеет с гиперболой две общие точки (действительные, мнимые или сливающиеся). Если прямая параллельна одной из асимптот, то она имеет только одну точку пересечения с гиперболой; если же прямая совпадает с одной из асимптот, то она совсем не имеет общих точек с гиперболой.

Вычерчивание гиперболы при помощи нити.

Одним из способов построения гиперболы является вычерчивание ее непрерывным движением.

На фокальном свойстве основано вычерчивание гиперболы при помощи двух нитей, аналогично вычерчиванию эллипса.(рис.12)

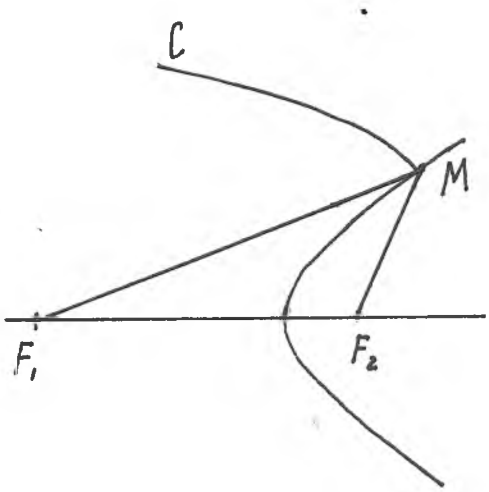


Рис. 12

Положим лист бумаги на чертежную доску и наколем на него две канцелярские кнопки F_1 и F_2. Возьмем две нити, разность длин которых (2а), меньше расстояния между кнопками (2с). Конец каждой нити привяжем к кнопкам, а оставшиеся концы свяжем узлом (точка С).

Держа теперь узел в левой руке, зацепим обе нити карандашом М и будем двигать карандаш по бумаге так, чтобы обе нити F_1MC и F_2MC были все время в натянутом положении.

Тогда острие карандаша М все время находится на одной ветви гиперболы с фокусами F_1 и F_2 и длиной оси $2a = F_1M - F_2M$ (при $CMF_1 > CMF_2$),
т.к. $F_1M - F_2M = (F_1M + MC) - (F_2M + MC) = 2a$.

Для вычерчивания второй ветви следует поменять местами кнопки с привязанными к ним нитями. Дуги гиперболы будут тем длиннее, чем длиннее нити.

ЗАДАЧА № 1 Определить уравнения асимптот следующих гипербол:
а) $4x^2 - 9y^2 = 36$
б) $16x^2 - 9y^2 = 144$
Решение.
а) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$; a=3, b=2, $y = \pm\frac{2}{3}x$;
b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; a=3, b=4, $y = \pm\frac{4}{3}x$.

ЗАДАЧА № 2 Составить уравнение гиперболы, если угол между асимптотами 60° и гипербола проходит через т. $M(4\sqrt{3};2)$.
Решение.

$a = 60°/2 = 30°$, tg $\acute{\alpha}$=b/a, b=a*tg30°=$\frac{a\sqrt{3}}{3}$, $b^2 = a^2/3$;

$\frac{48}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1$; $\frac{48}{a^2} - \frac{4*3}{a^2} = 1$; $a^2=36$, $b^2=12$,

$$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{12}=1$$

ЗАДАЧА № 3 Написать уравнение прямой, которая касается гиперболы $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ в точке М (5;-4).

Решение.

$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$; $\frac{5x}{5}-\frac{4y}{4}=1$; x+y=1.

ЗАДАЧА № 4 Вычислить полуоси гиперболы, зная, что асимптоты заданы уравнениями $y=\pm 2x$ и фокусы находятся на расстоянии 5 единиц от центра.

Решение.

$C=5$, $y=\pm 2x$, $y=\pm\frac{b}{a}x$, $\frac{b}{a}=2$, $b=2a$,

$c^2=b^2+a^2=(2a)^2+a^2=5a^2$, $25=5a^2$, $a=\sqrt{5}$, $b=2\sqrt{5}$.

ЗАДАЧА № 5 Составить уравнение гиперболы, асимптотами которой являются прямые $y=\pm 2x$ и которая проходит через точку A(1;3).

Решение.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; $\frac{1}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1$; $y=\pm 2x$, $b/a=2$, $b^2/a^2=4$,

$$\begin{cases}\frac{1}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1\\ \frac{b^2}{a^2}=4\end{cases}\Rightarrow$$ $a^2=-5/4<0$, $b^2=-5<0$ - это невозможно.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ - если действительная ось совпадает с осью Oy.

$$\begin{cases}\frac{1}{a^2}-\frac{9}{b^2}=-1\\ \frac{b^2}{a^2}=4\end{cases}\Rightarrow$$ $a^2=5/4$, $b^2=5$, $\frac{x^2}{5/4}-\frac{y^2}{5}=1$ - искомое уравнение.

Вопросы для закрепления.

1. Какими равенствами определяются асимптоты гиперболы?
2. Как можно начертить гиперболу?

Домашнее задание.

1. Дана гипербола $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Написать уравнения асимптот и директрис.
2. Написать уравнение гиперболы, если асимптоты заданы уравнениями $y = \pm\, 5/3x$ и гипербола проходит через т. N (6;9).
3. Определить угол между асиптотами гиперболы у которой:
   а) эксцентриситет $e = 2$;
   б) расстояние между фокусами вдвое больше расстояния между директрисами.
4. Провести касательные к гиперболе $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{9} = 1$ через каждую из следующих точек (2;0), (-4;3), (5;-1).

Занятие № 6 (2 часа)

Семинар : Парабола. Ее элементы. Способы построения.

Основная цель: Углубление интереса к математике; расширение знаний по практике ее применения и истории развития; формирование навыков логического построения рассуждений и выступлений. Воспитание культуры речи, потребности в аргументации своей точки зрения. Развитие навыков работы с математической литературой.

План.

1. Вводное слово учителя.
2. Доклады учащихся.
3.Подведение итогов.

Методический комментарий.

Подготовка к проведению уроков такого вида должна осуществляться тщательно и заблаговременно. Прежде всего, объявляется тема, определяются докладчики. Им предлагаются возможные сообщения, необходимый список литературы. Кроме того, учащиеся знакомятся с требованиями к докладу и основными этапами работы над ним.

Тематика докладов:

1. Определение параболы. Ее уравнение.
2. Элементы параболы: вершина; ось симметрии; директриса, эксцентриситет; фокальный радиус-вектор. Касательная к параболе.
3. Построение параболы по точкам.
4. Построение параболы с помощью окружностей.
5. Построение параболы с помощью параболографа.

Литература.

1. Атанасян Л.С. Геометрия.,ч.1.-М.: Просвещение, 1973.
2. Бронштейн И.Н. Парабола.// Квант.-1975.-№4.
3. Бронштейн И.Н. Общие свойства конических сечений.// Квант.-1975.-№5.
4. Энциклопедия юного математика /Составитель А.П.Савин.- М.:Педагогика,1985.

Занятие № 7 (2 часа)

Тема. Парабола. Решение задач.

Основная цель: Сформировать умение применять полученные знания при решении задач.

План.

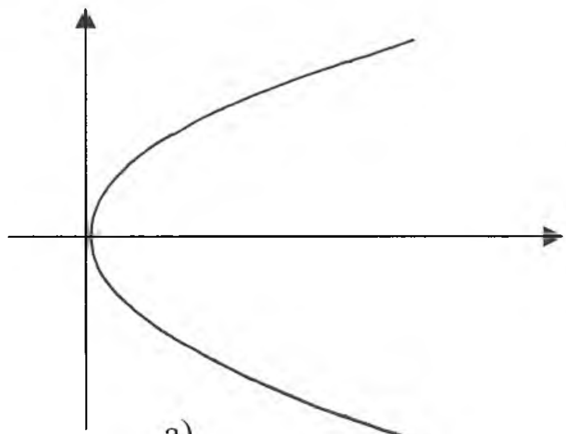
1. Повторение.

2. Решение задач.

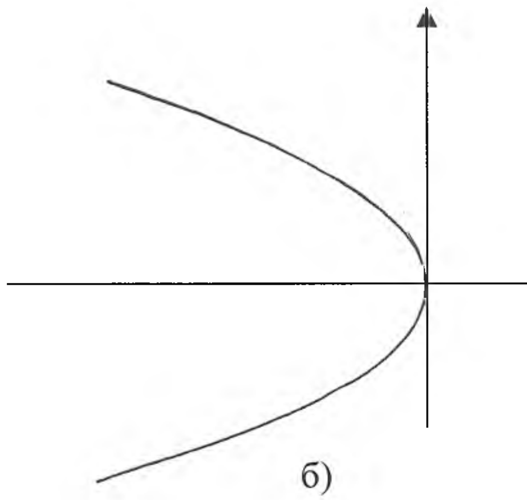
3. Тест.

***Методический комментарий*.**

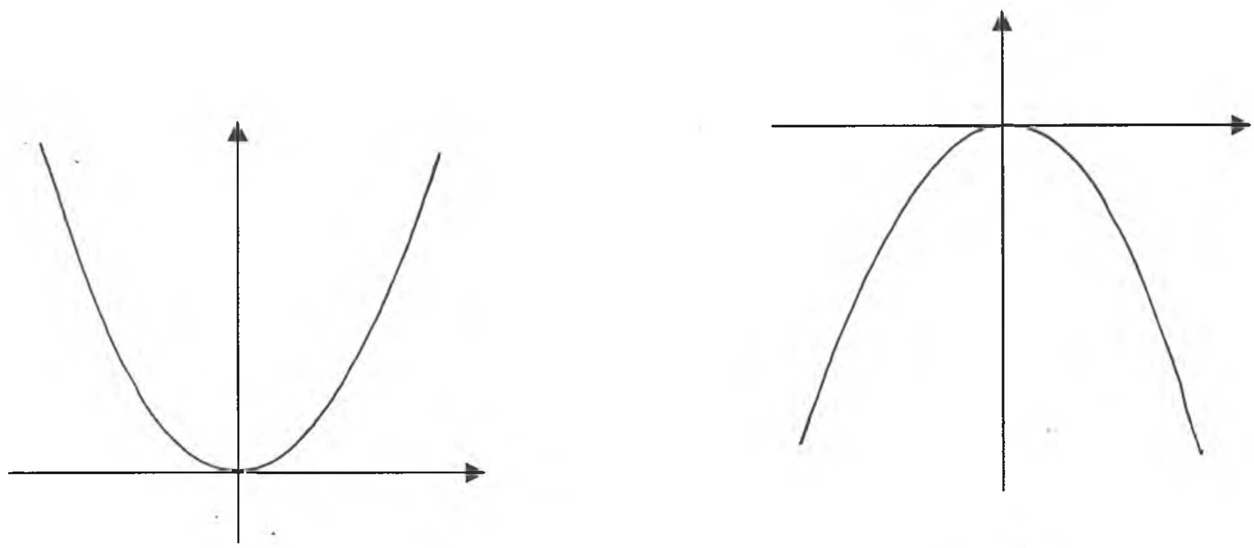
Этот урок целиком посвящен решению задач на тему "Парабола". Необходимо заметить, что парабола имеет только одну ось симметрии. И в зависимости от расположения параболы в системе координат, меняется ее уравнение . Четыре случая расположения параболы выглядят следующим образом:



а)



б)



в) г)

Рис. 13

Уравнению y^2=2px соответствует рис.13,а . Уравнение y^2= -2px, где p>0, сводится к уравнению y^2=2px заменой x на -x, т. е. путем преобразования системы координат, которое соответствует изменению положительного направления оси Ox на противоположное. Отсюда следует, что парабола y^2=-2px симметрична с параболой y^2=2px относительно оси Oy (рис.13,б). Аналогичными рассуждениями можно установить, что каждое из уравнений $x^2 = 2py$,

$$x^2 = -2py,$$

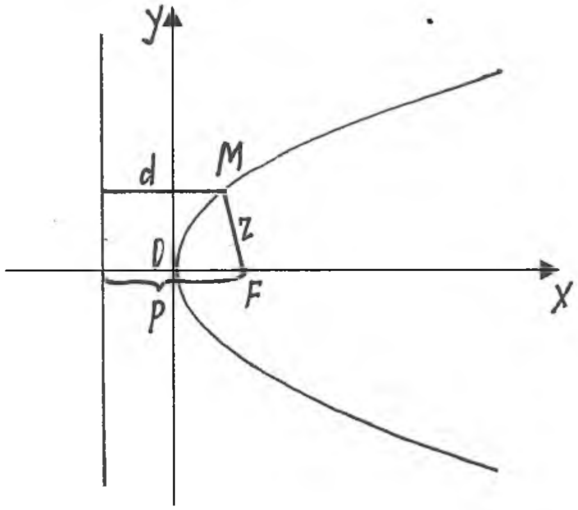
где p>0, определяет параболу с вершиной в начале координат и осью симметрии Oy (рис. 13,в,г).

Занятие расчитанно на 2 часа.

ЗАДАЧА № 1 Составить уравнение параболы, зная, что : 1)расстояние фокуса от вершины равно 3; 2)фокус имеет координаты (5;0), а ось ординат служит директрисой; 3)парабола симметрична относительно оси x ,проходит через начало координат и через точку M(1;-4). Решение.

1) y^2=2px, p/2=3, p=6, y^2=12x.

2) p=x=5, y^2=2*5x, y^2=10x..



3) M(1;-4)

x=1, y=-4,

16=2p, p=8,

$y^2=2*8x=16x$

$y^2=16x$.

Рис. 14

ЗАДАЧА № 2 Определить координаты фокуса F и составить уравнение директрисы для каждой из следующих парабол: a) $y^2=6x$; b) $x^2=-4y$; c) $3y^2+16x=0$.

Решение.

a) $y^2=2px$, $y^2=6x$, p=3, F(3/2;0)

x=-p/2, x=-3/2 или x+3/2=0

b) $x^2=-4y$, p=-2, F(0;-1), y=1 или y-1=0.

c) $3y^2+16x=0$, $y^2=-\frac{16}{3}x$, p=-8/3, F(-4/3;0), x=4/3, x-4/3=0.

ЗАДАЧА № 3 На параболе $y^2=8x$ найти точку, фокальный радиус-вектор которой равен 20.

Решение.

P=4, r=x+p/2, 20=x+4/2, x=18, $y^2=8*18$, y=±12, M1(18;12), M2(18,-12).

ЗАДАЧА № 4 На параболе $y^2 = 4x$ взята точка M(x;y), находящаяся от директрисы на расстоянии d=9. Вычислить расстояние этой точки до вершины параболы.

Решение.

P=2, r/d=1, r=d=1, r=x+p/2, 9=x+1, x=8, y^2=4*8=32,

$$L=\sqrt{(y-0)^2+(x-0)^2}=\sqrt{y^2+x^2}=\sqrt{32+64}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}.$$

ЗАДАЧА № 5 Найти точки пересечения параболы $y^2=12x$ с эллипсом $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

Решение.

$$\begin{cases} y^2=12x; \\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1; \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем два решения: $\left(\frac{5}{4};\sqrt{15}\right),\left(\frac{5}{4};-\sqrt{15}\right)$

ТЕСТ.

1. Кто из ученых открыл конические сечения ?
   а) Аполлоний;
   б) Евдокс;
   в) Менехм.
2. Какое из перечисленных сечений является вырожденным ?
   а) Окружность; в) Точка;
   б) Гипербола; г) Эллипс.
3. Какая кривая из трех данных имеет один фокус ?
   а) Эллипс;
   б) Гипербола;
   в) Парабола.
4. Для какого конического сечения эксцентриситет больше единицы ?
   а) Эллипс;
   б) Гипербола;
   в) Парабола
5. Гипербола называется равносторонней, если
   а) a>b; в) a=b=0;
   б) a=b; г) a<b.

6. Где у окружности расположены фокусы ?

а) на окружности;

б) вне окружности;

в) совпадают с центром.

7. С помощью какого преобразования из окружности можно получить эллипс.

а) параллельный перенос;

б) растяжение-сжатие;

в) осевая симметрия.

8. Как выглядит уравнение эллипса, если е=$\sqrt{3}/2$; а=$\sqrt{24}$.

а) $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{6}=1$; б) $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{42}=1$; в) $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{8}=1$.

9. Дана гипербола $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$. Вычислите эксцентриситет.

а) $\sqrt{7}/3$; б) 3/5; в) 5/3; г) $3/\sqrt{7}$.

10. Для параболы $y^2=12x$ найдите координаты его фокуса.

а) (6;0); б) (3;0); в) (12;0); г) (0;3).

Домашнее задание.

1. Через фокус параболы $y^2=2px$ проведена хорда, перпендикулярная к ее оси. Определить длину этой хорды.

2. Вычислить параметр параболы $y^2=2px$, если известно, что она касается прямой $x-2y+5=0$.

3. Найти общие касательные эллипса $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{25}=1$ и параболы $y^2=20/3x$.

4. Мостовая арка имеет форму параболы. Определить параметр этой параболы, зная, что пролет арки равен 24м, а высота 6м.

5. Струя воды, выбрасываемая фонтаном, принимает форму параболы, параметр которой р=0,1м. Определить высоту струи, если известно, что она падает в бассейн на расстоянии 2м от места выхода.

Занятие № 8 (2 часа)

Тема: Оптические свойства конических сечений. Применение конических сечений.

Основная цель: Ознакомить учащихся с оптическими свойствами конических сечений; рассмотреть новый способ построения эллипса и гиперболы; выяснить области применения конических сечений. Познакомить учащихся с законом Кеплера о движении небесных тел.

План:
1. Оптические свойства конических сечений.
2. Применение конических сечений в древности.
3. Закон Кеплера о движении небесных тел.

Методический комментарий.

Это занятие является последним, на котором даются новые сведения о конических сечениях. При изучении оптических свойств можно вычертить вместе с учащимися рисунки 15-18. Это углубит интерес ребят к факультативу, даст навыки построения конических фигур.

При изучении применения конических сечений учитель может либо сам рассказать этот вопрос, либо на предыдущем занятии дать учащимся доклады и сообщения. При этом темы можно выбрать такие:

1. Применение конических сечений в древности.
2. Закон Кеплера.
3. Применение конических сечений в механике и строительстве.

Занятие расчитанно на 2 часа.

Содержание занятия.

Оптические свойства конических сечений.

На рис.15 изображена густая сеть из двух серий концентрических окружностей с центрами F_1 и F_2; разность радиусов двух соседних окружностей каждой серии равна d. Сеть разбивает плоскость на маленькие четырхугольники, которые можно считать ромбиками; противоположные стороны "параллельны", а обе «высоты» равны d.

Если, начиная с любого узла M сети, двигаться по диагоналям этих четырехугольников, то траекторией движения в одном направлении будет эллипс, а в другом - одна ветвь гиперболы; вторая ветвь гиперболы получится, если двигаться из узла M' , симметричного M. Фокусами обеих кривых будут F_1 и F_2.

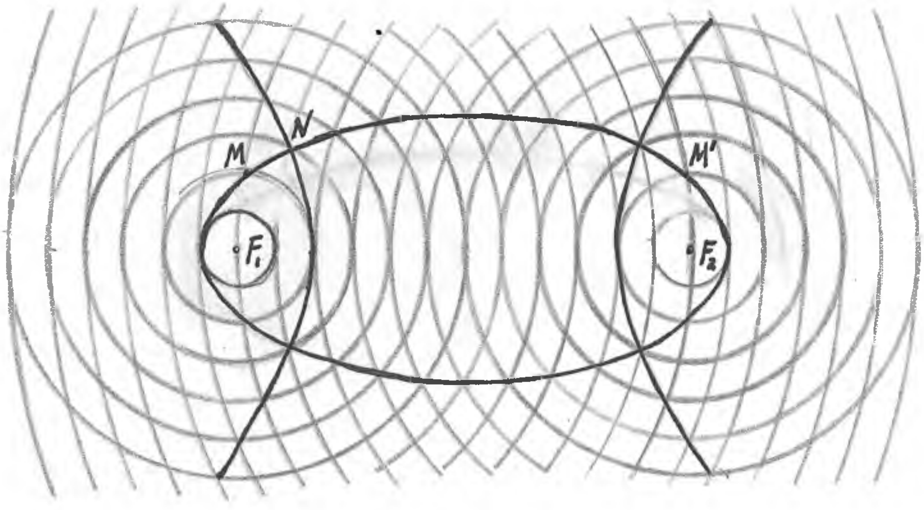


Рис.15

Для эллипса $F_1N = F_1M + d$, $F_2N = F_2M - d$ и $F_1N + F_2N = F_1M + F_2M$. Аналогично и для гиперболы.

Вот новый способ построения эллипса и гиперболы по фокусам и одной точке. Начинать можно с любого узла сети. И мы получаем два семейства "софокусных" эллипсов и гипербол. Это построение тем точнее, чем меньше d.

Диагонали ромба взаимно перпендикулярны, значит, каждая пара софокусных эллипса и гиперболы пересекаются под прямым углом. Диагональ ромба делит его угол пополам, значит, касательная к эллипсу (гиперболе), является биссектрисой каждого угла ромбической сети, внутри которого она проходит.

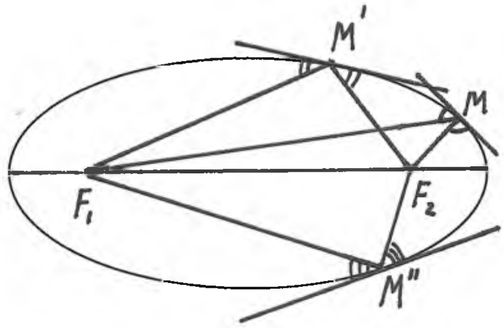


Рис.16

Из того, что каждый радиус окружности пересекает ее под прямым углом, следует, что касательная MN в каждой точке M эллипса образует равные углы с прямыми F_1M и F_2M. Значит, по закону "угол падения равен углу отражения", луч F_1M, падающий из F_1 в точку M эллипса, отражается из него по прямой MF_2 (рис. 16). Это будет для каждой точки эллипса.

<u>Свойство 1.</u> Все лучи, выходящие из фокуса F_1, отражаясь от эллипса, соберутся в другом его фокусе F_2.

<u>Свойство 2.</u> Лучи, выходящие из одного фокуса, отражаясь от гиперболы, будут расходиться таким образом, что кажутся выходящими из второго фокуса (рис. 17).

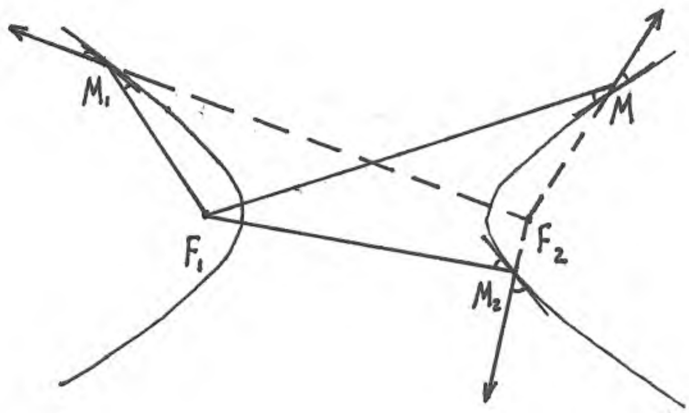


Рис. 17

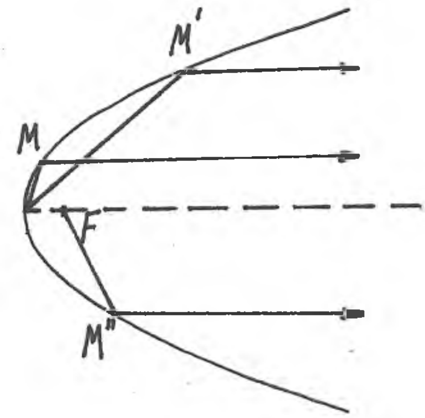


Рис. 18

Случай параболы - промежуточный между эллипсом и гиперболой.

Свойство 3. Второй фокус параболы "уходит в бесконечность" по фокальной оси, и лучи, выходящие из единственного фокуса, отражаясь от параболы, пойдут параллельно оси (рис. 18).

Применение конических сечений.

В древности применение конических сечений в науке было сравнительно ограниченным. Они служили в качестве вспомогательных линий при решении трех классических задач, а также уравнений 3-й и 4-й степени. В технике применение конических сечений так же было невелико: было известно, что тень конца гномона в солнечных часах описывает коническое сечение. В середине века, а именно в 1604 г., Кеплер обнаружил, что пучок лучей, направленных по дипметрам параболы, отразившись от параболы, собирается в ее фокусе; и если поместить в эту точку легко воспламеняемое вещество, то оно загорится. Это свойство параболического зеркала лежащее в основе устройства прожектора и параболического телескопа.

Важнейшую роль в науке и технике кривые второго порядка стали играть в новое время, после того, какк Галилей установил, что свободно брошенное тело или снаряд, выпущенный из орудия, двигается по параболе, а Кеплер сформулировал законы движения небесных тел - планет, комет, спутников.

Закон: Если материальная точка M движется в пространстве только под действием притяжения другой материальной точки C (которую будем считать неподвижной), причем сила притяжения подчиняется закону Ньютона $F = a / r^2$ (где r - расстояние между C и M, a - постоянная), то траектория движения является коническим сечением с фокусом в точке C (либо же точка M движется по прямой, проходящей через C).

Кеплер пришел к этому закону эмпирически, изучая наблюдения Тихо Браге; математический закон был впоследствии доказан Ньютоном.

Все тела Солнечной системы движутся вокруг Солнца по эллипсам. Небесные тела, попадающие в Солнечную систему из других звездных систем, движутся вокруг Солнца по гиперболической орбите и, если их движение не оказывает существенного влияния на планеты Солнечной системы, покидают ее по этой же орбите.

По эллипсам движутся вокуг Земли ее искусственные спутники и естественный спутник - Луна.

Малые тела Солнечной системы - кометы, движутся по параболическим или гиперболическим орбитам. В задачах космического полета наиболее часто встречаются эллиптические и гиперболические орбиты. Так, межпланетные станции, отправляются в полет, имея гиперболическую орбиту относительно Земли; затем они движутся по эллиптическим орбитам относительно Солнца по направлению к планете назначения.

Кроме этого, гиперболы и параболы применяются в строительном деле.

Вопросы для закрепления.

1. В чем состоят оптические свойства конических сечений?
2. Расскажите о способах построения эллипса и гиперболы по фокусам и одной точке.
3. В чем суть закона Кеплера?
4. В каких областях науки и техники применяются конические сечения?

Домашнее задание.

Найдите другие области применения конических сечений.

. УПРАЖНЕНИЯ.

1. Найти уравнение множества точек, для каждой из которых сумма расстояний от двух точек $F_1(4;0)$ и $F_2(-4;0)$ равна 10.
2. Длина большой полуоси эллипса равна 6, эксцентриситет e=1/2, а расстояние точки M до фокуса F_1 равно 7. Вычислить расстояние точки M до фокуса F_2 и координаты точки M. Написать уравнение эллипса.
3. В каждом из следующих случаев составить уравнение эллипса а) a=10, b=6; б) a+b=9, c=3; в) a=6, c=4.
4. Дан эллипс своим уравнением: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. Построить его фокусы не вычисляя его координат.

5. Сторона ромба равна 5 и высота 4,8. Через две противолежащие его вершины проходит эллипс, фокусы которого совпадают с двумя другими вершинами ромба. Составить уравнеие эллипса, приняв диагонали ромба за оси координат.
6. Вершина треугольника, имеющего неподвижное основание, перемещается так, что периметр треугольника сохраняет постоянную величину. Найти траекторию вершины при условии, что основание равно 24 см, а периметр равен 50 см.
7. Меридиан земного шара имеет форму эллипса, отношение осей которого равно 299/300. Определить эксцентриситет земного меридиана.
8. Найти точки, принадлежащие эллипсу $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$, абсциссы которых равны а) 2; б) 3; в) 1.
9. Составить уравнение эллипса, если:
   a) вершины эллипса имеют координаты A (6;0), A (-6;0), B (0;3), B (0;-3);
   b) фокальное расстояние 2c=10, а малая полуось b=5;
   c) эксцентриситет e=$\sqrt{3}$/3, а большая полуось a=3;
   d) эксцентриситет e=$\sqrt{3}$/5, а малая полуось b=2.
10. Доказать, что для координат x,y всех точек плоскости, лежащих внутри эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, имеет место неравенство $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1$, а для координат всех точек, лежащих вне эллипса,- неравенство $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}>1$.
11. Определить положение всех точек A(6;-3), B(-2;5), C(3;-6), D($\sqrt{50}$;0),

E(-4;$2\sqrt{6}$),G(1;$\sqrt{26}$) относительно эллипса $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{36}=1$

12. На эллипсе $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ найти точку, для которой произведение фокальных радиусов-векторов равно квадрату малой полуоси.

13. Через фокус F (c,0) эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ проведена хорда, перпендикулярная к большой оси. Найти длину этой хорды.

14. Вычислить длину стороны квадрата, вписанного в эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

15. Взяв на плоскости прямоугольную декартову систему координат, изобразить области, определяемые следующими системами неравенств:

a) $\begin{cases} 9x^2+25y^2-225<0 \\ 3x+5y-15<0 \\ y+2>0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+4y^2-16<0 \\ y+3>0 \\ x+y-2<0 \end{cases}$

16. Написать уравнение множества точек, для каждой из которых модуль разности расстояний от точек F_1(4;0), F_2(-4;0) равен 6.

17. Найти длины полуосей и координаты фокусов следующих гипербол;

а) $9x^2-4y^2-36=0$

б) $10x^2-2y^2-10=0$

18. Построить гиперболу основываясь на ее определении.

19. Построить фокусы и асимптоты гиперболы $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{25}=1$

20. Дана гипербола $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.Требуется:

1) вычислить эксцентриситет;
2) написать уравнение сопряженной гиперболы и вычислить ее эксцентриситет.

21. Зная уравнения асимптот гиперболы $y=\pm0{,}5x$ и одну из ее точек M(12;$3\sqrt{3}$), составить уравнение гиперболы.

22. Доказать, что отрезки, отсекаемые директрисами на асимптотах (считая от центра гиперболы), равны действительной полуоси. Пользуясь этим свойством, построить директрисы гиперболы.

23. Составить уравнение гиперболы, имеющей общие фокусы с эллипсом $\frac{x^2}{35}+\frac{y^2}{10}=1$ и проходящей через точку M($4\sqrt{2}$;3).

24. Доказать, что точка M(x;y) является внутренней точкой гиперболы в том и только в том случае, если $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}>1$; точка N(x;y) является внешней точкой гиперболы в том и только в том случае, если $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}<1$.

25. Взяв на плоскости прямоугольную систему координат, построить области, определяемые следующими системами неравенств:

a) $\begin{cases} x^2-4y^2-4>0 \\ 4x+3y-12<0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 9x^2-16y^2+144>0 \\ 2x-y-6<0 \\ 3x+y+12>0 \end{cases}$

26. Составить уравнение касательной к гиперболе $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{4}=1$ в точке N(5;1).

27. Доказать, что произведение расстояний любой точки гиперболы до двух асимптот, есть величина постоянная.

28. На гиперболе $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{16}=1$ найти точку, которая была бы в три раза ближе от одной асимптоты, чем от другой.

28. Через точку A(3;-1) провести хорду гиперболы $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ делящуюся пополам в этой точке.

30. Составить уравнение гиперболы, зная уравнения ее асимптот y=±0,5x и уравнение одной из ее касательных: 5x-6y-8=0.

31. Доказать, что произведение расстояний любой касательной к гиперболе от двух ее фокусов, есть величина постоянная.

32. Доказать, что отрезок любой касательной гиперболы, заключенный между асимптотами, делится в точке прикосновения пополам.

33. Составить уравнение параболы в каждом из следующих случаев:

1) расстояние от фокуса, лежащего на оси Ох, до вершины равно 4;
2) парабола симметрична относительно оси абсцисс и проходит через точку M(1;2);
3) парабола симметрична относительно оси ординат и проходит через точку M(5;1).

34. Составить уравнение параболы в каждом из следующих случаев:

a) фокус имеет координаты (3;0);
b) фокус имеет координаты (0;5);
c) директриса имеет уравнение x+15=0;
d) директриса имеет уравнение y+12=0;

35. Вычислить фокальный радиус FM точки M параболы y^2=8x, если ее абсцисса равна 8.

36. На параболе $x^2=-12y$ найти точку, фокальный радиус которой равен 9.

37. Под острым углом к горизонту брошен камень, который двигаясь по параболе, упал на расстоянии 24м от начального положения. Определить параметр траектории, зная, что наибольшая высота, достигнутая камнем, равна 6м.

38. Определить площадь треугольника, у которого одна вершина принадлежит директриссе параболы $y^2=2px$, а две другие служат концами хорды, проходящей через фокус и перпендикулярной к оси Ох.

39. Вычислить длину стороны правильного треугольника ABC, вписанного в параболу с параметром p, в предположении, что точка A совпадает с вершиной параболы.

40. Найти длины сторон треугольника, вписанного в параболу с параметром p, если одна вершина совпадает с вершиной параболы, а ортоцентр- с фокусом.

41. Взяв на плоскости прямоугольную систему координат, построить области, определяемые следующими системами неравенств:

a) $\begin{cases} y^2-10x<0 \\ 5x-3y-15<0 \\ y-2<0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+8y<0 \\ 2x+3y+6<0 \\ x+2>0 \end{cases}$

42. Построить параболу, пользуясь ее определением.

43. Найти точки пересечения параболы $y^2=12x$ с эллипсом

44. Составить уравнение касательной к параболе $y^2=8x$ в точке (2;-4).

45. Доказать, что точка M(x;y) является внутренней точкой параболы $y^2=2px$

Тогда и только тогда, когда $y^2-2px<0$.

46. Через точку A(2;1) провести такую хорду параболы $y^2=4x$, которая делилась бы в данной точке пополам.

47. Парабола симметрична относительно оси x, вершина ее находится в точке (-5;0) и на оси ординат она отсекает хорду, длина которой l=12. Написать уравнение этой параболы.