«Если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду, а если хотите научиться решать задачи, то решайте их!» (Д. Пойа)

Дидактический материал по теме «Задание 17 ЕГЭ. Решение экономических задач»

Автор: Денисенко Алёна Дмитриевна, учитель математики
МБОУ БСОШ №1 им.П.П.Корягина
Благовещенского района Алтайского края

Есть всего два **характерных** типа «банковских» задач, или задач на кредиты.

1 тип. Выплаты кредита производятся **равными платежами**. Эта схема еще называется «аннуитет». К первому типу относятся также все задачи, где известны **платежи** (или дана закономерность именно для **платежей**).

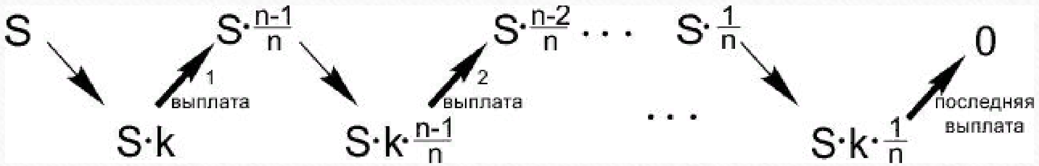
2 тип. Выплаты кредита подбираются так, что **сумма долга уменьшается равномерно**. Это так называемая «схема с дифференцированными платежами». Ко второму типу относятся также задачи, где известна закономерность уменьшения **суммы долга**.

В задачах первого типа обычно применяется **формула для суммы геометрической прогрессии**. В задачах второго типа – **формула суммы арифметической прогрессии**. И первое, что надо сделать, когда решаете «экономическую» задачу – определить, к какому типу она относится.

В задачах первого типа обычно применяется **формула для суммы геометрической прогрессии**. В задачах второго типа – **формула суммы арифметической прогрессии**. И первое, что надо сделать, когда решаете «экономическую» задачу – определить, к какому типу она относится.

Определение (рекуррентная формула)	$a_{n+1} = a_n + d$	$b_{n+1} = b_n \cdot q$
Разность АП Знаменатель ГП	$d = a_{n+1} - a_n$	$q = b_{n+1} : b_n$
Формула ***n***-го члена	$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
Сумма ***n*** первых членов	$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$	$S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$
Характеристи-ческое свойство	$a_n = \dfrac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$	$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$

Пусть S – сумма кредита, n – количество платежных периодов,
p – процент по кредиту, начисляемый банком.
Коэффициент k показывает, во сколько раз увеличивается сумма долга после начисления процентов.

1. Выплаты кредита равными платежами (аннуитет).	**2. Равномерное уменьшение суммы долга (схема с дифференцированными платежами)**
X – очередная выплата Схема погашения кредита: $(((S\cdot k - X)\cdot k - X)\cdot k - X)...\cdot k - X = 0$ Раскроем скобки: $S\cdot k^n - X(k^{n-1}+k^{n-2}+...+k^2+k+1)=0$ Применяем формулу суммы геометрической прогрессии. Получим: $S\cdot k^n - X\cdot\frac{k^n-1}{k-1}=0.$	Схема погашения кредита для n платежных периодов.  1 выплата: $Z_1 = S\cdot k - S\cdot\frac{n-1}{n}$ 2 выплата: $Z_2 = S\cdot\frac{n-1}{n}\cdot k - S\cdot\frac{n-2}{n}$ n-ная выплата: $Z_n = S\cdot\frac{1}{n}\cdot k$ Для общей суммы всех выплат применяем формулу суммы арифметической прогрессии: $Z_n = S\cdot k\cdot\frac{n+1}{2} - S\cdot\frac{n-1}{2} = S + S\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{p}{100} = S + \Pi$ где П - величина переплаты, $\Pi = S\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{p}{100}$

К первому типу можно отнести все задачи, где одинаковы (или известны) платежи. Ко второму – задачи, где равномерно (или по известной схеме) уменьшается сумма долга.

Схема 1: Аннуитет. Известна информация о платежах.

1 июня 2013 года Ярослав взял в банке 900 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Ярослав переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Ярослав может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 300 000 рублей

Пусть S – сумма кредита; p% – процентная ставка банка;

Тогда после каждого начисления процентов сумма долга увеличивается в k раз.

$k = 1 + \frac{p}{100}$. Пусть X – величина платежа. После первого начисления процентов и первого платежа сумма кредита равна (Sk – X), после второго (Sk – X)k – X, …., после n-го (((((Sk – X)k-X)k-X)k - …X)=0.

Преобразуем: $Sk^n - X(k^{n-1} + k^{n-2} + \ldots + k + 1) = 0$

Заметим, что в скобках – сумма n членов геометрической прогрессии, где $b_1 = 1,\ q = k$.

Поскольку $S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$, Получим: $Sk^n = X \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}$

Из этой формулы находим S, X или n.

Схема 1: Аннуитет. Известна информация о платежах.

1 июня 2013 года Ярослав взял в банке 900 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Ярослав переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Ярослав может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 300 000 рублей

В данной задаче S =900 000; p%=1% , k=1,01, X ≤ 300 000

Из этой формулы находим n: $Sk^n = X \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1}$

$900 \cdot 1{,}01^n = 300 \cdot \frac{1{,}01^n - 1}{1{,}01 - 1}$

$1{,}01^n \approx 1{,}0309$

Перебор для n.

Из условия задачи видно, что если бы банк не начислял проценты, то Ярослав смог бы вернуть долг за 3 месяца. Поскольку банк начисляет проценты, количество месяцев больше или равно 4. При n=4 получим $1{,}01^n = 1{,}04060$, значит 4 месяца это минимальное количество месяцев на которое Ярослав может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 300 000 рублей.

Схема 1: Аннуитет. Известна информация о платежах.

31 декабря 2014 года Тимофей взял в банке 7 007 000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), затем Тимофей переводит в банк платёж. Весь долг Тимофей выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

Расчет будем вести в тысячах рублей.

В данной задаче S =7007 тысяч рублей, p%=20% , k=1,2, X – очередная выплата в тысячах рублей. Решение задачи можно оформить таблицей.

31 декабря кредитного года	Долг Тимофея на начало кредитного года	Сумма платежа	Долг Тимофея после внесенного платежа
2014	S	0	S
2015	$S\cdot k$	X	$Sk - X$
2016	$(Sk - X)\cdot k$	X	$(Sk - X)\cdot k - X$
2017	$((Sk - X)\cdot k - X)\cdot k$	X	$((Sk - X)\cdot k - X)\cdot k - X$

Схема 1: Аннуитет. Известна информация о платежах.

$$((Sk - X)\cdot k - X)\cdot k - X = 0, \text{ раскроем скобки: } Sk^3 - X(k^2 + k + 1) = 0$$

Подставим значение переменных S =7007 тысяч рублей,k=1,2. Получим: X=3326,4 тыс.руб=3326400 рублей. За три года Тимофей заплатит: 9979200 рублей.

Проведем расчет варианта если бы Тимофей смог выплатить долг за 2 равных платежа. Пусть у рублей – платёж, который Тимофей переводит в банк,

31 декабря кредитного года	Долг Тимофея на начало кредитного года	Сумма платежа	Долг Тимофея после внесенного платежа
2014	7007000	0	7007000
2015	7007000+0,2*7007000=8408400	y	8408400 – y
2016	1,2(8408400 – y)=10090080 – 1,2y	y	10090080 – 2,2y

Схема 1: Аннуитет. Известна информация о платежах.

31 декабря кредитного года	Долг Тимофея на начало кредитного года	Сумма платежа	Долг Тимофея после внесенного платежа
2014	7007000	0	7007000
2015	7007000+0,2*7007000=8408400	y	8408400 – y
2016	1,2(8408400 – y)=10090080 – 1,2y	y	10090080 – 2,2y

Так как весь долг Тимофей выплатил за 2 равных платежа, то 10090080 – 2,2y=0, т.е. y=4586400. За два года Тимофей заплатит: 2y=9172800

Найдем разность: 2y – 3x = 9979200 – 9172800=806400

Ответ: на 806400 рублей меньше Тимофей бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа

Задача для самостоятельного решения

31 декабря 2014 года Савелий взял в банке 7 378 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Савелий переводит в банк платёж. Весь долг Савелий выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

Обратите внимание, что коэффициент k лучше записать в виде обыкновенной дроби, а не десятичной. Иначе при возведении в степень вы получите 9 знаков после запятой.

Решение.

Пусть S=7378000=7378·10^3 рублей, p=12,5%=$\frac{125}{1000}=\frac{1}{8}$, $k=1+\frac{p}{100}=\frac{9}{8}$, *X* - сумма ежегодной выплаты для трех платежей, *Y* – сумма ежегодной выплаты для двух платежей.

Составим схему для трех платежей: $(((S\cdot k - X)\cdot k - X)\cdot k - X=0$

Раскроем скобки: $S\cdot k^3 - X(k^2 + k + 1)=0$

Выразим *X* из уравнения: $X=\frac{Sk^3}{k^2+k+1}$. В этом случае Савелий выплатит банку 3X рублей.

Составим схему для двух платежей: $((S\cdot k - Y)\cdot k - Y=0$

Раскроем скобки: $S\cdot k^2 - Y(k + 1)=0$

Выразим *Y* из уравнения: $Y=\frac{Sk^2}{k+1}$. В этом случае Савелий выплатит банку 2*Y* рублей.

Найдем разность

$$3X-2Y=\frac{3Sk^3}{k^2+k+1}-\frac{2Sk^2}{k+1}=\frac{3Sk^3(k+1)-2Sk^2\left(k^2+k+1\right)}{(k^2+k+1)(k+1)}=\frac{3Sk^4+3Sk^3-2Sk^4-2Sk^3-2Sk^2}{(k^2+k+1)(k+1)}=$$

$$=\frac{Sk^4+Sk^3-2Sk^2}{(k^2+k+1)(k+1)}=\frac{Sk^2(k^2+k-2S)}{(k^2+k+1)(k+1)}.$$

Подставим числовые значения, получим 506250 рублей.

Ответ: 506250 рублей

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 21 месяц. Условия возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на 30 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
— к 15-му числу 21-го месяца кредит должен быть полностью погашен.
Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1604 тысяч рублей?

Решение.

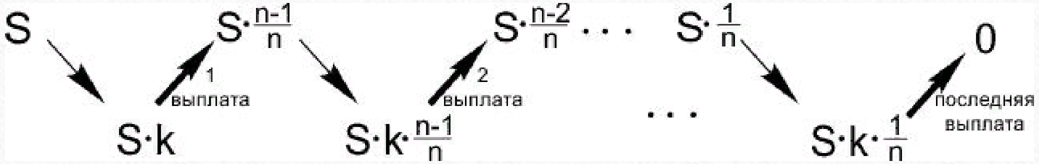
Расчеты будем вести в тысячах рублей.

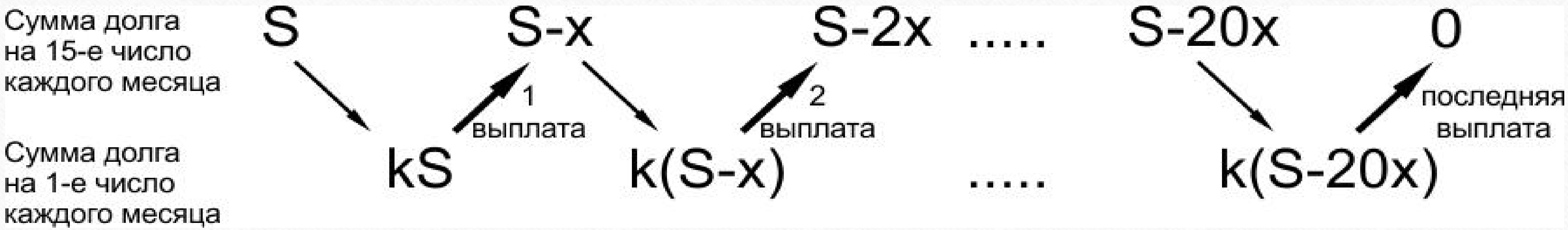
Пусть S – сумма, которую планируется взять в кредит,

Z – общая сумма выплат, Z = 1604 (тыс. рублей).

X - ежемесячное уменьшение суммы долга, X = 30 (тысяч рублей), p=3% - процент, начисляемый банком ежемесячно. После первого начисления процентов сумма долга равна $S \cdot (1 + \frac{p}{100}) = S \cdot k$. После каждого начисления процентов сумма долга увеличивается в $k = 1 + \frac{p}{100}$ раза. В нашей задаче k = 1,03.

Определим, к какому типу относится задача. Долг уменьшается равномерно (по условию, 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на 30 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца). Значит, это задача второго типа.

1. Выплаты кредита равными платежами (аннуитет).	2. Равномерное уменьшение суммы долга (схема с дифференцированными платежами)
X – очередная выплата Схема погашения кредита: $(((S\cdot k - X)\cdot k - X)\cdot k - X)\ldots\cdot k - X = 0$ Раскроем скобки: $S\cdot k^n - X(k^{n-1}+k^{n-2}+\ldots+k^2+k+1)=0$ Применяем формулу суммы геометрической прогрессии. Получим: $S\cdot k^n - X\cdot\frac{k^n-1}{k-1}=0.$	Схема погашения кредита для n платежных периодов.  1 выплата: $Z_1 = S\cdot k - S\cdot\frac{n-1}{n}$ 2 выплата: $Z_2 = S\cdot\frac{n-1}{n}\cdot k - S\cdot\frac{n-2}{n}$ n-ная выплата: $Z_n = S\cdot\frac{1}{n}\cdot k$ Для общей суммы всех выплат применяем формулу суммы арифметической прогрессии: $Z_n = S\cdot k\cdot\frac{n+1}{2} - S\cdot\frac{n-1}{2} = S + S\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{p}{100} = S + \Pi$ где П - величина переплаты, $\Pi = S\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{p}{100}$



После первого начисления процентов сумма долга равна kS. Затем, после первой выплаты, сумма долга равна S – X, где X = 30 (тысяч рублей).

Значит, первая выплата равна kS – (S – X),

Вторая выплата: k (S – X) – (S – 2X),

и т.д.

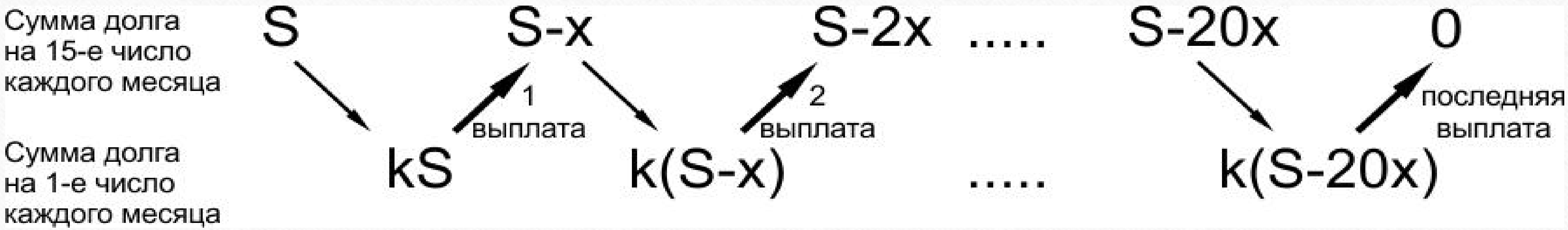
Последняя выплата: k (S – 20 X).

Найдем общую сумму выплат Z.

Z = kS – (S – X) + k (S – X) – (S – 2X) + … + k (S – 20X) = k(S + S – X + S – 2X + … + S – 20 X) – (S – X + S – 2X + … + S – 20X).

Мы сгруппировали слагаемые, содержащие множитель k, и те, в которых нет k. Упростим выражения в скобках: k (21S – X (1 + 2 + 3+ … + 20)) – (20S – X (1 + 2 + 3+ … + 20)) = Z.

В задачах этого типа (когда сумма долга уменьшается равномерно) применяется формула для суммы арифметической прогрессии: $S_n = \frac{(a_1+a_n)}{2} \cdot n.$



В этой задаче мы тоже ее используем.

$$1 + 2 + 3 + ... + 20 = \frac{1+20}{2} \cdot 20 = 210.$$

k (21S – X (1 + 2 + 3+ … + 20)) – (20S – X (1 + 2 + 3+ … + 20)) = Z.

Получим:

k (21 S – 210X) – 20 S + 210 X = S (21k – 20) – 210 X (k-1) = Z.

Осталось подставить числовые значения.

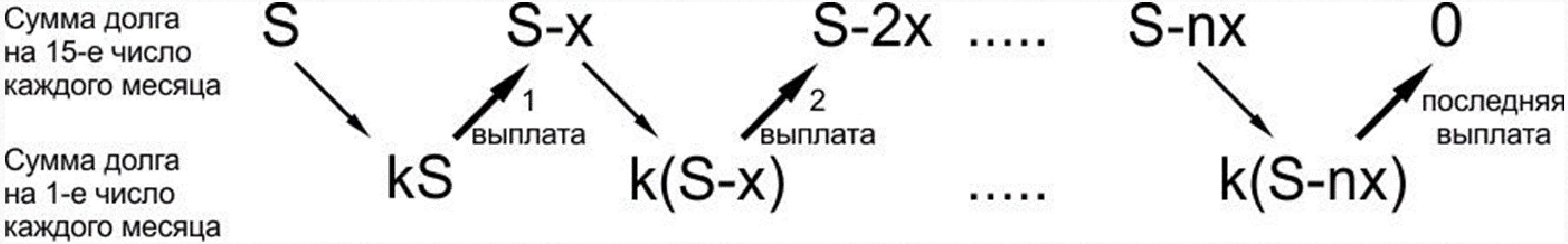
S (21· 1,03 – 20) – 210 · 30 · 0,03 = 1604.

Отсюда S = 1100 тысяч рублей = 1 100 000 рублей.

Следующая задача относится к тому же типу. Математическая модель та же самая. Только найти нужно другую величину – процент, начисляемый банком. К тому же количество месяцев, на которое взят кредит, неизвестно.

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 1 000 000 рублей на (n+1) месяц. Условия его возврата таковы:
—1-го числа каждого месяца долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца с 1-го по n-й долг должен быть на 40 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
— 15-го числа n-го месяца долг составит 200 тысяч рублей;
— к 15-му числу (n + 1)-го месяца кредит должен быть полностью погашен.
Найдите r, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1378 тысяч рублей.

Для удобства ведем расчеты в тысячах рублей.
S = 1000000 рублей = 1000 (тыс. рублей) – сумма кредита,
X = 40 (тыс. рублей) – ежемесячное уменьшение суммы долга,
Z = 1378 (тыс. рублей) – общая сумма выплат,
$k = 1 + \frac{r}{100}$ - коэффициент, показывающий, во сколько раз увеличилась сумма долга после начисления процентов.



Первая выплата: kS – (S – X).

Вторая выплата: k (S – X) – (S – 2X). И т.д.

Последняя выплата: k (S – n X).

По условию, 15-го числа n-го месяца долг составит 200 тысяч рублей. Значит, S – nX = 200.

Подставим числовые данные: 1000 – 40 n = 200; тогда n = 20, n + 1 = 21, то есть кредит был взят на 21 месяц.

Общая сумма выплат Z: Z = kS – (S – X) + k (S – X) – (S – 2X) + … + k (S – X) =

= k (S + S – X + S – 2X + … + S – 20 X) – (S – X + S – 2X + … + S – 20X) =

= k (21S – X (1 + 2 + 3+ … + 20)) – (20S – X (1 + 2 + 3+ … + 20)) =

= k (21 S – 210X) – 20 S + 210 X = S (21k – 20) – 210 X (k-1)=Z.

Выразим k из формулы: $k = \dfrac{Z + 20S - 210X}{21(S - 10X)}$ Подставим данные из условия задачи

$$k = \frac{1378 + 20 \cdot 1000 - 210 \cdot 40}{21 \cdot (1000 - 10 \cdot 40)} = 1,03.$$

Ответ: r = 3%.

Задача для самостоятельного решения

15-го декабря планируется взять кредит в банке на сумму 300 тысяч рублей на 21 месяц. Условия возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
— 15-го числа 20-го месяца долг составит 100 тысяч рублей;
— к 15-му числу 21-го месяца кредит должен быть полностью погашен.
Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

Решение.

Для удобства ведем расчеты в тысячах рублей.

S = 300 (тыс. рублей) – сумма кредита,

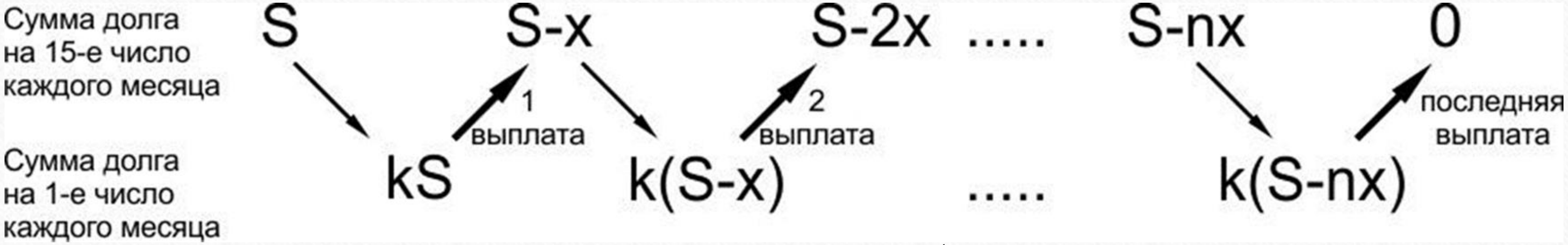
n = 21 – количество месяцев,

r = 2%; $k = 1 + \frac{r}{100} = 1,02$;

X – ежемесячное уменьшение суммы долга,

Z – общая сумма выплат.

Рисуем ту же схему, что и в предыдущей задаче.



По условию, 15-го числа 20-го месяца долг составит 100 тысяч рублей.

Значит, S – 20 X = 100. Подставив данные из условия, найдем, что X = 10.

Точно так же считаем сумму выплат (смотри задачи 1 и 2).

Z = S (21k – 20) – 210 X (k-1).

Подставляем данные из условия: Z = 300 (21 · 1,02 – 20) – 210 · 10 · 0,02 = 384 (тыс. рублей).

Ответ: 384000 рублей.

В презентации использованы материалы сайта https://ege-study.ru/teacher/anna-georgievna-malkova/