АДМИНИСТРАЦИЯ МУНИЦИПАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ ГОРОДСКОГО ОКРУГА «ИНТА»

МУНИЦИПАЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ГИМНАЗИЯ № 2»
(МБОУ «ГИМНАЗИЯ № 2»)
«2 №-а ГИМНАЗИЯ» МУНИЦИПАЛЬНОЙ ВЕЛОДАН СЬОМКУД УЧРЕЖДЕНИЕ

УТВЕРЖДАЮ
____Н.В. Яловая
приказ МБОУ «Гимназия № 2»
от 31.08.2019 №315

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА - ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ОБЩЕРАЗВИВАЮЩАЯ ПРОГРАММА

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

название программы

_______________естественнонаучная_____________________

направленность

1 год

срок реализации программы

Колобова Светлана Айратовна

ФИО педагогического работника, составившего программу

г. Инта

наименование населённого пункта

2019

год разработки

1. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Содержание дополнительной общеобразовательной программы – дополнительной общеразвивающей программы **«ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ ТРИГОНОМЕТРИИ» (далее – Программа)** разработано с учетом следующих документов:

1. Федеральный закон от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации».
2. Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 09.11.2018 № 196 «Об утверждении Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по дополнительным общеобразовательным программам» (зарегистрирован в Министерстве юстиции РФ 29.11.2018 № 52831).
3. Постановление Главного государственного санитарного врача РФ от 04.07.2014 № 41 «Об утверждении СанПиН 2.4.4.3172-14 «Санитарно-эпидемиологические требования к устройству, содержанию и организации режима работы образовательных организаций дополнительного образования детей» (вместе с СанПиН 2.4.4.3172-14. Санитарно-эпидемиологические правила и нормативы. Зарегистрировано в Министерстве юстиции РФ 20.08.2014 № 33660).
4. Концепция развития дополнительного образования, утвержденная распоряжением Правительства Российской Федерации от 04.09.2014 № 1726-р.
5. Приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 29.08.2013 № 1008 «Об утверждении порядка организации и осуществления образовательной деятельности по дополнительным общеобразовательным программам».
6. Письмо Минобрнауки России от 18.11.2015 № 09-3242 «О направлении информации (вместе с Методическими рекомендациями по проектированию дополнительных общеразвивающих программ, включая разноуровневые программы).
7. Письмо Минобрнауки России от 11.12.2006 № 06-1844 «О примерных требованиях к программам дополнительного образования детей».
8. Устав МБОУ «Гимназия № 2».
9. Лицензия МБОУ «Гимназия № 2» на образовательную деятельность.
10. Программа учебного (элективного) курса «Избранные вопросы математики» для образовательных организаций, реализующих программы среднего общего образования, 10-11 классы. ГАУ ДПО «Саратовский областной институт развития образования», Саратов, 2017 год.

Программа адаптирована с учетом особенностей учащихся МБОУ «Гимназия № 2». Коррективы не затрагивают концептуальных основ организации образовательного процесса, традиционной структуры занятий, присущих исходной программе, которая была взята за основу. По своему функциональному назначению программа является общеразвивающей и направлена на удовлетворение потребностей учащихся в интеллектуальном, нравственном совершенствовании. Предлагаемая программа расчитана для проведения занятий по математике в системе дополнительного образования с учащимися 17-18 лет, проявляющими интерес к этой дисциплине. Программа имеет естественнонаучную направленность, так как ориентирована на расширение знаний учащихся, получаемых при изучении основного курса математики и приобретение умений решать трудные и разнообразные задачи, искать закономерности. При этом актуальным остается интеграция общего и дополнительного образования.

Содержание Программы соответствует:

1. современным образовательным технологиям, отраженных в принципах обучения;
2. формам и методам обучения;
3. методам контроля и анализу результатов деятельности ребенка;
4. средствам обучения.

Программа направлена на:

- создание условий для развития личности подростка;
- развитие мотивации личности подростка к познанию и творчеству;
- обеспечение эмоционального благополучия подростка;
- создание условий для социального и профессионального самоопределения, творческой реализации самореализации личности подростка.

Актуальность Программы: Математика в наши дни проникает во все сферы общественной жизни. Овладение практически любой современной профессией требует тех или иных знаний по математике. В школе математика является опорным предметом, обеспечивающим изучение на современном уровне ряда других дисциплин, как естественных, так и гуманитарных. Математическое образование вносит свой вклад в формирование общей культуры человека, способствует эстетическому воспитанию, пониманию красоты и изящества математических рассуждений. Изучение математики развивает воображение, учит выстраивать алгоритмы, расширяет представление о многовариативности развития ситуаций. Необходимо отметить, что математика является профильным предметом при поступлении в высшие и профессиональные учебные заведения по широкому спектру специальностей.

Актуальность дополнительной образовательной Программы состоит в том, что она поддерживает изучение основного курса, направлена на систематизацию, расширение и повторение знаний учащихся. Вопросы, рассматриваемые в программе, тесно примыкают к основному курсу алгебры, поэтому данная программа будет способствовать совершенствованию и развитию математических знаний и умений учащихся. Разработка Программы обусловлена тем, что для выявления типичных ошибок, допускаемых учащимися, можно использовать организацию учащихся по проверке работ, выполненных самими учащимися.

Отличительной особенностью данной программы является то, что учащемуся предоставляется возможность выступить в роли эксперта по проверке заданий, а также реализация программы возможна не только для учащихся МБОУ «Гимназия №2», но и для учащихся иных общеобразовательных организаций, что вписывается в рамки деятельности Опорной школы, в статусе которой МБОУ «Гимназия №2» действует с 2019 года. Таким образом, Программа способствует формированию и развитию модели наставничества «Ученик – Ученик». Реализация программы возможна с применением дистанционных образовательных технологий на платформе ZOOM, по средствам видеоконференций.

Цель Программы - создание условий для формирования, развития и реализации модели наставничества по освоению дополнительных программ на основе взаимодействия «ученик-ученику».

Задачи:

1. Сформировать умение контролировать процесс и результат учебной математической деятельности.
2. Создать инструментарий по распознаванию способов решения тригонометрических уравнений. (Приложение 1)
3. Сформировать систему критериев для оценки работ. (Приложение 2)
4. Применить приобретённые знания при проверке и оценке работ учащихся**.**

Программа построена на основе принципа разноуровневости и предоставляет учащимся возможность освоения учебного содержания занятий с учетом их уровней общего развития, способностей и мотивации. Содержание и предлагаемые задания, предметный материал программы организован в соответствии со следующими уровнями сложности:

1. Повышенный уровень (участие в постановке и решении таких заданий и задач, для которых необходимо использование специализированных предметных знаний).
2. Высокий (продвинутый) уровень (участие в постановке и решении таких заданий и задач, для которых необходимо использование сложных, специализированных предметных знаний).

Критериальные подходы к реализации разноуровневой программы:

- разработка индивидуального маршрута для учащихся;
- использование сетевых форм взаимодействия;
- работа с одаренными детьми.

2. ОРГАНИЗАЦИОННЫЕ УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОГРАММЫ

Возраст учащихся	17-18 лет
Общее количество часов в год	17 часов

Периодичность проведения занятий	1 раза в неделю
Продолжительность одного занятия	45 минут
Нормы наполнения группы	20 - 25 человек
Вид организации учебно-воспитательного процесса	групповая
Форма организации учебной деятельности	кружок
Вид группы	профильная
Особенности набора	по индивидуальному запросу

3. ОЖИДАЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Развитие творческих, исследовательских, коммуникативных навыков учащихся.

Планируемые результаты освоения программы:

I. В личностном направлении:

– сформированность ответственного отношения к учению, готовности и способности учащихся на основе мотивации к обучению и познанию, выбору дальнейшего образования на базе ориентировки в мире профессий и профессиональных предпочтений, осознанному построению индивидуальной образовательной траектории с учётом устойчивых познавательных интересов;

– сформированность коммуникативной компетентности в общении и сотрудничестве со сверстниками в образовательной деятельности;

– умение ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи, выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры;

– креативность мышления, инициативы, находчивость, активность при решении алгебраических задач;

– умение контролировать процесс и результат учебной математической деятельности;

– способность к эмоциональному восприятию математических объектов, задач, решений, рассуждений.

II. В метапредметном направлении:

– умение самостоятельно планировать альтернативные пути достижения целей, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных и познавательных задач;

– умение осуществлять контроль по образцу и вносить необходимые коррективы;

– умение адекватно оценивать правильность или ошибочность выполнения учебной задачи, её объективную трудность и собственные возможности её решения;

– осознанное владение логическими действиями определения понятий, обобщения, установление аналогий, классификации на основе самостоятельного выбора оснований и критериев, установления родовидовых связей;

– умение организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками: определять цели, распределять функции и роли участников, взаимодействие и общие способы работы; умение работать в группе: находить общее решение и разрешать конфликты на основе согласования позиций и учёта интересов; слушать партнёра; формулировать, аргументировать и отстаивать своё мнение;

– умение понимать и использовать математические средства наглядности (рисунки, чертежи, схемы и др.) для иллюстрации, интерпретации, аргументации;

– понимание сущности алгоритмических предписаний и умение действовать в соответствии с предложенным алгоритмом;

– умение самостоятельно ставить цели, выбирать и создавать алгоритмы для решения учебных математических проблем.

Регулятивные УДД: учитывать выделенные учителем ориентиры действия в новом учебном материале в сотрудничестве с учителем; планировать свое действие в соответствии с поставленной задачей и условиями ее реализации, в том числе во внутреннем плане; осуществлять итоговый и пошаговый контроль по результату; способность сознательно организовывать и регулировать свою деятельность — учебную, общественную. *Познавательные УДД:* умения учиться: навыки решения творческих задач и навыки поиска, анализа и интерпретации информации, добывать необходимые знания и с их помощью проделывать конкретную работу, осуществлять поиск необходимой информации для выполнения учебных заданий с использованием учебной литературы.

Коммуникативные УДД: учиться выполнять различные роли в группе (лидера, исполнителя, критика), умение координировать свои усилия с усилиями других, формулировать собственное мнение и позицию; договариваться и приходить к общему решению в совместной деятельности, в том числе в ситуации столкновения интересов; задавать вопросы; допускать возможность существования у людей различных точек зрения, в том числе не совпадающих с его собственной, и ориентироваться на позицию партнера в общении и взаимодействии; учитывать разные мнения и стремиться к координации различных позиций в сотрудничестве.

III. В предметном направлении:

– умение работать с учебным математическим текстом (анализировать, извлекать необходимую информацию), точно и грамотно выражать свои мысли с применением математической терминологии и символики, проводить классификацию тригонометрических уравнений по выбору способа решения, логически его обосновывать;

– нахождение по графику значений тригонометрических функции, области определения, множества значений, нулей функции, промежутков знакопостоянства, промежутков возрастания и убывания, наибольшего и наименьшего значения тригонометрических функций;

– умение использовать тригонометрическую окружность для определения значений тригонометрических функций и обратных тригонометрических функций;

– умение решать простейшие тригонометрические уравнения, в том числе частные случаи тригонометрических уравнений относительно синуса, косинуса;

– составление плана решения тригонометрического уравнения, выделение этапов его решения, исследование полученного множества корней тригонометрического уравнения с учётом ограничений, полученных в ходе решения или составленных автором задания;

– умение находить частные решения тригонометрических уравнений, принадлежащих промежутку, заданному автором.

Для подведение итогов реализации программы разработаны Контрольно-измерительные материалы. (Приложение 6. Итоговое практическое задание.)

4. ЭТАПЫ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО КОНТРОЛЯ

№	Вид контроля	Цель контроля	Содержание	Форма
1	2	3	4	5
1.	Входящий контроль	Определение уровня знаний по ранее изученному материалу различных разделов математики	Задания по нахождению значений тригонометрических функций, обратных тригонометрических функций, решение простейших тригонометрических уравнений.	Тест (Приложение 5)
2.	Промежуточный контроль	Определение уровня самостоятельности при решении заданий	Решение тригонометрических уравнений различными способами	Самостоятельная работа
3.	Итоговый контроль	Определение уровня умения решать тригонометрические уравнения.	Решение тригонометрического уравнения с определением частных решений принадлежащих	Итоговое практическое задание (Приложение 6)

			заданному промежутку, проверка выполненной работы другим учащимся, оценка и выставление балла в соответствии с критериями. (работа выполняется в парах)	

Формы отслеживания и фиксации образовательных результатов:

- аналитическая справка
- журнал посещаемости
- маршрутный лист
- отзывы детей и родителей.

Формы предъявления и демонстрации образовательных результатов:

- поступление выпускников в профессиональные образовательные организации по профилю

Формы аттестации:

- диагностика результатов работы по программе связана с демонстрацией достижений учащихся (создание банка данных по типам тригонометрических уравнений, создание справочных опор по решению простейших тригонометрических уравнений и уравнений повышенного, высокого уровня сложности.
- текущий контроль уровня усвоения материала осуществляется на каждом занятии по результатам выполнения

Главный показатель – личностный рост учащихся, их творческих способностей. Подведение итогов реализации программы проводится в форме итогового практического задания. **(Приложение 3.** Диагностическая карта)

5. ПОКАЗАТЕЛИ УСПЕШНОСТИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Раздел «Тригонометрия» школьного курса математики наиболее сложный для учащихся. Одной из причин этого является недостаточное количество программных часов, отводимое на изучение этого раздела, а так же поверхностное изложение некоторых важных вопросов, связанных с решением тригонометрических уравнений, отбором и исследованием корней. Данная программа предназначена для повышения эффективности подготовки учащихся 10-11 классов к Государственной итоговой аттестации по математике и предусматривает их подготовку к дальнейшему математическому образованию. Анализ сдачи единого государственного экзамена показал, что ученики допускают много ошибок при выполнении заданий именно этого раздела или вообще не берутся за такие задания. Этот недостаток в получении тригонометрических знаний помогает устранить данная программа обучения.

Учащиеся знают:

- основные виды тригонометрических уравнений: сводящиеся заменой переменной к квадратному и простейшему тригонометрическому уравнениям; однородные тригонометрические уравнения, уравнения, решаемые с помощью вспомогательного угла;
- алгоритмы решения простейших тригонометрических уравнений;
- алгоритмы решения тригонометрических уравнений в зависимости от вида уравнения;
- приёмы отбора корней тригонометрического уравнения.

Понимают:

- как применять полученные алгоритмы при решении уравнений.

Умеют:

- применять основные тригонометрические тождества, тригонометрические формулы для преобразования выражений;
- решать тригонометрические уравнения: простейшие, приводимые к простейшим, приводимые к квадратным, однородные, решаемые с помощью введения дополнительного угла;
- проводить отбор корни тригонометрического уравнения;
- находить частные решения тригонометрического уравнения.

Обучаясь по данной программе, развивается понятие работы с алгоритмами решения тригонометрических уравнений, отбором и исследованием корней.

6. УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

№ п/п	Наименование разделов	Количество часов			
		всего	Теория, в том числе решение задач	практика	Формы контроля
1	2	3	4	5	6
1	Тригонометрические выражения	2	2	0	Контрольное задание
2	Решение простейших	2	2	0	Тест

	тригонометрических уравнений				
3	Способы решения тригонометрических уравнений	3	3	0	Контрольное задание
4	Арифметический и алгебраический способы отбора корней в тригонометрических уравнениях	2	2	0	Контрольное задание
5	Геометрический и функционально-графический способы отбора корней в тригонометрических уравнениях	1	1	0	Контрольное задание
6	Решение и тригонометрических уравнений различного уровня сложности	3	1	2	Контрольное задание
7	Проверка правильности решения тригонометрических уравнений и их оценка	4	1	3	Итоговое практическое задание
	Итого:	17	12	5	

7. СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ

Обобщенные принципы включения материала в содержание программы:

– принцип широкого доступа (материал предлагается в различных формах и типах источников: в печатном и электронном виде);

– принцип множественности методов;

– принцип доступности проб (вне зависимости от того, на каком уровне находится учащийся изначально, он имеет возможность получить доступ к заданиям любого уровня и осуществить пробу его решения). Данный принцип эффективен при разработке индивидуальных маршрутов учащихся, при организации групповой работы и формировании навыков наставничества у учащихся.

№	Название раздела, содержание	Количество часов

		Всего	Теория, в том числе решение задач.	Практика
1	2	3	4	5
1.	Тригонометрические выражения. При изучении данной темы уделяется внимание формулам двойного, тройного аргумента, упрощению тригонометрических выражений и вычислению значений тригонометрических выражений.	2	2	0
2.	Решение простейших тригонометрических уравнений При изучении данной темы происходит повторение решения простейших тригонометрических уравнений. Рассматриваются частные случаи решения тригонометрических уравнений.	2	2	0
3.	Способы решения тригонометрических уравнений При изучении этой темы рассматриваются способы решения тригонометрические уравнений: приведение к квадратному уравнению, использование однородности уравнения, введение новой переменной, разложение на множители, введение вспомогательного угла. Происходит показ примеров решения заданий, повышенного уровня сложности	3	3	0
4.	Арифметический и алгебраический способы отбора корней в тригонометрических уравнениях При изучении этой темы даются рекомендации по использованию арифметического и алгебраического способов отбора корней.	2	2	0
5.	Геометрический и функционально-графический способы отбора корней в тригонометрических уравнениях При изучении этой темы даются рекомендации по использованию геометрического и функционально-графического способов отбора корней тригонометрических уравнений.	1	1	0

6.	Решение тригонометрических уравнений различного уровня сложности	3	1	2
7.	Ознакомление с критериями проверки экзаменационных работ по решению тригонометрических уравнений и нахождению частных решений. Оценивание работ, выполненных учащимися.	4	1	3
	Итого:	17	12	5

(**Приложение 4.** Календарно-тематический план)

8. МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПРОГРАММЫ

Для проведения занятий по данной программе используется методика Коллективного способа обучения (КСО):

- контроль усвоения уровня теоретических знаний по методике взаимопроверки
- выполнение практических заданий по мурманской методике взаимообмена заданиями.

№ п\п	Наименование раздела	Формы занятий	Дидактический материал, техническое оснащение занятий	Формы подведения итогов
1	2	3	4	5
1	Тригонометрические выражения.	Лекция, решение задач	Раздаточный материал: тригонометрический круг. Презентация по работе с тригонометрическим кругом	Контрольное задание
2	Решение простейших тригонометрических уравнений	Решение заданий в парах сменного состава	Раздаточный материал по решению простейших тригонометрических уравнений	Тест
3	Способы решения тригонометрических уравнений	Лекция, решение задач, работа в группах	Презентация к занятию	Создание карточки-опоры по решению

				тригонометрических уравнений. Контрольное задание
4	Арифметический и алгебраический способы отбора корней в тригонометрических уравнениях	Решение задач. Работа в парах с взаимопроверкой	Раздаточный материал. Иллюстрация алгоритма	Контрольное задание
5	Геометрический и функционально-графический способы отбора корней в тригонометрических уравнениях	Решение задач. Работа в парах с взаимопроверкой	Раздаточный материал. Иллюстрация алгоритма	Контрольное задание
6	Решение и проверка тригонометрических уравнений различного уровня сложности	Работа в парах сменного состава	Раздаточный материал с критериями оценивания. Презентация показа оценивания работ	Итоговое практическое задание

Пример методической и дидактической обеспеченности программы приведен в **Приложение 1,2,5,6.**

9. ИНФОРМАЦИОННО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПРОГРАММЫ

В МБОУ «Гимназия № 2» созданы достаточные условия для реализации Программы. Занятия проводятся в учебном кабинете математики (кабинет №307), в котором обеспечена комфортность условия для реализации программы, с привлечением технических возможностей конференц-зала (кабинет №201). Кабинет № 201, современный конференц-зал оснащен:

- Моноблоки Lenovo Idea Centre AIO (8 шт.);
- Интерактивная LED панель New Line Tru Touch (1 шт.);
- Документ- камера Epson (1 шт.);

- Видеокамера Canon XA15 (1 шт.);
- Фотоаппарат Canon EOS M6 (1 шт.);
- Графический планшет Wacom Bamboo Slate Large CDS-810S;
- Флипчарт интерактивный SMART kapp 42;
- Многофункциональное устройство HP LaserJetPro (1 шт.).)

Приложение 6. Паспорт кабинета № 307

10. МЕТОДИЧЕСКОЕ И НОРМАТИВНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПРОГРАММЫ

1. Концепция развития дополнительного образования, утвержденная распоряжением Правительства Российской Федерации от 04.09.2014 № 1726-р.
2. Приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 29.08.2013 № 1008 «Об утверждении порядка организации и осуществления образовательной деятельности по дополнительным общеобразовательным программам».

11. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ И ИНТЕРНЕТ-РЕСУРСОВ

11.1 Литература для учителя:

1. Ковалева Г.И. и др. Математика. Тренировочные тематические задания повышенной сложности / Г.И. Ковалева. — Волгоград : Учитель, 2011. — 494с.
2. Алимов Ш. А. Алгебра и начала математического анализа. Учебник для 10 – 11 классов / Ш. А. Алимов. — М. : Просвещение, 2016. —463с.
3. Малкова А.Г. Математика. Задания высокой и повышенной сложности / А.Г. Малкова — Ростов-на-Дону : ООО «Феникс», 2019. —224с.
4. Ященко И.В. и др. Методические материалы для председателей и членов предметных комиссий субъектов Российской Федерации по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2019 года / И.В. Ященко— М.: ФИПИ, 2019. —115с.

11.2 Литература для учащегося:

1. Алимов Ш. А. Алгебра и начала математического анализа. Учебник для 10 – 11 классов / Ш. А. Алимов. — М. : Просвещение, 2016. —463с.

Приложение 1

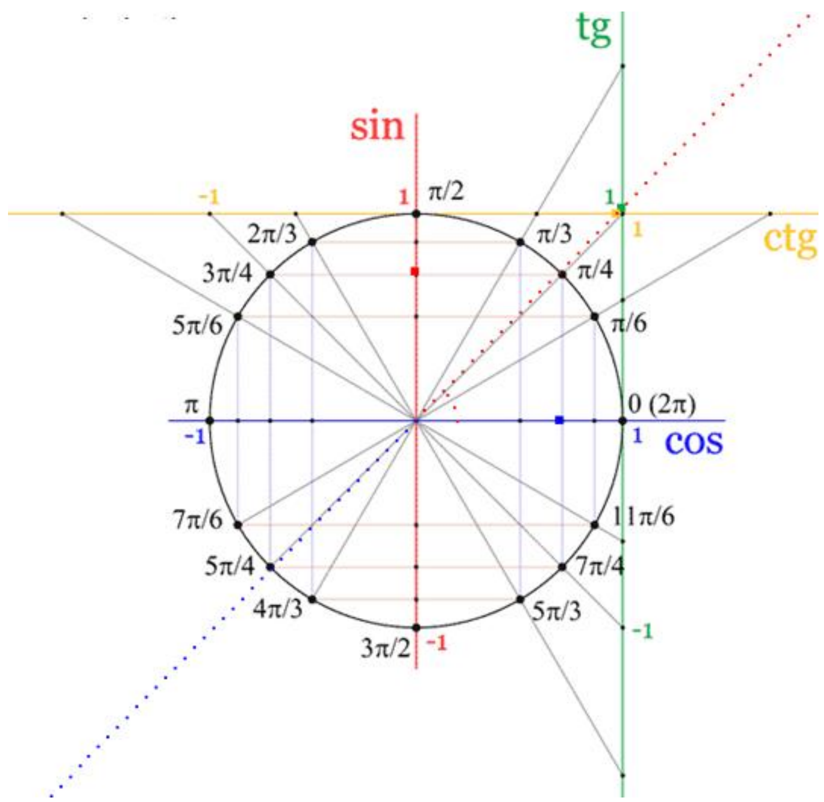
Дидактический материал к занятиям 1-7.

I. Важные моменты при решении тригонометрических уравнений.

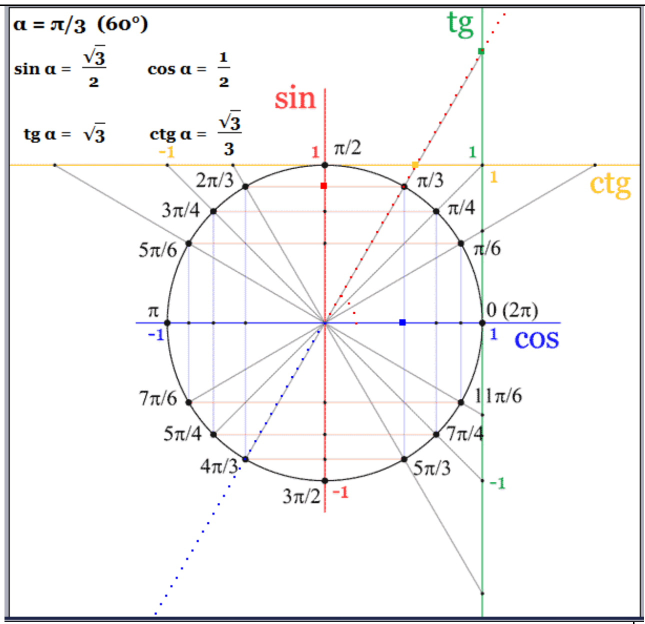
При решении тригонометрических уравнений необходимо уметь вычислять значения арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса. Это возможно вычислять с помощью таблицы или единичной окружности.

Значения тригонометрических функций для некоторых углов

α	0° (0 рад)	30° (π/6)	45° (π/4)	60° (π/3)	90° (π/2)	180° (π)	270° (3π/2)	360° (2π)
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	—	0	—

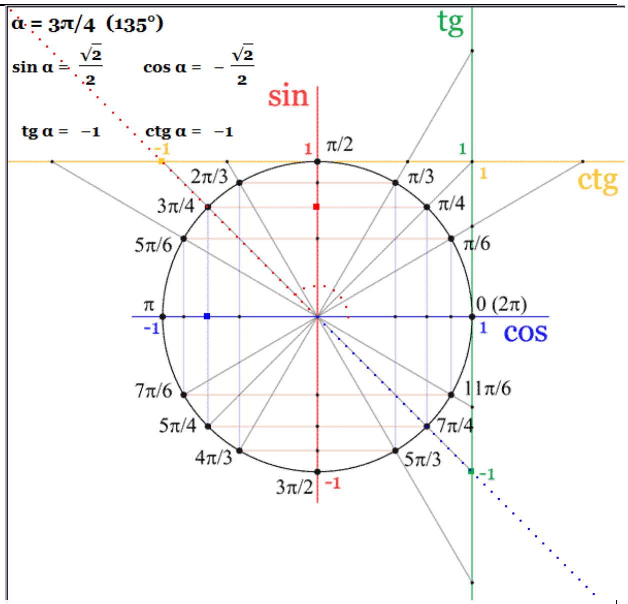


Примеры использования единичной окружности.



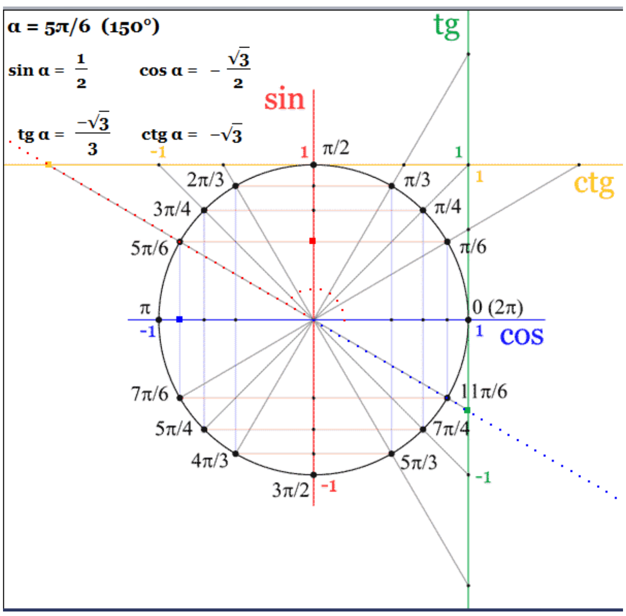
$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ $\mathrm{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

$\mathrm{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}$



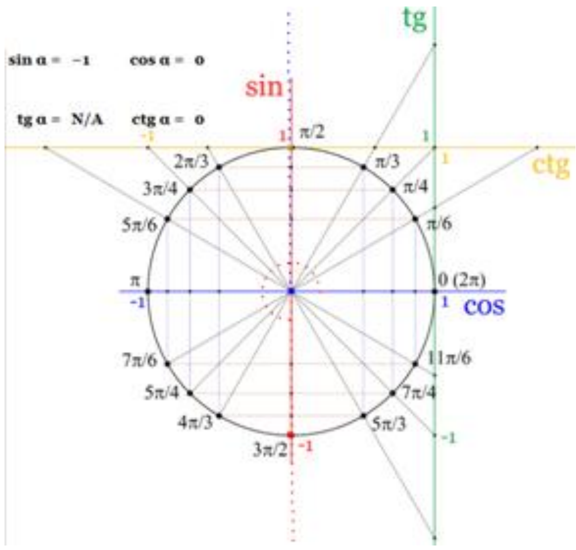
$\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\pi}{4}$ $\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{3\pi}{4}$

$\mathrm{arctg}\,(-1) = -\frac{\pi}{4}$ $\mathrm{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$



$\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$ $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{5\pi}{6}$

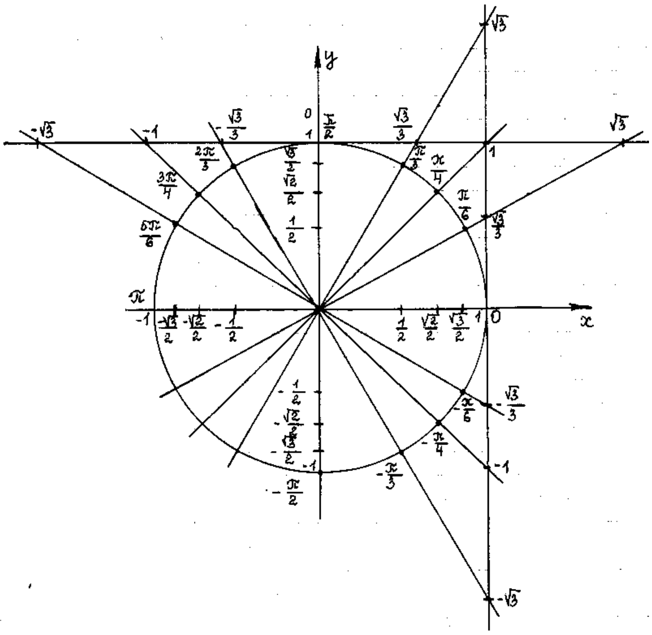
$\mathrm{arctg}(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = -\frac{\pi}{6}$ $\mathrm{arcctg}(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$



$\arcsin 0 = 0$ $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ $\mathrm{arctg}\, 0 = 0$

$\mathrm{arcctg}\, 0 =$ не существует

Тренировку по нахождению значений арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса можно провести, используя следующую таблицу.



Тренажёр для определения значений арккосинуса, арксинуса, арктангенса и арккотангенса			
1	2	3	4
arcsin 0	$\arcsin\frac{1}{2}$	$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$	*arcsin 1*
arccos 1	$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\arccos\frac{1}{2}$	*arcos 0*
arctg 0	$arctg\,\frac{1}{\sqrt{3}}$	*arctg 1*	$arctg\sqrt{3}$
$arcctg\sqrt{3}$	*arcctg 1*	$arcctg\,\frac{\sqrt{3}}{3}$	*arcctg 0*
$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\arcsin(-1)$	*arccos (-1)*
$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$	$arctg\left(-\sqrt{3}\right)$	*arctg (-1)*
$arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$arcctg\left(-\sqrt{3}\right)$	*arcctg (- 1)*	$arcctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Для успешного решения тригонометрических уравнений необходимо знать основные формулы.

Основные формулы тригонометрии

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

При решении тригонометрических уравнений (для упрощения тригонометрических выражений) иногда приходится использовать формулы приведения.


ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

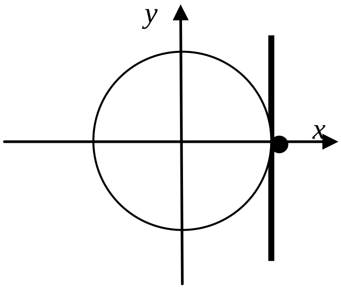
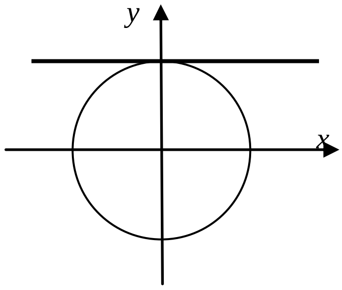
β	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos\beta$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\,\beta$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\,\beta$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$

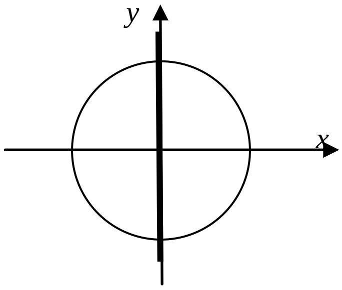
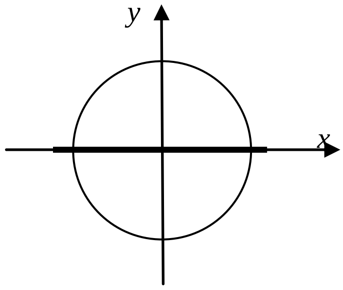
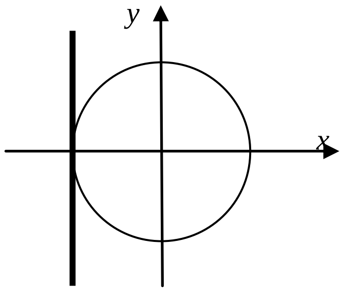
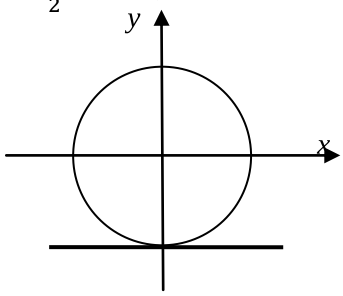
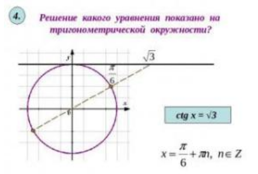
Тренировку можно произвести с помощью следующей таблицы.

Упростить	Вычислить	Упростить	Вычислить
$tg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$	$sin\ 240^0$	$tg\ (\ 90^0 + \alpha\ )$	$cos\ (\ -\ 585^0\ )$
$sin\ (\ 90^0 + \alpha\ )$	$cos\ 240^0$	$ctg\ (\ 360^0 + \alpha\ )$	$tg\ 1395^0$
$cos\ (\ \pi - \alpha\ )$	$sin\ 225^0$	$sin\ (\ 2\pi + \alpha\ )$	$ctg\ (\ -\ 630^0\ )$
$ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$	$cos\ (\ -\ 150^0)$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$	$tg\ 315^0$
$sin\ (\ 180^0 - \alpha\ )$	$tg\ (\ -\ 210^0\ )$	$cos\ (\ \pi + \alpha\ )$	$cos\ 495^0$
$cos\ (\ 90^0\ -\ \alpha\ )$	$sin\ 330^0$	$cos\ (\ 270^0 + \alpha\ )$	$cos\ 765^0$
$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$	$cos\ (\ -\ 485^0\ )$	$tg\ (\ 90^0 - \alpha\ )$	$sin\ (\ -\ 810^0\ )$
$tg\ (\ 90^0 + \alpha\ )$	$cos\ (\ -\ 135^0\ )$	$ctg\ (\ 180^0 + \alpha\ )$	$cos\ (\ -\ 900^0\ )$

II. Решение простейших тригонометрических уравнений.

Для удобства запоминания формул можно использовать следующую таблицу.

Решение простейших тригонометрических уравнений			
cos*x*=*a*	**sin*x*=*a***	**tg*x*=*a***	**ctg*x*=*a***
Если $a \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$, то корней нет.	Если $a \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$, то корней нет.	$x = arctga + \pi n,\ n \in Z$	$x = arcctga + \pi n\ \ n \in Z$
Если $a \in [-1;1]$, то $x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$	Если $a \in [-1;1]$, то $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z$		
Частные случаи			
Если a=1, то cos$x$=1 $x = 2\pi n, n \in Z$ 	сли a=1, то sin$x$=1 $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$ 		

Если a=0, то cos$x$=0 $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$ 	Если a=0, то sin$x$=0 $x=\pi n, n\in Z$ 		
Если a=-1, то cos$x$=-1 $x=\pi+2\pi n, n\in Z$ 	Если a=-1, то sin$x$=-1 $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$ 		
			
Примеры решения уравнений			
 *или* $x=\pm arccos\frac{\sqrt{2}}{2}+2\pi n, n\epsilon Z$ $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\epsilon Z$	 *или* $x=(-1)^n arcsin\frac{1}{2}+\pi n, n\epsilon Z$ $x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n, n\epsilon Z$		

III. Методы решения тригонометрических уравнений.

Решение тригонометрического уравнения состоит из двух этапов: преобразование уравнения для получения его простейшего вида (см. выше) и решение полученного простейшего тригонометрического уравнения. Существует семь основных методов решения тригонометрических уравнений.

1.Приведение к квадратному уравнению.

$$2\cos^2(x+\pi/6)-3\cos(x+\pi/6)+1=0,$$

делаем замену: $\cos(x+\pi/6)=y$, тогда $2y^2-3y+1=0$,

находим корни: $y_1=1$, $y_2=1/2$, откуда следуют два случая:

1). $\cos(x+\pi/6)=1$, 2). $\cos(x+\pi/6)=1/2$,

$x+\pi/6=2\pi k$, $x+\pi/6=\pm\arccos(1/2)+2\pi n$,

$x_1=-\pi/6+2\pi k$; $x_2=\pm\pi/3-\pi/6+2\pi n$.

Ответ: $-\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\epsilon Z; =\mp\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\epsilon Z.$

2.Приведение к однородному уравнению.

Уравнение называется однородным относительно sin и cos, если все его члены одной и той же степени относительно sin и cos одного и того же угла. Чтобы решить однородное уравнение, надо:

а) перенести все его члены в левую часть;
б) вынести все общие множители за скобки;
в) приравнять все множители и скобки к нулю;
г) скобки, приравненные к нулю, дают однородное уравнение меньшей степени, которое следует разделить на cos (или sin) в старшей степени;
д) решить полученное алгебраическое уравнение относительно тангенса или котангенса.

$3\sin^2 x + 4\sin x\cdot\cos x + 5\cos^2 x = 2.$

$3\sin^2 x + 4\sin x\cdot\cos x + 5\cos^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x,$

$\sin^2 x + 4\sin x\cdot\cos x + 3\cos^2 x = 0$, разделим обе части уравнения на $\cos^2 x\neq 0$

$tg^2x+4tgx+3=0$, пусть $tgx=t$, тогда $t^2+4t+3=0$.

Корнями этого уравнения являются числа -1 и -3.

Если t=-1, то tgx=-1, x= $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\epsilon Z.$

Если t=-3, то tgx=-3, x= $x=arctg(-3)+\pi m, m\epsilon Z.$

Ответ: $-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\epsilon Z; arctg(-3)+\pi m, m\epsilon Z.$

3. Разложение на множители.

a) $sin2x\text{-}cosx=0$,

$2sinxcosx\text{-}cosx=0$,

$cosx(2sinx\text{-}1)=0$,

$cosx=0$ *или* $2sinx\text{-}1=0$

$x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\epsilon Z$ $sinx=\frac{1}{2}$

$x=(-1)^k arcsin\frac{1}{2}+\pi k, k\epsilon Z$

$x=(-1)^k \cdot\frac{\pi}{6}+\pi k, k\epsilon Z$

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi n, n\epsilon Z$; $(-1)^k \cdot\frac{\pi}{6}+\pi k, k\epsilon Z$.

b) $sinx+cosx=sinxcosx+1$,

$sinx+cosx\text{-}sinxcosx\text{-}1=0$,

$sinx(1\text{-} cosx)+(cosx\text{-}1)=0$,

$(cosx\text{-}1)(sinx\text{-}1)=0$

$cosx\text{-}1=0$ *или* $sinx\text{-}1=0$

$cosx=1$ $sinx=1$

$x=2\pi n, n\epsilon Z$ $x=\frac{\pi}{2}+\pi m, m\epsilon Z$

Ответ: $2\pi n, n\epsilon Z$; $\frac{\pi}{2}+\pi m, m\epsilon Z$.

4. Введение вспомогательного угла.

$sinx+\sqrt{3}cosx=2$ разделим обе части уравнения на 2, получим

$\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=1$ так как $cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ и $sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$sinx\ cos\frac{\pi}{3}+cosx\ sin\frac{\pi}{3}=1$ воспользуемся формулой $sinx\ cosy+cosx\ siny=sin(x+y)$

$sin(x+\frac{\pi}{3})=1$, $x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2\pi m, m\epsilon Z$, $x=-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}+2\pi m$, $x=\frac{\pi}{6}+2\pi m, m\epsilon Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{6}+2\pi m, m\epsilon Z.$

IV. Отбор корней тригонометрического уравнения.

При выполнении задания С-1 необходимо найти те корни уравнения, которые принадлежат заданному промежутку. Это можно сделать с помощью перебора или решения неравенства.

1.Решить уравнение: $2{,}5\sin 2x = 7\cos^2 x - 1$,
Найти все корни уравнения, принадлежащие отрезку $x\in\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$.
В данном уравнении отбор корней проведем перебором.

Для решения уравнения воспользуемся основным тригонометрическим формулой двойного угла для синуса и основным тригонометрическим тождеством. Получим уравнение

$5\sin x\cos x = 7\cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x$, т.е. $\sin^2 x - 6\cos^2 x + 5\sin x\cos x = 0$

Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$. Получим $tg^2 x + 5tgx - 6 = 0$.

Пусть $tgx = t$, тогда $t^2 + 5t - 6 = 0$, $t = 1$ или $t = -6$.

$tgx = 1$ или $tgx = -6$;

$x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\epsilon Z$ или $x=arctg(-6)+\pi m, m\epsilon Z.$

Проведём отбор корней, принадлежащих отрезку $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$.
Если n=0, то $x=\frac{\pi}{4}$. Этот корень принадлежит рассматриваемому промежутку.
Если n=1, то $x=\frac{5\pi}{4}$. Этот корень тоже принадлежит рассматриваемому промежутку.
Если n=2, то $x=\frac{9\pi}{4}$. Ясно, что данный корень не принадлежит промежутку.
Если n = –1, то $x=-\frac{3\pi}{4}$ – не принадлежит промежутку .
Если k=0, то x= $arctg(-6)$, $x=-arctg6$– не принадлежит промежутку .
Если k=1, то x= $arctg(-6)+\pi$. Этот корень принадлежит рассматриваемому промежутку.
Аналогично предыдущему случаю убедимся, что при k = 0 и k = 2, а, следовательно, при k = –1, –2,…k = 3,4,… мы получим корни, не принадлежащие промежутку .

Ответ: а) $x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\epsilon Z$ или $x=arctg(-6)+\pi m, m\epsilon Z.$

б) $\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}$; $arctg(-6)+\pi.$

2. Решить уравнение sin^2x-2 $cos2x$=2 и указать корни, принадлежащие промежутку $[\pi; 2\pi]$.

Используя формулу двойного угла косинуса и основное тригонометрическое тождеств. Получим уравнение $sin^2x=1$.

Тогда $sinx=1$ или $sinx=-1$.

$x=\frac{\pi}{2}+2\pi m, m\epsilon Z$ $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\epsilon Z$

Проведём отбор корней, принадлежащих отрезку $[\pi; 2\pi]$.

Составим и решим неравенства:

$\pi \le \frac{\pi}{2}+2\pi m \le 2\pi$
$1 \le \frac{1}{2}+2m \le 2$
$1 \le \frac{1}{2}+2m \le 2$
$\frac{1}{2} \le 2m \le \frac{3}{2}$
$\frac{1}{4} \le m \le \frac{3}{4}$ целых значений m удовлетворяющих неравенству нет.
$\pi \le -\frac{\pi}{2}+2\pi n \le 2\pi$
$1 \le -\frac{1}{2}+2n \le 2$
$\frac{3}{2} \le 2n \le \frac{5}{2}$
$\frac{3}{4} \le n \le \frac{5}{4}$ n=1 удовлетворяет неравенству.
Если n=1, то $x=\frac{3\pi}{2}$
Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi k, k\epsilon Z$ б) $\frac{3\pi}{2}$.

3.Необходимо обратить внимание на уравнения, содержащие деление.
Решите уравнение: а) $\frac{sin2x}{\cos(\pi-x)}=\sqrt{2}$. б) Найдите все корни этого уравнения принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

а) $\frac{sin2x}{\cos(\pi-x)}=\sqrt{2}$, $\frac{sin2x}{\cos x}=-\sqrt{2}$,

$$\begin{cases} sin2x+\sqrt{2}\cos x=0, \\ \cos x \ne 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ sinx = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \end{array}\right. \\ \cos x \ne 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\epsilon Z, \\ x=(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{4}+\pi k, \end{array}\right. \\ \cos x \ne 0; \end{cases} \quad x=(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{4}+\pi k.\ \text{k}\in Z$$

б) Если k=0, то $x=-\frac{\pi}{4}$. Данный корень не принадлежит промежутку.

Если k=-1, то $x=\frac{\pi}{4}-\pi=-\frac{3\pi}{4}$. Данный корень не принадлежит промежутку.

Если k=-2, то $x=-\frac{\pi}{4}-2\pi=-\frac{9\pi}{4}$. Данный корень принадлежит промежутку.

Если k=-3, то $x=\frac{\pi}{4}-3\pi=-\frac{11\pi}{4}$. Данный корень принадлежит промежутку.

Ответ: а) $(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{4}+\pi k$, k$\in Z$. б) $-\frac{9\pi}{4}, -\frac{11\pi}{4}$.

Приложение 2

Дидактический материал к занятиям 13-16.

Методические рекомендации по проверке работ, примеры оценивания решений

1. Критерии проверки и оценка решений задания 13

Задание №13 – тригонометрическое, логарифмическое или показательное уравнение.

Выделение решения уравнения в отдельный пункт *а* прямо указывает участникам экзамена на необходимость полного решения предложенного уравнения: при отсутствии в тексте конкретной работы ответа на вопрос пункта *а* задание №13 оценивается 0 баллов.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задача 13 (демонстрационный вариант 2019 г).

а) Решите уравнение

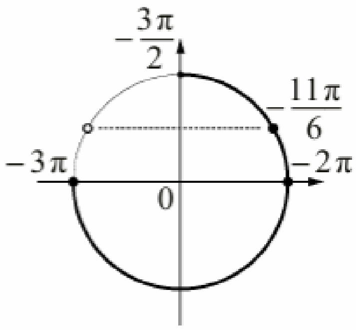
$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos 2x=\sqrt{3}\cos x+1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Запишем исходное уравнение в виде:
$\sin x+\sqrt{3}\cos x+1-2\sin^2 x=\sqrt{3}\cos x+1$; $\sin x-2\sin^2 x=0$; $\sin x\cdot(2\sin x-1)=0$.

Значит, $\sin x=0$, откуда $x=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, или $\sin x=\frac{1}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.



Получим числа: -3π; -2π; $-\frac{11\pi}{6}$.

Ответ: а) πk, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$;

б) -3π; -2π; $-\frac{11\pi}{6}$.

Комментарий.
Множество корней может записано по-другому.
Отбор корней может быть произведен любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т.п.

Примеры оценивания решений задания 13

Пример 1.

а) Решите уравнение $\cos 2x + 2 = \sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: : а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in$ □ ; $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in$ □ ; б) $-\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$.

13) а) $\cos 2x + 2 = \sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

$1 - 2\sin^2 x + 2 = -\sqrt{3}\sin x$

$-2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x + 3 = 0$

Пусть $\sin x = t$, тогда

$-2t^2 + \sqrt{3}t + 3 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (\sqrt{3})^2 - 4\cdot(-2)\cdot 3 = 3 + 24 = 27$

$t = \frac{-\sqrt{3} \pm 3\sqrt{3}}{-4}$ $\quad t_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad t_2 = \sqrt{3}$

Значит, $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\sin x = \sqrt{3}$

1) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$

$x_2 = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

2) $\sin x = \sqrt{3}$ – нет решений, т.к. $-1 \le \sin x \le 1$, а $|\sqrt{3}| > 1$

б) Найдем корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

1) $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

$-3\pi \le -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \le -\frac{3\pi}{2}$

$-3 \le -\frac{1}{3} + 2k \le -\frac{3}{2}$

$-3 + \frac{1}{3} \le 2k \le -\frac{3}{2} + \frac{1}{3}$

$-\frac{8}{3} \le 2k \le -\frac{7}{6}$

$-\frac{16}{12} \le k \le -\frac{7}{12}$

$-\frac{16}{12} \le k \le -\frac{7}{12}$

$-1\frac{1}{3} \le k \le -\frac{7}{12}$, т.к. $k \in Z$, то $k = -1$

Если $k = -1$, то $x = -\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{\pi}{3} - \frac{6\pi}{3} = -\frac{6\pi + \pi}{3} = -\frac{7\pi}{3}$

2) $-3\pi \le \frac{4\pi}{3} + 2\pi n \le -\frac{3\pi}{2}$

$-3\pi - \frac{4\pi}{3} \le 2\pi n \le -\frac{3\pi}{2} - \frac{4\pi}{3}$

$-\frac{13\pi}{3} \le 2\pi n \le -\frac{17\pi}{6}$

$-\frac{13}{6} \le n \le -\frac{17}{12}$

$-\frac{26}{12} \le n \le -\frac{17}{12}$

$-2\frac{1}{6} \le n \le -\frac{17}{12} = -1\frac{5}{12}, n \in Z$

$n = -2$

Если $n = -2$, то $x = \frac{4\pi}{3} - 4\pi = -\frac{8\pi}{3}$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $\frac{4\pi}{3} + 2\pi n$; $k \in Z, n \in Z$

б) $-\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$

Комментарий.
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 2.

а) Решите уравнение $\cos 2x + 2 = \sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in$ □ ; $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in$ □ ; б) $-\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$.

1 3) а) $\cos 2x + 2 = \sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

$\cos 2x + 2 = \sqrt{3} \cdot (-\sin x)$

$1 - 2\sin^2 x + 2 = -\sqrt{3}\sin x$

$-2\sin^2 x + 3 + \sqrt{3}\sin x = 0$

Пусть $\sin x = y$

Тогда

$-2y^2 + 3 + \sqrt{3}\,y = 0$

$D = \sqrt{3 - 4\cdot 3\cdot(-2)} = \sqrt{27} > 0$ 2 корня

$y_1 = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{27}}{-4} = \frac{-\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{-4} = \frac{2\sqrt{3}}{-4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$y_2 = \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{27}}{-4} = \frac{-4\sqrt{3}}{-4} = \sqrt{3}$

Обратно $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\sin x = \sqrt{3}$

$x = (-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n \;\; n \in Z$ $\quad$ нет решен $\sin x \in [-$

б)

При $n = 0$

$x = -\frac{\pi}{3} \notin \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

При $n = -1$

$x = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3} \notin \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

При $n = -2$

$x = -\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{7\pi}{3} \in \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

При $n = -3$

$x = \frac{\pi}{3} - 3\pi = -\frac{8\pi}{3} \in \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

Ответ: а) $x = (-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n \;\; n \in Z$

б) $-\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$

***Комментарий*.**

Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*, но отбор корней нельзя назвать обоснованным, так как перебор остановлен на корне, принадлежащем отрезку. Типичный пример выставления 1 балла.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 3.

а) Решите уравнение $\cos 2x + 2 = \sqrt{3}\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: : а) $-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in$ □ ; $-\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in$ □ ; б) $-\dfrac{8\pi}{3}$; $-\dfrac{7\pi}{3}$.

№3 а) $\cos 2x + 2 = \sqrt{3}\cos(\frac{3\pi}{2} - x)$

$\cos^2 x - \sin^2 x + 2 = \sqrt{3} \cdot \sin x$

$1 - \sin^2 x - \sin^2 x - \sqrt{3}\sin x + 2 = 0$

$-2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x + 3 = 0$

$2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x - 3 = 0$

замена $\sin x = t$, $t \in [-1; 1]$

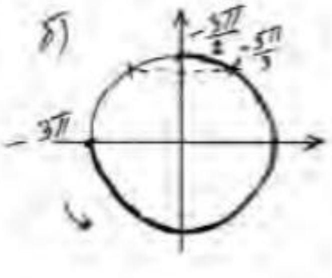
$2t^2 + \sqrt{3}t - 3 = 0$

$D = 3 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 3 + 24 = 27 = (3\sqrt{3})^2$

$t_1 = \frac{-\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $t_2 = \frac{-\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{4} = -\frac{4\sqrt{3}}{4} = -\sqrt{3}$

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin x = -\sqrt{3}$; $-\sqrt{3} \notin [-1; 1]$

$x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$

б) 

$[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}]$

Ответ а) $(-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$;

б) $-\frac{5\pi}{3}$

Комментарий.

Тригонометрическое уравнение решено неверно. Во второй строчке в правой части отсутствует знак минус – ошибка в формуле приведения. Пункт *а* не выполнен (не из-за вычислительной ошибки).

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 4.

а) Решите уравнение $9\cdot 81^{\cos x}-28\cdot 9^{\cos x}+3=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{3}+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) 3π; $\frac{11\pi}{3}$.

13. $9\cdot 81^{\cos x}-28\cdot 9^{\cos x}+3=0$

$9\cdot(9^{\cos x})^2-28\cdot 9^{\cos x}+3=0$

$9^{\cos x}=t$, тогда

$9t^2-28t+3=0$

$D=784-108=676$

$t=\frac{28\pm 26}{18}$ $\quad t_1=\frac{1}{9}$ $\quad t_2=3$

$9^{\cos x}=\frac{1}{9}$ $\qquad 9^{\cos x}=3$

$9^{\cos x}=9^{-1}$ $\qquad 3^{2\cos x}=3^{1}$

$\cos x=-1$ $\qquad 2\cos x=1$ $\qquad \cos x=\frac{1}{2}$

$x_1=\pi+2\pi n$, $n\in Z$ $\qquad x_2=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$, объединяя

x_1 и x_2 получаем $x=\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3}$, $k\in Z$

б) $\frac{11\pi}{3}$; 3π; 4π $\in\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$

Ответ а) $\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3}$, $k\in Z$, б) 3π, $\frac{11\pi}{3}$; 4π

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*, но при отборе корней отсутствует решение и ошибочно указано число, которое не является корнем тригонометрического уравнения. Типичный пример выполнения задания на 1 балл.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 5.

а) Решите уравнение $9\cdot 81^{\cos x}-28\cdot 9^{\cos x}+3=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

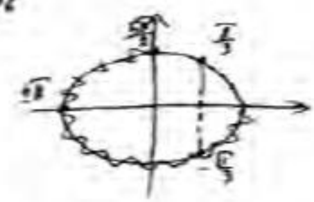
Ответ: а) $\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{3}+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) 3π; $\frac{11\pi}{3}$.

13. а) $9\cdot 81^{\cos x}-28\cdot 9^{\cos x}+3=0$

$9\cdot 3^{4\cos x}-28\cdot 3^{2\cos x}+3=0$

Пусть $3^{2\cos x}=t$, то $9\cdot t^2-28\cdot t+3=0$

$D=784-4\cdot 9\cdot 3=676$



$t_1=\frac{28-26}{18}=\frac{1}{9}$

$t_2=\frac{28+26}{18}=3$

$3^{2\cos x}=\frac{1}{9}$

$3^{2\cos x}=3^{-2}$

$\cos x=-1$

$x=\pi+2\pi k, k\in Z$

$3^{2\cos x}=3^{1}$

$\cos x=\frac{1}{2}$

$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z.$

б) $[\frac{5\pi}{2};4\pi]$

$x=\frac{\pi}{3}+2\pi k$, не подходит.

1. $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$

$2{,}5\pi<-\frac{\pi}{3}+2\pi k<4\pi \quad |:\pi$

$2{,}5<-\frac{1}{3}+2k<4$

$2\frac{3}{6}+\frac{2}{6}<2k<4\frac{1}{3} \quad |:2$

$1\frac{5}{6}<k<2\frac{1}{3}$

$\Rightarrow k=2 \qquad x=-\frac{\pi}{3}+4\pi=\frac{11\pi}{3}$

2. $x=\pi+2\pi k, k\in Z.$

$2{,}5\pi<\pi+2\pi k<4\pi \quad |:\pi\ -1$

$2{,}5-1<2k<4-1 \quad |:2.$

$0{,}75<k<1{,}5$

$\Rightarrow k=1.$

$x=\pi+2\pi=3\pi.$

3. $x=-\pi+2\pi k$

$2{,}5\pi<-\pi+2\pi k<4\pi \quad |:\pi$

$1{,}75<k<2{,}5$

$\Rightarrow k=2.$

$x=-\pi+4\pi=3\pi.$

Ответ: $x=3\pi$, $x=\frac{11\pi}{3}$

Комментарий.

В записи корней первого простейшего уравнения содержится дублирующая запись корней, но ошибки в этом нет. При отборе корней допущены ошибки при делении $2\frac{5}{6}$ и $4\frac{1}{3}$ на 2.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 6.

а) Решите уравнение $9\cdot 81^{\cos x} - 28\cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{3} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) 3π; $\frac{11\pi}{3}$.

13. а) $9\cdot 81^{\cos x} - 28\cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$

$9\cdot (9^2)^{\cos x} - 28\cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$

Пусть $9^{\cos x} = t$, тогда:

$9t^2 - 28t + 3 = 0$

$D = (-28)^2 - 4\cdot 9\cdot 3 = 784 - 108 = 676$

$t_1 = \frac{28-26}{2\cdot 9} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$; $t_2 = \frac{28+26}{2\cdot 9} = \frac{54}{18} = 3$

Вернемся к замене: $9^{\cos x} = \frac{1}{9}$ или $9^{\cos x} = 3$

$\cos x = -1$

$x = \pi + \pi d, d \in Z$

$(3)^{2\cos x} = 3^1$

$2\cos x = 1$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

б) $[\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$

$\frac{5\pi}{2} \le \frac{\pi}{3} + 2\pi n \le 4\pi$;

$\frac{5}{2} \le \frac{1}{3} + 2n \le 4, n \in Z$

$2\frac{1}{6} \le 2n \le 3\frac{2}{3}, n \in Z$

$1\frac{1}{12} \le n \le 1\frac{5}{6}, n \in Z$

n- нет чисел

$\frac{5\pi}{2} \le -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \le 4\pi$

$\frac{5}{2} \le -\frac{1}{3} + 2k \le 4, k \in Z$

$2\frac{5}{6} \le 2k \le 4\frac{1}{3}, k \in Z$

$1\frac{5}{12} \le k \le 2\frac{1}{6}, k \in Z$

$k = 2$

$x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2\cdot 2\pi = \frac{11\pi}{3}$

$\frac{5\pi}{2} \le \pi + \pi d \le 4\pi$

$\frac{5}{2} \le 1 + d \le 4, d \in Z$

$1\frac{1}{2} \le d \le 3, d \in Z$

$d = 2, 3$

$x_2 = \pi + 2\pi = 3\pi$

$x_3 = \pi + 4\pi = 5\pi$

Ответ: а) $x = \pi + \pi d, d \in Z$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$;

б) $x_1 = \frac{11\pi}{3}$; $x_2 = 3\pi$; $x_3 = 5\pi$

Комментарий.

Тригонометрическое уравнение $\cos x = -1$ решено неверно.

Оценка эксперта: 0 баллов.

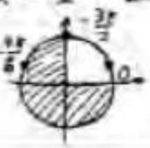
Пример 7.

а) Решите уравнение $2\log_4^2(4\sin x) - 5\log_4(4\sin x) + 2 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{6}$.

а) $2\log_4^2(4\sin x) - 5\log_4(4\sin x) + 2 = 0$, $\log_4(4\sin x) = t$,
$2t^2 - 5t + 2 = 0$; $D = 25 - 16 = 9 = 3^2$. $t_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$, $t_2 = \frac{5+3}{4} = 1$,
$\log_4(4\sin x) = t_1 = \frac{1}{2}$, $\log_4(4\sin x) = \log_4 2$, $4\sin x = 2$; $\sin x = \frac{1}{2}$,
$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$,
$\log_4(4\sin x) = t_2 = 1$; $\log_4(4\sin x) = \log_4 4$; $4\sin x = 4$; $\sin x = 1$,
$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$ Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$

б) 

Ответ $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{7\pi}{6}$

***Комментарий*.**
Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки при вычислении t_2, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 8.

а) Решите уравнение $2\log_4^2(4\sin x) - 5\log_4(4\sin x) + 2 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{6}$.

13) а) ОДЗ: $4\sin x > 0$
$\sin x > 0$

Для таких x решим методом интервалов

Пусть $\log_4(4\sin x) = t$; $t \geq 0$

$2t^2 - 5t + 2 = 0$

$D = 25 - 4\cdot 2\cdot 2$

$D = 25 - 16$

$D = 9$

$t_1 = \frac{5+3}{2}$ $t_1 = 4$

$t_2 = \frac{5-3}{2}$ $t_2 = 1$

Обратная замена

$\log_4(4\sin x) = 1$ или $\log_4(4\sin x) = 4$

$4\sin x = 4$ $4\sin x = 256$

$\sin x = 1$ $\sin x = 64$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$ нет решений

б) Произведём отбор на единичной окружности

$-\frac{3\pi}{2}$

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$ б) $-\frac{3\pi}{2}$

Комментарий.

Получены неверные ответы не из-за вычислительной ошибки при вычислении корней квадратного уравнения.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 9.

а) Решите уравнение $2\log_4^2(4\sin x)-5\log_4(4\sin x)+2=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\Box$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\Box$; б) $-\frac{7\pi}{6}$.

а) $2\log_4^2(4\sin x)-5\log_4(4\sin x)+2=0$

Пусть $\log_4(4\sin x)=t$, тогда:

$2t^2-5t+2=0$

$D=25-16=9=(3)^2$

$t_1=\frac{5+3}{4}=2$; $t_2=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2}$;

(1) $\log_4(4\sin x)=2$;

$4\sin x=16$;

$\sin x=4$ – таких x не существует, так как $\sin\in[-1;1]$;

(2) $\log_4(4\sin x)=\frac{1}{2}$;

$4\sin x=2$;

$\sin x=\frac{1}{2}$;

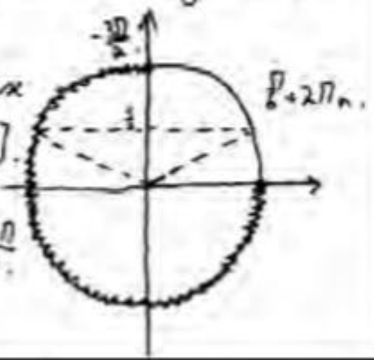
$x=\frac{П}{6}+2Пn$ и $x=\frac{5П}{6}+2Пn$.

б) $\left[-\frac{3П}{2};0\right]$

Рассмотрим на единичной окружности данный отрезок и корни:

корень $\frac{П}{6}+2Пn$ ни при каких условиях не будет лежать на $\left[-\frac{3П}{2};0\right]$.

корень $\frac{5П}{6}+2Пn$ попадет на этот отрезок в точке $\frac{5П}{6}-2П=-\frac{7П}{6}$.



Ответ: а) $\frac{П}{6}+2Пn$; $\frac{5П}{6}+2Пn$; б) $-\frac{7П}{6}$.

Комментарий.

Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*, но отбор корней с помощью тригонометрической окружности в этом решении нельзя считать обоснованным. Типичный пример выполнения задания на 1 балл.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 10.

а) Решите уравнение $2\log_4^2(4\sin x) - 5\log_4(4\sin x) + 2 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in$ □ ; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in$ □ ; б) $-\frac{7\pi}{6}$.

№ 13 $2\log_4^2(4\sin x) - 5\log_4(4\sin x) + 2 = 0$ $\log_4(4\sin x) = t$

ОДЗ
$4\sin x \neq 0$
$\sin x \neq 0$
$x \neq \pi n$ $n \in Z$

$2t^2 - 5t + 2 = 0$ $D = 25 - 16 = 9$

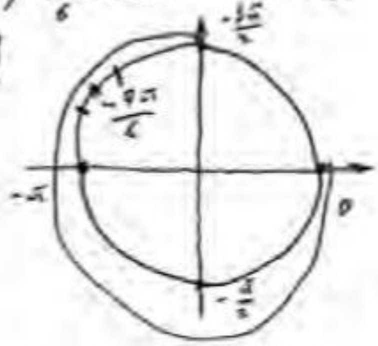
$t_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$

$t_2 = \frac{5+3}{4} = 2$

$\left[\begin{array}{l}\log_4(4\sin x) = 2\\ \log_4(4\sin x) = \frac{1}{2}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}8 = 4\sin x\\ 2 = 4\sin x\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\sin x = 2\\ \sin x = \frac{1}{2}\end{array}\right.$ не подходит т.к. $-1 \leq \sin x \leq 1$

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ $n \in Z$

$\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$



Ответ: а) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$
б) же $-\frac{7\pi}{6}$ $n \in Z$

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; б) $-\frac{7\pi}{6}$

Комментарий.

При решении простейшего логарифмического уравнения допущена ошибка, которая не является вычислительной, кроме того, при нахождении ОДЗ допущена ошибка, которая никак не может быть отнесена к вычислительной. Любая из этих ошибок уже не позволяет выставить положительный балл. Типичный пример выставления 0 баллов.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Приложение 3

Диагностическая карта проведения аттестации

№	Фамилия, имя учащегося												
			ПОКАЗАТЕЛИ										
			Предметные результаты:			Метапредметные результаты				Личностные результаты			Индивидуальный уровень учащегося
			КРИТЕРИИ			КРИТЕРИИ				КРИТЕРИИ			
		Знания о простейших тригонометрических уравнениях	Решение тригонометрических уравнений различными способами	Применение способов отбора корней тригонометрического уравнения	Оценивание работы участников экзамена с помощью критериев	Умение активно работать в паре, группе	Умение самостоятельно выбирать и применять способ решения уравнения	Умение адаптироваться в коллективе (толерантность, умение сотрудничать, эмоциональная активность, умение вести себя в коллективе)	Владение эффективными способами организации свободного времени	Умение слушать, работать в коллективе	Культура поведения	Самостоятельность	
1.													
2.													
3.													
4.													

Оценка знаний:	**Оценка умений:**	**Оценка личностных качеств:**
Высокий - знания сформированы и являются устойчивыми; Средний - знания сформированы, но не являются устойчивыми; Допустимый - знания сформированы частично.	Высокий – умение проявляется во всех видах деятельности; Средний - умение проявляется не во всех видах деятельности; Допустимый - умение проявляется частично.	Высокий – личностные качества сформированы; Средний – личностные качества сформированы частично.

Приложение 4

Календарно-тематический план кружка
«Избранные вопросы тригонометрии»

Класс: 11
Количество занятий: 1 час в неделю (17 часов в год)

№	Наименование раздела, тема занятия.	Количество часов	План	Факт	Корректировка
1	2	3	4	5	6
1	Тригонометрические формулы. Тригонометрический круг. Входящий контроль	1			
2	Упрощение тригонометрических выражений. Формулы приведения	1			
3	Простейшие тригонометрические уравнения. Решение простейших тригонометрических уравнений. Расположение корней на тригонометрическом круге	1			
4	Решение тригонометрических уравнений путем сведения к простейшим	1			
5	Тригонометрические уравнения, сводящиеся заменой переменной к квадратному уравнению.	1			
6	Решение уравнений с помощью вспомогательного угла.	1			
7	Уравнения вида:	1			

	f(sinx+cosx;sin2x)=0, f(sinx - cosx;sin2x)=0.				
8	Решение тригонометрических уравнений различными способами. Контрольное задание	1			
9	Арифметический способ отбора корней в тригонометрических уравнениях	1			
10	Алгебраический способ отбора корней в тригонометрических уравнениях	1			
11	Геометрический способ отбора корней в тригонометрических уравнениях	1			
12	Функционально-графический способ отбора корней в тригонометрических уравнениях	1			
13	Знакомство с критериями проверки решения тригонометрического уравнения	1			
14	Проверка решения и отбора корней тригонометрических уравнений.	1			
15	Проверка решения и отбора корней тригонометрических уравнений.	1			
16	Проверка решения и отбора корней тригонометрических уравнений.	1			
17	Итоговое практическое задание. Работа над ошибками	1			

Приложение 5

Входящий контроль	
1 вариант	2 вариант
1. Вычислите: arcsin ($\frac{\sqrt{3}}{2}$) + 2arctg(-1) **1)** $\frac{\pi}{6}$; **2)** $-\frac{\pi}{6}$; **3)** $\frac{5\pi}{6}$; **4)** $-\pi$.	**1.** Вычислите: arcsin ($\frac{\sqrt{2}}{2}$) + 0,5arctg (-$\sqrt{3}$) **1)** $\frac{\pi}{12}$; **2)** $\frac{\pi}{2}$; **3)** $\frac{5\pi}{12}$; **4)** -$\frac{\pi}{12}$.
2. Вычислите: arcos ($-\frac{\sqrt{2}}{2}$) + 2arcctg($\sqrt{3}$) **1)** $\frac{7\pi}{12}$; **2)** $-\frac{5\pi}{12}$; **3)** $-\frac{\pi}{10}$; **4)** $\frac{5\pi}{12}$.	**2.** Вычислите: arcos ($-\frac{\sqrt{3}}{2}$) + arcctg ($\frac{1}{\sqrt{3}}$) **1)** $\frac{\pi}{6}$; **2)** $\frac{2\pi}{3}$; **3)** $\frac{7\pi}{6}$; **4)**- $\frac{\pi}{6}$.
3. Решите уравнение: sin x - $\frac{1}{2}$ =0 **1)** $(-1)^m(-\frac{\pi}{6})+\pi m, m \in Z$; **2)** $\pi m, m \in Z$; **3)** $(-1)^m\frac{\pi}{3}+\pi m, m \in Z$; **4)** $(-1)^m\frac{\pi}{6}+\pi m, m \in Z$.	**3.** Решите уравнение: sin x + $\frac{\sqrt{3}}{2}$ =0 **1)** $(-1)^m\frac{\pi}{3}+\pi m, m \in Z$; **2)** $(-1)^m\frac{\pi}{6}+\pi m, m \in Z$; **3)** $(-1)^m(-\frac{\pi}{3})+\pi m, m \in Z$; **4)** $\pi m, m \in Z$.
4. Решите уравнение: cos 2x=1 **1)** $2\pi m, m \in Z$; **2)** $\frac{\pi}{4}+2\pi m, m \in Z$; **3)** $\pi m, m \in Z$; **4)** $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi m, m \in Z$.	**4.** Решите уравнение: ctg (x+$\frac{\pi}{4}$)=$\sqrt{3}$ **1)** $\frac{\pi}{12}+\pi m, m \in Z$; **2)** $\frac{\pi}{6}+\pi m, m \in Z$; **3)** $\frac{\pi}{2}+\pi m, m \in Z$; **4)** $-\frac{\pi}{12}+\pi m, m \in Z$.
5. Укажите уравнение, которому соответствует решение: $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi m, m \in Z$: **1)** tg x = 1; **2)** cos x = 0; **3)** sin x = -1; **4)** ctg x = $\frac{\sqrt{3}}{3}$.	**5.** Укажите уравнение, которому соответствует решение: $x=\frac{\pi}{2}+\pi m, m \in Z$: **1)** ctg x = -1; **2)** cos x = 0; **3)** cos x = -1; **4)** tg x = 1.

Приложение 6

СПЕЦИФИКАЦИЯ
контрольно-измерительных материалов

Вид работы:	Итоговое практическое задание
Учебный предмет:	Математика (профильный уровень)
Класс:	11

1. Назначение работы
Определение соответствия результатов освоения учащимися дополнительной общеобразовательной программы – дополнительной общеразвивающей программы Для указанной цели используются контрольные измерительные материалы (КИМ), представляющие собой комплекс заданий .
2. Условия проведения работы, включая дополнительные материалы и оборудование
Дополнительные материалы:
- линейка
3. Время выполнения работы
На выполнение всей работы отводится 45 минут.
5. Содержание и структура работы
Работа состоит из 2 заданий. Работа содержит задания повышенного уровня сложности.
Содержание работы охватывает учебный материал по алгебре 10 и 11 классов.

Распределение заданий работы по содержательным блокам (темам) учебного предмета представлено в таблице 1

Таблица 1.

№	Содержательные блоки	Количество заданий
1.	Решение тригонометрических уравнений	1
2.	Оценивание работы с помощью критериев	1
	Всего:	2

Перечень проверяемых умений представлен в таблице 2.

Таблица 2.

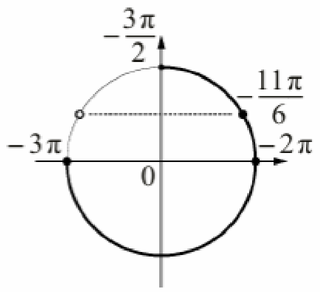
№	Проверяемые умения	Количество заданий
1.	Решение тригонометрических уравнений различными способами	1
2.	Уметь выполнять преобразования тригонометрических выражений	1
3.	Уметь решать тригонометрические уравнения, выбирая	1

	способ решения	
4.	Уметь решать простейшие тригонометрические уравнения	2
5.	Уметь находить частные решения тригонометрического уравнения	1
6.	Уметь строить и исследовать математические модели	1
7.	Уметь сравнивать с образцом	1

Контрольно-измерительные материалы

Таблица 3

№	Итоговое практическое задание	Максимальное количество баллов
1.	*а*) Решите уравнение: $$8\sin^2 x - 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 9 = 0$$ *б*) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.	2 б (количество баллов выставляется в соответствии с таблицей в пункте 2)
2.	Ознакомьтесь с критериями оценивания Содержание критерия — Баллы Обосновано получены верные ответы в обоих пунктах — 2 Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Подучен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения — 1 Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше — 0 Максимальный балл — 2	
3.	Ознакомьтесь с решением задания. а) Решите уравнение: $2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos 2x = 3\cos x + 1$ б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$. Решение. а) Запишем исходное уравнение в виде: $\sin x + \sqrt{3}\cos x + 1 - 2\sin^2 x = \sqrt{3}\cos x + 1$, $\sin x - 2\sin^2 x = 0$,	2б (Если оценка работы проведена верно-2 балла, частично верно-1 балл, неверно-0)

	sin$x$(2sin$x$-1)=0, Значит, sin$x$=0, откуда $x = \pi k, k \in Z$, или sin$x$=$\frac{1}{2}$, откуда $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$. б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$. Получим числа: $-3\pi;\ -2\pi;\ -\frac{11\pi}{6}$.  Ответ: а) $\pi k, k \in Z$; $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$. б) $-3\pi;\ -2\pi;\ -\frac{11\pi}{6}$ Комментарий. Множество корней может записано по-другому. Отбор корней может быть произведён любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т.п. Проверьте правильность выполнения задания, согласно критериям поставьте баллы.	

	$2\sin(x+\frac{\pi}{3})+\cos 2x=\sqrt{3}\cos x+1$ $\quad x\in[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}]$ а) $2\sin(x+\frac{\pi}{3})+\cos 2x=\sqrt{3}\cos x+1$ $2\sin x\cos\frac{\pi}{3}+2\cos x\sin\frac{\pi}{3}+\cos 2x=\sqrt{3}\cos x+1$ $2\sin x\cdot\frac{1}{2}+2\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos 2x=\sqrt{3}\cos x+1$ $\sin x+\sqrt{3}\cos x+1-2\sin^2 x-\sqrt{3}\cos x-1=0$ $\sin x-2\sin^2 x=0$ $-\sin x(2\sin x-1)=0$ $\sin x=0$ или $2\sin x-1=0$ $x=\pi n, n\in Z$ $\quad \sin x=\frac{1}{2}$ $x=(-1)^k\cdot\arcsin\frac{1}{2}+\pi k, k\in Z$ $x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$ б) Если $n=-2$, то $x=-2\pi$ Если $n=-3$, то $x=-3\pi$ Если $k=-2$, то $x=\frac{\pi}{6}-2\pi=-\frac{11\pi}{6}$ Ответ: а) $\pi n, n\in Z$; $(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$ б) $-2\pi, -3\pi; -\frac{11\pi}{6}$	
4.	Общее количество баллов за работу	4

Шкала оценивания выполнения итогового практического задания

№ п/п	Количество набранных баллов	Уровень усвоения программы
1.	4 балла	Высокий - знания и умения сформированы и являются устойчивыми
2.	2-3 балла	Средний - знания и умения сформированы, но не являются устойчивыми;
3.	1 балл	Низкий – знания сформированы частично, умение проявляется частично.

Приложение 7

ПАСПОРТ КАБИНЕТА (307)

ПЕРЕЧЕНЬ средств обучения и воспитания		**Наличие**	**Год планируемого приобретения**
1		**2**	**3**
Специализированная мебель и системы хранения			
2.10.1.	Доска классная	Имеется	
2.10.2.	Стол учителя	Имеется	
2.10.3.	Стол учителя приставной	Не имеется	2020
2.10.4.	Кресло для учителя	Имеется	
2.10.5.	Стол ученический двухместный регулируемый по высоте	Имеется	
2.10.6.	Стул ученический с регулируемой высотой	Имеется	
2.10.7.	Шкаф для хранения учебных пособий	Имеется	
2.10.8.	Шкаф для хранения с выдвигающимися демонстрационными полками	Не имеется	
2.10.9.	Система хранения таблиц и плакатов	Не имеется	В кабинете имеется встроенный шкаф с нишами, который используется для хранения материалов
2.10.10.	Тумба для таблиц под доску	Не имеется	
2.10.11.	Информационно-тематический стенд	Имеется	
Технические средства обучения (рабочее место учителя)			
2.10.12.	Интерактивный программно-аппаратный комплекс	Не имеется	
2.10.13.	Компьютер учителя, лицензионное программное обеспечение	Имеется	
2.10.14.	Планшетный компьютер учителя	Не имеется	
2.10.15.	Многофункциональное устройство	Имеется	
2.10.16.	Документ-камера	Не имеется	Используются возможности кабинета 201 (конференц-зал)
2.10.17.	Акустическая система для	Имеется	

	аудитории		
2.10.18.	Сетевой фильтр	Имеется	
Демонстрационные учебно-наглядные пособия			
2.10.19.	Портреты учёных	Имеется	В электронном виде
2.10.20.	Таблицы и картины демонстрационные	Имеется	В электронном виде.
2.10.21.	Справочники	Имеется	Ежегодное пополнение справочной литературой
2.10.22.	Таблицы раздаточные	Имеется	Пополнение и систематизация тематических дидактических папок
Электронные средства обучения (CD, DVD, видеофильмы, интерактивные плакаты, лицензионное программное обеспечение)			
2.10.23.	Электронные средства обучения (CD, DVD, видеофильмы, интерактивные плакаты, лицензионное программное обеспечение) для кабинета математики	Имеется	

На 2019/2020 учебный год запланировано комплектование набора демонстрационных таблиц по темам школьного курса, для оформления стенда в кабинете с использованием материала из сети интернет (печать на цветном принтере).

Для реализации основной образовательной программы основного общего и среднего общего образования создана электронная база фонда оценочных средств. В течение 2019/2020 года запланировано дополнение базы новыми материалами.

№	Наименование издания	Виды контроля	Вид источника (брошюра/электронный вариант)
1	2	3	4
10 – 11 классы			
1.	А.П.Ершова, В.В.Голобородько, А.С. Ершова. Самостоятельные и контрольные работы по алгебре и геометрии для 10 класса. М.: ИЛЕКСА, 2013	Пособие содержит самостоятельные и контрольные работы по всем важнейшим курсам алгебры и геометрии 9 класса. Работы состоят из 6	Брошюра Электронный

		вариантов трех уровней сложности	
2.	А.П.Ершова, В.В.Голобородько, А.С. Ершова, Самостоятельные и контрольные работы по алгебре и геометрии для 11 класса. М.: ИЛЕКСА, 2013	Пособие содержит самостоятельные и контрольные работы по всем важнейшим курсам алгебры и геометрии 9 класса. Работы состоят из 6 вариантов трех уровней сложности	Брошюра Электронный
3.	М.И. Шабунин, Алгебра и начала математического анализа. Дидактические материалы для 10 класса, М.: Просвещение, 2017	Дидактические материалы составлены к каждой теме курса алгебры и математического анализа в 2 вариантах равного уровня сложности	Электронный
4.	М.И. Шабунин, Алгебра и начала математического анализа. Дидактические материалы для 10 класса, М.: Просвещение, 2013	Дидактические материалы составлены к каждой теме курса алгебры и математического анализа в 2 вариантах равного уровня сложности	Электронный
5.	Методические рекомендации для председателей и членов предметных комиссий субъектов Российской Федерации по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2019 года. Математика.	В методических материалах дается краткое описание структуры контрольных измерительных материалов 2019 г. по математике, характеризуются типы заданий с развернутым ответом, используемые в КИМ ЕГЭ по	Электронный

		математике, и критерии оценки выполнения заданий с развернутым ответом, приводятся примеры оценивания выполнения заданий и даются комментарии, объясняющие выставленную оценку.	

Приложение 8

КРАТКИЙ АНАЛИТИЧЕСКИЙ КОММЕНТАРИЙ

В настоящем аналитическом комментарии обосновывается эффективность и результативность организации деятельности учащихся в рамках освоения дополнительной общеобразовательной – дополнительной общеразвивающей программы «Избранные вопросы тригонометрии».

Ежегодно в составе кружка, реализуемого по Программе, входит от 10 до 18 учащихся 11 классов. Это учащиеся, которые свей целью, имеют расширение базовых знаний по математике. На изучение учебного предмета «Математика» в МБОУ «Гимназия № 2» согласно учебному плану в 11 классе (ФкГОС СОО) отводится 4 часа в неделю. Традиционно выделяется группа старшеклассников, которые стремятся повысить уровень собственного кругозора, а также расширить знания по математике. Кроме этого, эти учащиеся осознают необходимость повышения уровня функциональной грамотности, исследовательских компетенций.

На современном этапе развития образования актуальным является вопрос интеграции общего и дополнительного образования. Часть выпускников, занимающихся по Программе, сдают государственную итоговую аттестацию по математике в формате единого государственного экзамена. Традиционно средний балл держится на уровне 51 балла и выше, что превышает средние показатели по Республике Коми и Российской Федерации, при этом среди выпускников есть учащиеся, которые относятся к категории высокобалльников.

Одним из заданий Единого государственного экзамена является решение тригонометрического уравнения. Задание состоит из непосредственного решения тригонометрического уравнения и нахождения частных решений этого уравнения. Задание экзамена оценивается в два балла, поэтому при успешном выполнении этого задания учащийся вносит вклад в общий балл экзаменационной работы. Поэтому в качестве показателя уровня обученности учащихся приведу данные ГИА по математике профильного уровня.

Средний балл учащихся на государственной (итоговой) аттестации по математике (профильныйуровень)

Год	Результаты участия в ГИА МБОУ «Гимназия №2»	Результаты в МОГО Инта	Результаты в РК	Результаты в РФ

	кол-во участников	наименьший балл	наибольший балл	средний тестовый балл			
2015	38	18	86	53.45	41	43,7	45,6
2016	27	23	84	53,52	44,4	45,1	46,3
2018	22	23	84	51,23	46,6	48,1	49,8
2019	13	23	76	55	54,2	55,6	56,5

Однако хочется отметить, что процент выполнения задания по решению тригонометрического уравнения низкий, данные выполнения задания учащимися МБОУ «Гимназия №2» приведу в таблице.

Год	Количество участников ЕГЭ по математике (профильный уровень)	Количество участников ЕГЭ по математике (профильный уровень), выполняющих задание	Процент выполнения задания
2018	22	6	27
2019	13	5	38