**1 способ (анализ).** . Так как (m-n):3, то оба слагаемых делятся на 9, а значит (m3-n3):9.

**2 способ (синтез).** (m-n):3, тогда m-n=3а и m=3a+n. Подставим, получим .

**3 способ.** Если (m-n):3, то m и n при делении на 3 дают одинаковые остатки, а значит, m=3a+r n=3b+r.  (Раскройте скобки и убедитесь сами).

**Обратная задача.**

№7.Доказать, что для любых целых m и n, что если (m3-n3):9, то (m-n):3.

Воспользуемся методом от противного. Пусть (m-n) не делится на 3, тогда (m-n) при делении на 3 даёт в остатке 1 или 2, то есть m-n=3k+r, где r=1 или r=2. Подставим в данное равенство (см. 1 способ):



По условию это выражение делится на 9, поэтому  но r=1 или r=2, получено противоречие, допущение неверно, т.е. (m-n):3.

**Обобщение.**

№8.Верно ли, что если (m-n):3, то (*ml-nl):*9 для любого *l* >1? Утверждение неверно, есть контрпример: m=5, n=2, *l*=2. 52-22=21 не :9.

**Изменение задачи.**

№9. Доказать, что для любых целых m и n, если (m-n):6, то (m3-n3):18.

Воспользуемся идеей 1-го способа.. Так как (m-n):6, то (m-n)3:216 и, тем более, поделится на 18. Второе слагаемое делится на 3 и на 6 независимо друг от друга, поэтому также поделится на 18.

После рассмотрения последней задачи возникает **гипотеза**.

№10. Верно ли, что если (m-n):k, то (m3-n3):(3k) при любом натуральном k? Утверждение неверно, есть контрпример: m=3, n=1, *k*=2. (3-1):2, 33-13=26 не : 3·2=6.

А может всё дело в том, что число k должно быть кратно 3? Появляется новая **гипотеза.**

№11. Верно ли, что если (m-n):(3k), то (m3-n3):(9k) при любом натуральном k? Докажите или опровергните это утверждение.

Задачи на делимость часто встречаются на ЕГЭ (задача №19). Одну такую задачу я хочу показать вам, она тоже представляет собой маленькое исследование. В процессе её решения у меня возникало много вопросов. Попробуем вместе разобраться.

№12. Дано двузначное натуральное число.

а) Оказалось, что частное этого числа и суммы его цифр, равно 7. Найдите все такие числа.

б) Какие натуральные значения может принимать частное данного числа и суммы его цифр?

в) Какое наименьшее значение может принимать частное данного числа и суммы его цифр?

Решение. а) Пусть данное число 10х+у, его сумма цифр х+у. По условию составим уравнение: . Так как х и у – цифры, причём х≠0, то условиям удовлетворяют числа: 21;42;63;84.

б) Пусть частное данного числа и суммы его цифр равно k, причём k –число натуральное. Получим . Так как х и у – цифры, причём х≠0, то получим двойное неравенство: . Решая его, получим, что 1,9≤k≤10. Так как k- натуральное, то это отношение может быть равно 2;3;...9;10. Обращаю ваше внимание, что, если вы так это и запишите в ответ, то вам проверяющие снимут баллы. Дело в том, что это список возможных значений искомого отношения. Нужно показать пример, что это отношение реализуется. Это делается простым подбором или решением уравнений, аналогичных пункту а). Например, k=2 получиться для числа 18, k=3 для числа 27 и т.д. Приведите эти примеры сами для всех k от 2 до 10.

«Лирическое» отступление. Меня заинтересовало, что для каких–то k можно придумать только один пример, а для каких-то, например, для k=7 целых четыре. Решив задачу математически, я решил написать компьютерную программу на языке Питон, которая бы считала все числа для каждого отношения k. Получилась следующая таблица.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| k | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| числа | 18 | 27 | 12;24;36;48 | 45 | 54 | 21;42;63;84 | 72 | 81 | 10;20…90 |

Возник ещё один вопрос: может ли k равняться неправильной дроби, большей 1,9, например, 10/3? Докажите, что не существует двузначного числа, отношение которого к сумме своих цифр равно 10/3.

Перейдём к вопросу о наименьшем значении искомого отношения k.

в) Рассмотрим функцию . Обозначим у/х=t и рассмотрим функцию одной переменной при 0≤ t ≤9. Это уравнение гиперболы, f(t) – убывающая функция, поэтому своё наименьшее значение принимает на правом конце отрезка, то есть при t=9. Это отношение равно f(9)=1,9 и получается для числа 19.

В качестве исследования можно задаться вопросом об отношении двузначных чисел к произведению своих цифр, трёхзначных чисел к сумме своих цифр. Кстати, найдите такое трёхзначное число, для которого отношение к сумме своих цифр равно 29.

Выводы. Математика огромный исследовательский полигон, причём не требующий никаких материальных затрат, как, например, в физике или химии. Это полёт фантазии и удовлетворение здорового любопытства.

В заключении, задача- шутка. Двое по очереди ломают шоколадку размером 6 на 8. За 1 ход делается прямолинейный разлом любого из кусков вдоль углубления. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет в этой игре, первый или второй игрок? Решение. Каждый раз число кусков увеличивается на 1. В конце получится 48 долек, значит, будет сделано 47 ходов. 47-й ход делает тот, кто делал 1-ый, то есть первый игрок выиграет.

Вопрос: какими должны быть размеры шоколадки, чтобы выиграл второй игрок?

**Задачи по мотивам лекции.**

№1. Докажите, что число - составное.

№2. Запись натурального числа состоит из одной «1», двух «2 «, трёх «3» и т.д. девяти «9». Может ли оно быть точным квадратом?

№3. Верно ли, что если (m-n):(3k), то (m3-n3):(9k) при любых натуральных m,n,k? Докажите или опровергните это утверждение.

№4. Докажите, что не существует двузначного числа, отношение которого к сумме своих цифр равно 10/3.

№5. Найдите такое трёхзначное число, для которого отношение к сумме своих цифр равно 29.

№6. (Для любителей информатики). Напишите программу на каком-либо языке программирования, которая бы печатала все трёхзначные числа, отношение которых к их сумме цифр есть целое число. Само отношение должно быть напечатано через пробел от соответствующего числа. Сколько таких трёхзначных чисел?

**Квадратный трёхчлен в олимпиадных задачах.**

**Общие сведения о квадратном трёхчлене.**

Выражение {\displaystyle ax^{2}+bx+c} *ax*2+*bx*+ *c*  называют *квадратным трёхчленом.* Соответствующая функция у= ax2+ bx + c называется квадратичной. Её график – парабола. Расположение параболы зависит от коэффициентов а, в и с. а показывает направление ветвей, в – определяет вместе с а ось параболы, а с – ординату точки пересечения параболы с осью Оу. Корни квадратного трёхчлена – точки пересечения с осью Ох – нули функции находятся по формулам . Если дискриминант D>0, то парабола пересекает ось Ох в двух точках, если D<0, то парабола не пересекает ось Ох, т.е. находится целиком выше или целиком ниже оси Ох (в зависимости от направления ветвей), если D=0, парабола касается оси Ох. Если корни есть, то квадратный трёхчлен можно разложить на множители: ax2+ bx + c  = а(х-х1)(х-х2). Взаимосвязь между коэффициентами и корнями показывает теорема Виета. Для приведённого квадратного уравнения *x*2+*рx*+ *q=0*  справедливы равенства: .

Вопрос. Какими будут формулы Виета для не приведённого квадратного уравнения *ax*2+*bx*+ *c*  = 0? Ответ: .{\displaystyle x\_{1}+x\_{2}=-b/a,\quad x\_{1}x\_{2}=c/a.}

***Задачи на взаимосвязь коэффициентов квадратного трёхчлена и расположения его графика.***

№1. Известно, что *a*+*b*+*c* < 0 и что уравнение *ax*2+*bx*+ *c* = 0 не имеет действительных корней. Определить знак коэффициента *с*.

Решение. Квадратный трёхчлен *f*(*x*) = *ax*2+*bx*+ *c*не имеет действительных корней, значит, он сохраняет один и тот же знак для всех значений аргумента х. Так как  *f*(1) = *a*+*b*+*c* < 0, то *f*(0) = *c* < 0.

Ответ: *c* < 0.

Заметим, что значение квадратного трёхчлена (и, вообще, любого многочлена) при х=1 равно сумме его коэффициентов. Верно и наоборот: если в квадратном уравнении сумма всех его коэффициентов равна нулю ({\displaystyle a+b+c=0}а+в+с=0), то х=1 - корень такого уравнения (другой корень можно определить по формулам Виета).

Вопрос. Какой вывод можно сделать, если в квадратном уравнении для коэффициентов выполняется равенство ({\displaystyle a+b+c=0}а + с = в)? Ответ: по условию а-в+с=0, то есть *f*(-1) = 0, а значит х= -1 - корень этого уравнения.

№2. (ЛМО 2000, 10 кл). Сумма наименьшего значения квадратного трёхчлена аx2+8x + b и наименьшего значения квадратного трёхчлена bx2 +8x+a равна нулю при a>0 и b>0. Доказать, что оба эти наименьшие значения равны нулю.

Решение. . Для первого квадратного трёхчлена . Аналогично, для второго квадратного трёхчлена . Сумма наименьших значений . Так как по условию a+b≠0, то ab=16, при этом f1 = f2=0.

№3. (№3.71 «Задачи с параметрами»). Найти наименьшее значение суммы квадратов корней уравнения x2- 2ax + а + 6 = 0.

Нужно найти . Находить корни с помощью дискриминанта, а затем подставлять в искомое выражение сложно. Это препятствие можно обойти, воспользовавшись теоремой Виета для этого уравнения:. Применим способ, шутливо называемый способом «Тараса Бульбы». . Полученный квадратный трёхчлен принимает своё наименьшее значение в вершине параболы, то есть при . А наименьшее значение равно . Казалось бы, задача решена. Давайте сделаем проверку: при а=1/4 получаем уравнение x2– 0,5x + 6,25 = 0. Его дискриминант отрицателен! Ошибка произошла потому, что мы предварительно не задумались о том, существуют эти корни или нет. Найдём дискриминант данного уравнения. . Решая неравенство, получим a∈(-∞;-2]∪[3;∞). Таким образом, нужно найти наименьшее значение выражения  при a∈(-∞;-2]∪[3;∞). Графическая иллюстрация показывает, что унаим=у(-2)=8. Ответ: 8.

***Задачи на делимость.***

№4. Может ли квадратное уравнение *ax*2+*bx*+ *c* = 0 с целыми коэффициентами иметь дискриминант равный 2018?

Решение. Допустим, что дискриминант указанного уравнения равен числу 2018. Тогда можно записать: *b*2 – 4*ac* = 2018.

Заметим, что b2 делится на 2, а, значит, и b делится на 2. Тогда b=2n, подставляя в это равенство, получим, что его левая часть делится на 4, а правая 2018 не делится на 4. Получено противоречие, значит, сделанное допущение ложно.  Ответ: нет.

Вопрос. А может ли квадратное уравнение *ax*2+*bx*+ *c* = 0 с целыми коэффициентами иметь дискриминант равный 23? Ответ: нет, как и любому числу вида 4n+3.

№5. (ММО 1955, 7 кл). Существует ли такое целое n, что n2 + n + 1 делится на 1955?

Решение. Допустим, что существует, тогда n2 + n + 1 = 1955k. Рассмотрим квадратное уравнение n2 + n + 1 - 1955k = 0.

Найдем его дискриминант: D = 1 - 4∙ (1 - 1955k) = 7820k -3. Заметим, что дискриминант оканчивается цифрой 7 при любом k, а, значит, точным квадратом быть не может. Ответ: такого k не существует.

Вопрос. Каким число ближайшего к нам года можно заменить число 1955 в этой задаче? Ответ: 2015.

№6. Квадратный трёхчлен *x*2+*аx*+ *b* = 0  имеет целые корни по модулю большие двух. Докажите, что число а + в + 1 – составное.

Решение. Доказать, что число а + в + 1 – составное означает, что нужно найти его, по крайней мере, один делитель, не равный 1.

Воспользуемся теоремой Виета для этого уравнения:. Найдём

. Таким образом, делители найдены.

Вопрос. Для чего в задаче условие, что уравнение «имеет целые корни по модулю большие двух»? Ответ: благодаря этому условию, каждая из скобок не равна 1.

***Квадратный трёхчлен и неравенства.***

№7. (ММО, 2014, 10.1, 11.1 ) Квадратный трёхчлен f(x) = ax2 + bx + c принимает в точках 1/a и c значения разных знаков. Докажите, что корни трёхчлена f(x) имеют разные знаки.

Решение. По условию, 0 > *f*(*c*)∙*f*(1/*a*) = (*ac*2 + *bc + c*)∙(1/*a + b*/*a + c*) = *c*/*a* ∙(*ac + b* + 1)2.  Следовательно,  *c*/*a* < 0.  Но по теореме Виета *c*/*a* равно произведению корней  *f*(*x*), поэтому они разных знаков.

№8. (18.9 Бартенев) Докажите, что для любых  хотя бы одно из двух уравнений

 имеет корень.

Решение. Допустим противное, то есть, что оба уравнения не имеют корней. Тогда имеют место неравенства  и . Сложив эти два неравенства, получим,  - противоречие.

№9. ([ЛМО,](http://problems.ru/) 1999, 9 кл) Значения квадратного трёхчлена  *ax*2 + *2bx + c*  отрицательны при всех х. Докажите, что значения квадратного трёхчлена  *a*2*x*2 + *2b2x + c*2  при всех х положительны.

Решение. Так как по условию *ax*2 + *2bx + c*  >0, то  (см графическую иллюстрацию – парабола целиком ниже оси Ох). Заметим, что с<0, тогда

*b*2  + *ac* >0.  Рассмотрим второй квадратный трёхчлен. По условию у него а2 >0 и парабола должна целиком располагаться выше оси Ох (см графическую иллюстрацию). Тогда нужно доказать, что его Д/4<0. Получим D/4 = *b*4 - (*ac*)2=( *b*2  + *ac)( b*2  - *ac)* <0, так как по доказанному первая скобка положительна, а вторая отрицательна.

***Квадратный трёхчлен и инвариант.***

№10. (<http://math4school.ru/>) Дан квадратный трёхчлен *ax*2+*bx*+ *c*. За один ход разрешается заменить данный квадратный трёхчлен  целиком на квадратный трёхчлен  *cx*2+(*b + 2c*)*x*+ (*a + b + c*).

Можно ли после нескольких ходов из квадратного трёхчлена  *x*2– 3*x –*4 получить квадратный трёхчлен  x2– 2017x – 2018?

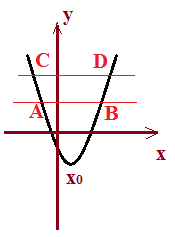
Решение. В задачах подобного типа нужно найти то, что остаётся неизменным при указанном преобразовании (инвариант). Попробуем найти дискриминант второго квадратного трёхчлена.  .

То есть, при указанных заменах исходного квадратного трёхчлена  его дискриминант не изменяется. Значит, если из квадратного трёхчлена  *x*2– 3*x –*4 можно получить квадратный трёхчлен *x*2– 2017*x –*2018, то их дискриминанты должны быть равны. Однако это не так. Ответ: нет.

Вопрос. Можно ли получить из первого квадратного трёхчлена второй, если за один ход разрешается заменить х на (х – t), где t - любое число. Ответ: нельзя, так как такое преобразование также не изменит дискриминант.

***Замечание***. В задачах на инвариант полезен эксперимент!

***Квадратный трёхчлен и геометрия.***

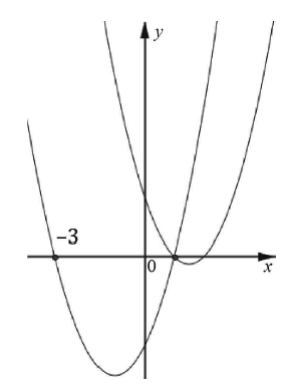
№11. (Олимпиада Сириус, 9 кл). 

На параболе у= x2+ax + b взяты точки А, В, С и Д так, что АВ||СД||Ох и АВ=5, СД=13. Найти расстояние между прямыми АВ и СД.

Решение. Пусть абсцисса вершины параболы . Так как АВ=5, а СД=13, то координаты точек А(х0-2,5;у1); В(х0+2,5;у1); С(х0-6,5;у2); Д(х0+6,5;у2). Искомое расстояние 

Ответ: 36.

**Задачи для самостоятельного решения.**

№1. (Всеросс., 2017, Шк. Этап, 10 кл). На координатной плоскости изображены графики функций y = x2 + bx + c и y = x2 + cx + b. Найдите значения b и c.

№2. Найти значение а, при котором сумма квадратов корней уравнения

x2+ ax - 5а + 1 = 0 наименьшая.

№3. Квадратный трёхчлен *x*2+*аx*+ *b* + 1 = 0  с целыми коэффициентами имеет ненулевые целые корни. Докажите, что число а2 + b2 – составное.

№4. Докажите, что для любых a и b хотя бы одно из двух уравнений

 имеет решение.

№5. Дан приведенный квадратный трехчлен  *f*(*x*) = *x*2 + *bx + c*,  имеющий два различных корня. Обозначим *D* его дискриминант   
(*D = b*2 – 4*c*).  Сколько корней имеет уравнение   ?

№6. В параболу вписан прямоугольный треугольник, гипотенуза которого параллельна оси  Докажите, что высота треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 1.

**Задачи для исследования.**

**Сюжет 1 (алгебраический).** Пусть - корни квадратного уравнения ax2 + bx + c = 0. , где n - натуральное число.

1 уровень. Для квадратного уравнения x2+ 4x - 6=0 найдите S1, S2, S3.

2 уровень. Для квадратного уравнения x2+ рx + q=0 найдите (выразите через p и q) S1, S2, S3, Sn.

3 уровень. Обобщите результат на случай не приведённого уравнения ax2 + bx + c = 0. Найдите (выразите через a, b и c) S1, S2, S3, Sn.

4 уровень. Докажите равенство .

5 уровень\*. Пусть x1 и x2—корни квадратного уравнения x2+ рx + q=0, . Докажите формулу Варинга. , где суммирование ведётся по всем целым числам m, для которых .

**Сюжет 2 (геометрический).**

1 уровень. В параболу вписан прямоугольный треугольник, гипотенуза которого параллельна оси  Докажите, что высота треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 1.

2 уровень. В параболу вписан прямоугольный треугольник, гипотенуза которого параллельна оси  Докажите, что высота треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 1/а.

3 уровень. В параболу вписан треугольник, одна из сторон которого параллельна оси  Высота треугольника, проведённая к этой стороне, равна 1/а. Докажите, что треугольник – прямоугольный.

4 уровень. В параболу вписан прямоугольный треугольник АВС с гипотенузой АВ. Высота треугольника, опущенная на гипотенузу СН = 1/а. Верно ли, что АВ параллельна оси ОХ?

5 уровень\*. Можно ли в параболу вписать равносторонний треугольник, ни одна из вершин которого не совпадает с началом координат?