Метод объемов при решении стереометрических задач.

Метод объемов помогает найти длину перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость. Зная длину перпендикуляра, можно найти следующие величины:

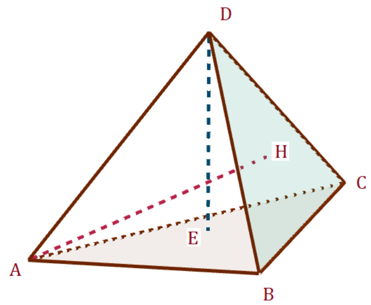
1) Расстояние от точки до плоскости (задача 1)

2) Расстояние между скрещивающимися прямыми (задача 2)

3) Расстояние между двумя параллельными плоскостями (задача 3)

Суть метода.

Рассмотрим треугольную пирамиду DABC, DE и AH - высоты пирамиды



$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot DE \qquad (1)$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{DBC} \cdot AH \qquad (2)$$

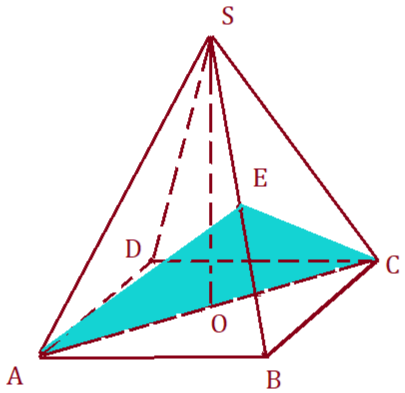
Из равенства выражений (1) и (2) следует,

$$AH = \frac{S_{ABC} \cdot DE}{S_{DBC}}$$

Рассмотрим, как применить метод объемов на конкретных примерах.

Задача 1.

В правильной четырехугольной пирамиде SABCD, все ребра которой равны 1, точка E – середина ребра SB. Найдите расстояние от точки B до плоскости ACE.



Рассмотрим треугольную пирамиду EABC. Искомое расстояние от точки B до плоскости ACE равно BH -высоте этой пирамиды, проведенной из точки B на грань AEC.

$$BH = \frac{S_{ABC} \cdot KE}{S_{AEC}}$$

Где KE – высота пирамиды, проведенная из точки E на грань ABC.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2}$$

$$KE = \frac{1}{2} \cdot SO = \frac{1}{2}\sqrt{SC^2 - OC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$S_{AEC} = \frac{1}{2} AC \cdot EO = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

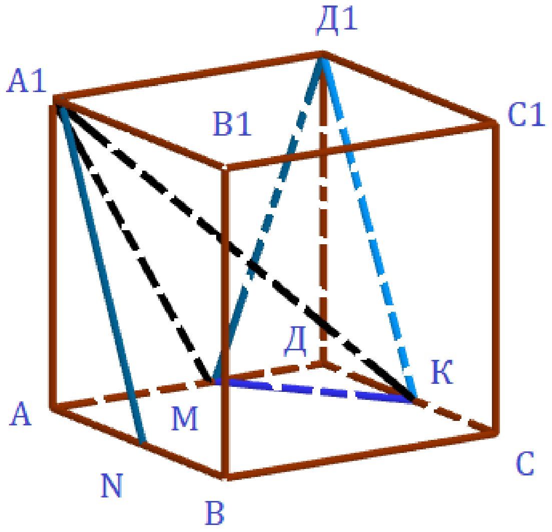
$$BH = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2}$$

Ответ. 0,5.

Задача 2.

Точки M и N – середины ребер соответственно AD и AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Найдите расстояние между прямыми D_1M и A_1N, если ребро куба равно 6.



Расстояние между прямыми D_1M и A_1N найдем, как расстояние от прямой A_1N до плоскости, параллельной прямой A_1N и содержащей прямую D_1M. Проведем прямую $D_1К$, где К - середина DC. Тогда прямая A_1N параллельна прямой $D_1К$ и параллельна плоскости $MD_1К$. Расстояние от прямой, параллельной плоскости равно расстоянию от любой точки прямой до плоскости. Поэтому найдем расстояние от точки A_1 до плоскости $MD_1К$. Воспользуемся методом объемов для треугольной пирамиды $A_1MD_1К$.

Пусть A_1H – перпендикуляр, проведенный из точки A_1 на плоскость $MD_1К$, тогда A_1H

$$A1H = \frac{S_{A1D1M} \cdot KD}{S_{MD1K}}$$

$S_{A1D1M} = \frac{1}{2} S_{AA1D1D} = \frac{1}{2} \cdot 6^2 = 18$

$KD = \frac{1}{2} \cdot CD = 3$

В треугольнике MD_1K - равнобедренном: $MK = \frac{1}{2} \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$,

$MD_1 = \sqrt{MD^2 + DD1^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

Высота треугольника MD_1K, проведенная к стороне MK равна

$\sqrt{MD1^2 - (\frac{MK}{2})^2} = \sqrt{45 - (\frac{3\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$

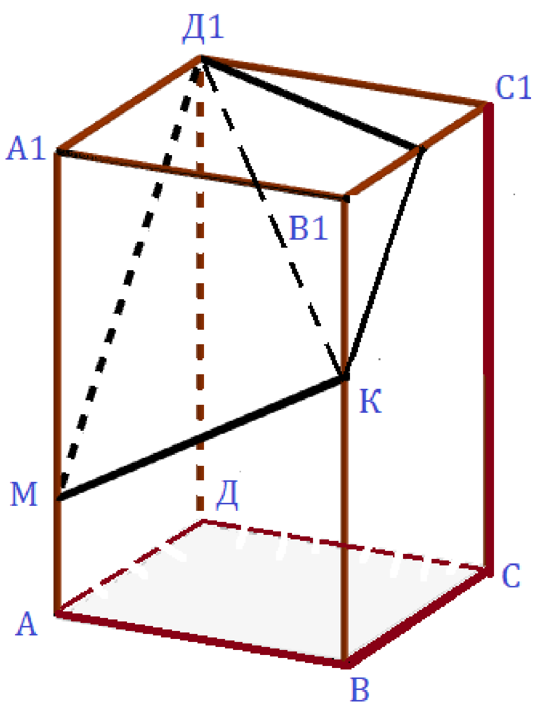
$$S_{MD1K} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{2} = \frac{27}{2}$$

И тогда $A_1H = \frac{18 \cdot 3}{\frac{27}{2}} = 4$

Ответ. 4.

Задача 3.

В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной основания 4 и высотой 7 на ребре AA_1 взята точка M так, что AM = 2. На ребре BB_1 взята точка K так, что $BK_1 = 2$. Найдите угол между плоскостью D_1MK и плоскостью CC_1D_1.



Построим плоскость D_1MK.

Угол между плоскостью D_1MK и плоскостью CC_1D_1 найдем как угол между перпендикулярами к этим плоскостям. $А_1Д_1$ – перпендикуляр к плоскости CC_1D_1, $А_1Д_1 = 4$.

A_1H – перпендикуляр к плоскости D_1MK. A_1H найдем методом объемов из треугольной пирамиды A_1D_1MK.

$A_1H = \frac{S_{A1D1M} \cdot A1B1}{S_{MD1K}}$

$$S_{A1D1M} = \frac{1}{2} \cdot A1M \cdot A1D1 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10$$

$A_1B_1 = 4$

$$S_{MD1K} = \sqrt{p_{MD1K} \cdot (p - MD1) \cdot (p - KD1) \cdot (p - MK)}$$

$$S_{MD1K} = \sqrt{\frac{11+\sqrt{41}}{2} \cdot (\frac{11+\sqrt{41}}{2} - \sqrt{41}) \cdot (\frac{11+\sqrt{41}}{2} - 6) \cdot (\frac{11+\sqrt{41}}{2} - 5)}$$

$$S_{MD1K} = 20\sqrt{2}$$

$A_1H = \frac{10 \cdot 4}{20\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Искомый угол $Д_1A_1H$ найдем из прямоугольного треугольника $Д_1A_1H$, угол H = 90^0.

$\cos Д1A1H = \frac{A1H}{A1Д1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Угол $Д_1A_1H = 45^0$.

Ответ. 45^0.