**Упражнение №1.**

Докажите, что Р()=0.

Понятно, что из такого определения следует, что вероятность любого события равна сумме вероятностей входящих в это событие элементов вероятностного пространства – элементарных событий. В случае равновероятности всех элементарных событий, вероятность наступления события просто равна отношению всех входящих в него элементарных событий к мощности (числу входящих в него элементарных событий) всего вероятностного пространства. Так что начало данного конспекта является просто продолжением предыдущего, но с использованием вероятностной терминологии.

**Упражнение №2.**

В урне имеется n шаров, m из них белых, остальные чёрные. Из неё выбирают k шаров.

Какова вероятность того, что окажется выбрано t (tk) белых шаров?

Применить полученную формулу к малым значениям n, m, k, t:

n=6, m=4, k=3, t=2; n=7, m=4, k=4, t=3; n=8, m=4, k=5, t=4;

**Упражнение №4.**

В лотерее «Спортлото» участники вычёркивают на карточках 6 из первых 49 натуральных чисел - номеров видов спорта. Барабан случайным образом «выплёвывает» 6 номеров. Выигрышными считаются карточки, на которых правильно угаданы 3 и более выпавших из барабана номеров. По какой максимальной ставке, чтобы не остаться в проигрыше, должны устроители этой лотереи назначать призы обладателям правильно угаданных 3, 4, 5 и 6 номеров соответственно?

**Упражнение №5.**

Имеются две пары игральных костей – одна стандартная, с числами от 1 до 6 на гранях кубиков, а другая так называемая «кости Зихермана». На одной кости на гранях числа 1, 2, 2, 3, 3 и 4, а на другой – 1, 3, 4, 5, 6 и 8. Укажите вероятности выпадания чисел от 2 до 12 при бросании пары обычных костей и костей Зихермана.

**Упражнение №6.\***

Два игрока по очереди бросают правильную монету. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет герб. Какова вероятность выигрыша у начинающего?

**Схема Бернулли.**

Бросают монетку с, вообще говоря, неравными вероятностями выпадания герба и решки. Будем ставить в соответствие выпаданию герба нуль, а решки – единицу. Таким образом, элементарными событиями в этом случае будут последовательности, состоящие из нулей и единиц длины n, если именно столько раз бросают монету. Если при каждом бросании монеты вероятность выпадания 1 равна р, а вероятность выпадания 0, соответственно, q=1-p, то вероятность элементарного события i - выпадания k единиц в последовательности из n испытаний (бросаний монеты) будет равна P(i)=pkqn-k. Вероятностное пространство при этом будет состоять из 2n элементарных событий.

**Упражнение №7.**

1. Какова вероятность Pn(k) того, что в n испытаниях выпадет ровно k решек? (0kn).
2. Выведите отсюда, что функция P(i) действительно задаёт вероятность на пространстве последовательностей.

**Упражнение №8.**

Покажите, что если вероятность на элементарных событиях задана формулой P(i)=pkqn-k, то вероятность того, что в i-ом испытании монета выпала решкой, равна именно р.

**Упражнение №9.**

В мешке n шаров, из которых m белых, остальные n-m - чёрные. Выбираем последовательно, шар за шаром, k шаров, и каждый раз, отмечая какого цвета выбран шар, кладём его обратно в мешок. Какова вероятность того, что выбрано окажется p белых шаров? (0p k).

**Упражнение №10.**

Из некоторого множества А случайно выбирают подмножества В и С. Пусть |A|=n, |B|=m, |C|=k. Какова вероятность того, что выбранные подмножества не пересекаются?

**Упражнение №13\*.**

Можно ли утяжелить две правильные игральные кости (сделав, таким образом, выпадание граней неравновероятным) так, чтобы все возможные суммы очков, от 2 до 12 стали равновероятными?

**Упражнение №16.**

Матч двух равных по силам игроков прерван, когда первому до победы осталось выиграть 1 партию, а второму – 3. В каком отношении должен быть разделён между ними приз? Тот же вопрос, если одному оставлось выиграть 3 партии, а другому – 5.

Считайте, что ничьих не бывает. Тогда можно было бы продолжать матч, сыграв ещё максимум 3 партии в первом случае и 7 – во втором. Решите задачу в общем случае.

**Упражнение №17.**

Для какого минимального количества людей вероятность совпадения у хотя бы двоих из них месяцев рождения превышает 0,5?

**Упражнение №18.**

Группа из 2n мужчин и 2n женщин делится на 2 равные части. Какова вероятность того, что в каждой части число мужчин и женщин одинаково?

***Def.***  Пусть вероятность некоторого события В не равна нулю: Р(В)>0.

Тогда ***условной вероятностью Р(А|В) наступления события А при условии наступления события В*** называется отношение . Пусть события Вi, i=1,…,n таковы, что  и BiBj= ij. В таких случаях говорят, что события Вi образуют **полную группу событий**. **Упражнение №19.**

Докажите для этого случая **формулу полной вероятности**: для любого события А P(A)=.

**Упражнение №20.**

Пусть, по-прежнему, события Вi образуют полную группу событий. Пусть А – возможное событие, т.е., Р(А) >0.

Докажите **формулу Байеса**: 

**Упражнение №21.**

Имеется две партии одинаковых деталей: 20 штук в первой и 8 штук во второй.   
В каждой из партий одно изделие бракованное. Из первой партии берут наугад изделие и перекладывают во вторую. Какова вероятность выбрать после этого из второй партии бракованное изделие? 7/60

**Упражнение №25.**

Две кондитерские фабрики производят торты «Птичье молоко», при этом объём продукции второй фабрики, поступившей в магазин шаговой доступности в k раз превосходит объём продукции первой. Доля брака на первой фабрике – р1, а второй – р2. Какова вероятность того, что бракованный торт, купленный в этом магазине, был изготовлен на первой фабрике?

***Def.***  События А и В называются ***независимыми***, если Р(АВ)=Р(А)Р(В).

В противном случае события называются зависмыми. **Упражнение №26.**

Проверьте, что *возможные* несовместные события (такие, что Р(АВ)=0) всегда зависимы. **Упражнение №27.**

Докажите, что из независимости событий А и В следует независимость А и Вс, Ас и В, Ас и Вс. (Под Вс понимается дополнение В во множестве F всех событий).

***Def.***  События {A1,…,An} называются ***независимыми в совокупности***, если для любого набора различных индексов i1,…,ik, взятых из множества {1,2,…,n}, выполняется равенство Р()=Р(.

К этому равенству приводит требование Р(

Можно ли заменить это требование требованием лишь попарной независимостью событий? **Упражнение №28.** (Тетраэдр С.Н.Бернштейна)

Пусть три грани правильного тетраэдра раскрашены в синий, зелёный и жёлтый цвета соответственно, а четвёртая грань – сине-зелёно-жёлтая в полосочку. Бросаем и с вероятностью ¼ он падает на каждую из своих граней. События Аb, Ag, Ay – на грани имеется соответственно, синий, зелёный или жёлтый цвет.

Являются ли эти события попарно независимыми? Независимыми в совокупности?

**Упражнение №29\*.**

В одной урне 5 белых и 6 чёрных шаров, а в другой – 4 белых и 8 чёрных. Из первой урны вынимают 3 шара и перекладывают во вторую. После этого из второй урны вынимают 4 шара. Какова вероятность того, что все эти 4 шара окажутся белыми? 47/6435.  
**(Apply formula of full probability after finding all P(Bi) – probability of taking i white balls from the 1st basket)**

**Упражнение №30.**

В первой урне 6 белых и 4 чёрных шара, во второй – 5 белых и 7 чёрных. Из первой урны случайным образом вынули 3 шара, а из второй – 2. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров – ровно 3 белых. 4/11.

**Упражнение №32\*.**

Мальчику обещают приз при условии, что он выиграет подряд две партии из трёх, играя по очереди против мамы и папы, причём папа играет сильнее мамы. Ему предоставлено право выбрать самому, против кого играть первую партию. В каком случае у него больше шансов получить приз? Кого ему следует выбрать партнёром в первой партии?

**Упражнение №33.**

К вопросу из теста прилагается k вариантов ответа, ровно один из которых – правильный. Студент с вероятностью р ищет правильный ответ, полагаясь на свои знания, а с вероятность 1-р отвечает наугад. Известно, что студент получил правильный ответ. Какова вероятность того, что он при этом гадал? Если считать событием В1 «студент думал над вопросом», событием В2 «студент гадал», а событием А «получен правильный ответ, то надо найти Р(В1|A). Ответ: 

**Упражнение №34\*.**

Три дуэлянта, Онегин, Ленский и Пушкин вызвали друг друга на дуэль на пистолетах и встали в вершины равностороннего треугольника. Первый выстрел делает Пушкин, второй – Онегин, и далее по кругу. Каждый из дуэлянтов стреляет по своему выбору в одного из двух других или в воздух с таким рсчётом, чтобы с максимальной вероятностью остаться в живых. Если один из дуэлянтов выбывает, то дуэль продолжают оставшиеся двое. Известно, что Пушкин попадает с вероятностью 0,3; Ленский – с вероятностью 0,5, а вот Онегин бьёт без промаха. Какой выбор должен сделать Пушкин?

**Упражнение №36.**

На круглом столе в вершинах правильного треугольника стоят три напёрстка, А, В и С. Под один из них кладут монетку в 10р. Стол крутят и входит игрок. Он платит за право угадать, под каким из напёрстков находится монетка 6 рублей. Если он угадывает, то забирает монетку. Перед тем, как предоставить ему выбор, приподнимают тот из двух напёрстков В или С, под которым монетки нет, а напёрсток А никогда не трогают.

Есть ли у игрока стратегия, позволяющая при большом количестве игр уйти с выигрышем в кармане?

**Упражнение №37.**

Из 28 костей домино случайно выбирают две. Какова вероятность того, что их можно приставить друг к другу по правилам игры в домино? 

**Упражнение №38.**

Бросаются две правильные монеты и рассматриваются события:   
А – первая монетка упала орлом, В - вторая монетка упала орлом, С – орёл выпал ровно один раз. Будут ли эти события попарно независимы? Независимы в совокупности?

**Упражнение №39.**

В одной урне находится один белый шар и 9 чёрных, а в другой 1 чёрный и 5 белых. Из каждой урны удалили по одному шару, а остальные ссыпали в третью урну. Какова вероятность того, что шар, вынутый из третьей урны – белый? 

**Упражнение №40.**

В урне 4 шара, каждый из которых может быть либо белым либо чёрным, с равными вероятностями. В неё кладут 2 белых шара и после этого вынимают 3 шара. Какова вероятность того, что все эти шары – белые? 27,5%.

**Упражнение №41.**

Вероятность обнаружить заболевание у больного – a, вероятность принять здорового за больного – b, а доля больных среди населения – с. Эти данные определяются статистически для каждой страны. Какова вероятность того, что человек здоров, если его признали больным при обследовании? 

**Упражнение №43.**

Игрок А бросает правильную монету n+1 раз, а игрок В – n раз. Какова вероятность того, что у А гербов выпадет больше, чем у В?

**Упражнение №44.**

Автомат без устали бросает правильную монету и записывает последовательность результатов (Герб или Решка) в виде слова из букв Г и Р. Игроки А и В сделали ставки: А утверждает, что вероятность того, что в этой последовательности слово ГГГ встретится раньше, чем слово ГРГ выше, чем 0,5. Игрок В с ним спорит. Кто из них прав?

**Упражнение №46.**

Рассмотрим схему испытаний (бросаний монеты), когда монету бросают до первого появления герба (успехом будем считать 1). Элементарными событиями будут в ней последовательности {1}, {0,1}, {0,0,1},…с вероятностями p, qp, q2p,… соответственно. Покажите, что это вероятностное пространство  элементарных событий, действительно, имеет полную вероятность Р()=1.

**Упражнение №47.**

Рассмотрим теперь схему испытаний, продолжающихся до появления ровно m единиц, m>1. Каким будет в этом случае вероятностное пространство элементарных событий ? Покажите, что вероятность того, что m-ая единица появится ровно в (m+k)-ом испытании Pm(k)=qkpm. Тогда, поскольку Р()=1, должно выполняться равенство . **Упражнение №48\*.** Обоснуйте это равенство исходя из равенства  подсчётом коэффициента аk при qk после раскрытия скобок.

Рассмотрим вновь схему Бернулли на пространстве  элементарных событий из всевозможных последовательностей длины n из нулей и единиц. Рассмотрим функцию Pn(k): вероятность события «в последовательности ровно k единиц». Как мы уже знаем, Pn(k)=pkqn-k, 0kn. Понятно, что «на краях» отрезка [0,n] эта функция мала, вначале возрастает, достигает где-то в середине своих максимальных значений, и потом убывает.

Наша очередная задача – выяснить, при каких же именно значениях k она будет максимальна, т.е., какое число «успехов» будет наиболее вероятным. Для этого надо выяснить, до каких пор Pn(k) будет возрастать. А возрастать она будет до тех пор, пока отношение  будет больше 1. Пусть np-q – натуральное число.

**Упражнение №51.**

Докажите, что в этом случае наивероятнейшее число успехов есть как np-q, так и np+р.

**Упражнение №52.**

Пусть np-q – дробное. Докажите, что в этом случае наивероятнейшее число успехов определяется из двойного неравенства np-q<k<np+р (ему удовлетворяет одно и только одно натуральное число).

**Упражнение №55.**

Станок в единицу времени потребляет единицу энергии с вероятностью 75%.

Сколько должно быть станков, чтобы наивероятнейшим числом не потребляющих энергию в данный момент времени станков было бы 60? 239n243

**Упражнение №59.**

Вероятность успеха в отдельном испытании равна р. Какова вероятность того, что k-ый по порядку успех произойдёт при l-ом испытании?

**Упражнение №60.**

Двое поспорили, у кого выпадет больше гербов при n-кратном подбрасывании правильной монеты. Какова вероятность ничьей? 

**Геометрические вероятности.** Рассмотрим вероятность появления точки в

какой-либо области. Рассмотрим модель, в которой появления точки в каждом месте равновероятны; в таком случае говорят о равномерном распределении.

Тут возникают новые нюансы, которых прежде не было.

***Def.*** Пусть эксперимент заключается в бросании точки в область Ω, имеющей площадь (длину, объём) μ(Ω). Событием будем теперь называть только те подмножества А множества Ω, которые имеют площадь (длину, объём) μ(А) и его вероятностью (попадания точки в А) будем называть величину .

Новое состоит в том, что не все подмножества Ω теперь являются событиями.   
А именно те из них, что не имеют соответственно, длины, площади или объёма (как мы впоследствии узнаем, такие подмножества, действительно, существуют!). Кроме того, возможные события, например, попадание случайно брошенной точки в данную, конкретную точку, с необходимостью будут теперь иметь вероятность 0. Равно как и вероятность – при бросании точки в область плоскости – попасть на какую-нибудь линию. Легко проверить, что установленные ранее для дискретного случая свойства вероятности сохраняются и в этом случае. А именно:

1. Р(Ω)=1, Р(∅)=0;
2. А∩В=∅ ⇒ Р(А∪В)=Р(А)+Р(В)

Следующая классическая «задача о свиданиях» существует во многих редакциях, сводящихся по существу, к следующему сюжету:

**Упражнение №66\*.** Задача о спичках.

Спичку случайным образом ломают на три части. Какова вероятность того, что из этих частей можно составить треугольник? Необходимым и достаточным условием для этого является выполнение неравенства треугольника: сумма длин любых двух сторон треугольника всегда должна быть больше длины его третьей стороны.  
**(sum of distances from every point inside equilateral triangle to it’s sides is invariant and equals to the height of this triangle).**

**Упражнение №67.**  
Случайная точка имеет равномерное распределение в прямоугольнике 1×2.

Какова вероятность Р(х) того, что расстояние от этой точки до ближайшей стороны не превзойдёт х? 3х-2х2.

**Упражнение №68.**  
Случайная точка имеет равномерное распределение в прямоугольнике 1×2.

Какова вероятность Р(х) того, что расстояние от этой точки до любой стороны не превзойдёт х? х-1

Введём важнейшее понятие случайной величины и затем величин, её характеризующих. Как мы отмечали выше, в общем случае вероятностное пространство Ω даётся нам вместе с некоторым множеством B своих подмножеств, которым приписаны некоторые неотрицательные величины – длина, площадь, объём. В общем случае это функция μ на этом множестве B, называемая *мерой*. Конечно, для того, чтобы ей так называться ей надо ещё удовлетворять некоторым естественным свойствам, например, μ(Ω)=1, μ(А1∪А2)=μ(А1)+μ(А2), если А1∩А2=∅. При этом все отдельные точки (подмножества Ω, состоящие из одной точки) получат меру 0, равно как и их конечные (а иногда и бесконечные!) объединения. Допустим, что на Ω, кроме того, задана некоторая функция f (ставящая в соответствие каждой точке Ω некоторое число).

Для произвольного числа х рассмотрим множество Мх={ω∈Ω| f(ω)≤x}.

Так вот, если для каждого х это множество входит в набор В подмножеств, имеющих меру (их ещё называют *измеримыми*), то функция f называется ***случайной величиной***.

К общему случаю вероятностных пространств и случайных величин, заданных на них мы вернёмся лет эдак через 5, а пока что ограничимся случаем конечных или, в крайнем случае, счётных (то есть, которые можно «пересчитать» с помощью натуральных чисел) Ω, в которых все подмножества-события измеримы и являются объединениями элементарных событий, имеющих вероятности. Поэтому каждому значению q∈Q случайной величины – функции f будет соответствовать событие – множество всех прообразов этого значения: Аq={ω∈Ω| f(ω)=q}. Почему-то случайные величины принято называть греческими буквами, например, не f, а ξ. У события Аq есть своя вероятность Р (сумма вероятностей элементарных событий, в него входящих), но вместо Р(Аq) мы будем писать Р(ξ=q). Значения Р(ξ=q) задают новую функцию от q, называемую ***распределением случайной величины*** ξ.

**Упражнение №69.**  
Рассмотрим пример, в котором случайная величина принимает всего три значения: 6, 0 и -6. Бросают две правильные кости. Если сумма выпавших очков не превышает 4, игрок выигрывает 6 рублей, если сумма окажется от 5 до 8, то ничего не выигрывает и если окажется больше 8, то проигрывает 6 рублей. Напишите функцию распределения этой случайной величины.

Так же, как и для событий, определяют понятие независимости и для случайных величин: случайные величины ξ и η считаются независимыми, если ∀xi, yi P(ξ=xi, η=yi) = P(ξ=xi)×P(η=yi).

***Def.*** ***Математическим ожиданием*** или ***средним значением случайной величины*** ξ называют сумму Мξ=   
В наших нынешних реалиях это будет пока что конечная сумма.

**Упражнение №70.**

1. Пусть ξ=с – постоянная случайная величина (константа). Чему будет в этом случае равно её математическое ожидание?
2. ∀ случайной величины ξ и числа с М(сξ)=сМξ.
3. ∀ξ1,..., ξn 
4. Если ξ1 и ξ2 независимы, то М(ξ1×ξ2)=Мξ1×Мξ2

**Упражнение №72.**  
Найдите математическое ожидание случайной величины биноминального распределения: Р(, k=0,1,…,n; p+q=1.  
**Упражнение №73\*.**  
Найдите математическое ожидание геометрического распределения Р(, k=0,1,…,n,... p+q=1.  
***Def.*** **Дисперсией** случайной величины ξ называется Dξ=M(ξ-Mξ)2=Mξ2-(Mξ)2.

Она является характеристикой отклонения случайной величины от своего среднего значения, разброса её значений или рассеяния (буквальный перевод с английского).

Она является также квадратом величины, называемой **средним квадратичным** или **стандартным отклонением**.

**Упражнение №74.**

1. Обоснуйте справедливость второго равенства в определении дисперсии;
2. ξ=const ⇒Dξ=0;
3. ∀ случайной величины ξ и любого числа с имеет место Dcξ=c2Dξ;
4. Для независимых случайных величин дисперсия их суммы равна сумме их дисперсий.

**Упражнение №75.**

Найдите дисперсию следующих случайных величин:

1. Случайной величины из упр.69; 15
2. случайной величины биноминального распределения: Р(, k=0,1,…,n; p+q=1 (упр. 72). **Упражнение №78.**

Правильную монету бросают до появления первого герба. Определите среднюю продолжительность игры. 2.

**Упражнение №79.** В схеме Бернулли пусть ξ - длина серии (гербов или решек), начавшейся при первом испытании. Определите среднюю длину серии и дисперсию этой величины. **Упражнение №80.**

Некто, имея связку из n ключей, из которых только один подходит к замку, случайным образом берёт и пробует из связки ключ, возвращая его после испытания в связку.

Каково математическое ожидание и дисперсия числа попыток?

**Упражнение №81.**

Некто, имея связку из n ключей, из которых только один подходит к замку, случайным образом берёт и пробует из связки ключ, устраняя не подошедший ключ из связки.

Каково математическое ожидание и дисперсия числа попыток? Dξ=

**Упражнение №82\*.**

В одной вершине куба сидит букашка, а в противоположной вершине – паук. Букашка стартует и проходит ребро за минуту, выбирая себе путь на развилках с равными вероятностями. Какова средняя продолжительность жизни букашки?

**(If ξ- life expectancy of an insect then P(ξ=2k+3)=p⋅qk; k=0,1,2,.. prove. ) M=10.**

О текущем состоянии дел с преподаванием математики по авторской методике в Москве и других городах можно ознакомиться на сайте [www.abramson.xyz](http://www.abramson.xyz)