

Математическое применение производной.

Вычислите производные:

$$a) (x^6 - 3x^5 + 6x - 8)' = 6x^5 - 3 \cdot 5x^4 + 6 \cdot 1 - 0 = 6x^5 - 15x^4 + 6$$

$$б) \left(\frac{6}{x^2} \right)' = (6x^{-2})' = 6 \cdot (-2x^{-3}) = -12x^{-3} = \frac{-12}{x^3}$$

Проверяем ответ. Кто правильно сделал ставит себе 1 балл.

Решаем вместе, заодно вспоминаем правило дифференцирования сложной функции.

Правило дифференцирования сложной функции: Производная сложной функции равна произведению производной функции, ее составляющих.

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$$

$$((x^6 - 3x + 2)^4)' = 4(x^6 - 3x + 2)^3 \cdot (x^6 - 3x + 2)' = 4(x^6 - 3x + 2)^3 (6x^5 - 3)$$

Так как вы научно – исследовательский коллектив, то на прошлом занятии вы получили конкретные задания по теме. Каждый отдел должен предоставить решение и расчёты и естественно все это защитить.

1. На трассе М - 4 произошла авария. Для выяснения степени виновности водителя нам необходимо знать:

- а) в течении какого времени осуществлялось торможение до полной остановки машины?
- б) сколько метров двигалась машина с начала торможения?
- в) чему равно ускорение в любой момент времени?

Установлено, что тормозной путь определяется по формуле: $S(t) = 120t - 10t^3$, где t (с), S (м)

Решение:

Воспользуемся механическим смыслом производной:

Механический смысл производной состоит в том, что если $S(t)$ - закон прямолинейного движения тела, то производная выражает мгновенную скорость в момент времени t .

$$V = S'(t)$$

Так как ускорение есть скорость изменения скорости, то

$$a = S''(t),$$

$$a = V'(t) \text{ или}$$

где S'' - производная второго порядка функции $S(t)$.

Следовательно, производная от координаты по времени есть скорость, то есть $S'(t) = V(t) = (120t - 10t^3)' = 120 - 30t^2$.

Так как машина остановилась, то $V(t) = 0$.

Имеем:

$120 - 30t^2 = 0$; $t = \pm 2$ (с). $t = -2$ не удовлетворяет условию задачи, значит в течении 2 секунд осуществлялось торможение до полной остановки машины.

Найдём путь, пройденный машиной за 2 с.:

$S(t) = 120t - 10t^3$; $S(2) = 120 \cdot 2 - 10 \cdot 2^3 = 160$ (м), значит с начала торможения машина двигалась 160 м.

Производная от скорости по времени есть ускорение, значит:

$$a(t) = (120 - 30t^2)' = -60t$$

2. Расход горючего легкового автомобиля (литр на 100 км) в зависимости от скорости x км/ч при движении на четвертой передачи приблизительно описывается функцией $f(x) = 0,0017x^2 - 0,18x + 10,2$. При какой скорости расход горючего будет наименьший. Найдите этот расход.

Решение:

Исследуем расход горючего с помощью производной:

$$f'(x) = 0,0034x - 0,18$$

$$f'(x) = 0$$

$$0,0034x - 0,18 = 0$$

$$0,0034x = 0,18$$

$$x \approx 53.$$

Найдем расход горючего, для этого определим знак второй производной в критической точке.

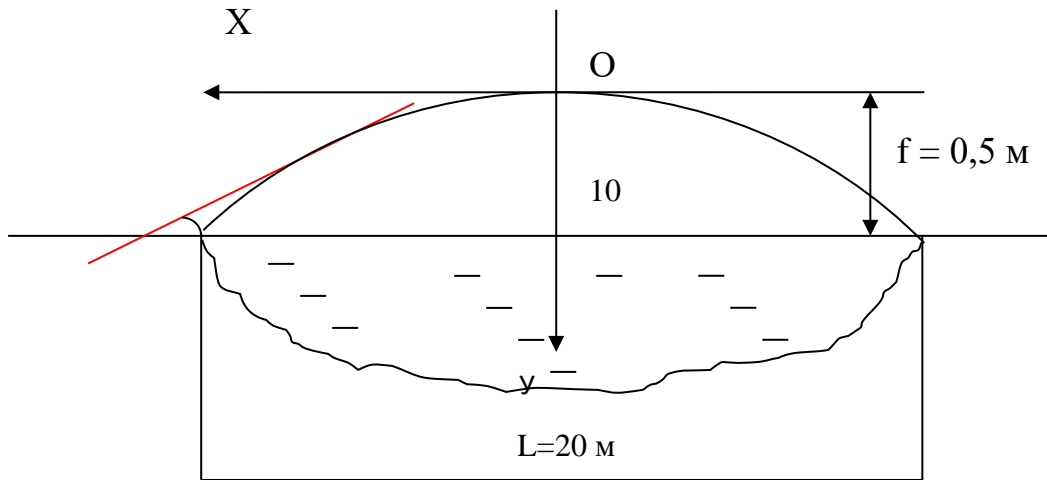
$f''(x) = (0,0034x - 0,18)' = 0,0034 > 0$, следовательно расход горючего при скорости 53 км/ч будет наименьшим.

$$f(53) = 5,43 \text{ л.}$$

Ответ: 5,43 л.

3. При строительстве транспортного кольца необходимо построить эстакаду, которая имеет форму параболы $y(x) = px^2$. Каким надо сделать уклон насыпи,

чтобы переход с эстакады на шоссе был плавным? Пролет эстакады имеет длину $L = 20$ м., стрела провеса $f = 0,5$ м. Предлагается чертёж работы:



Решение:

При решении этой задачи необходимо вспомнить геометрический смысл производной.

Если к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = x_0$ можно провести касательную, непараллельную оси Oy , то значение производной в точке $x=x_0$ равно угловому коэффициенту касательной.

$$k = f'(x_0) \quad k = \operatorname{tg} \alpha \quad \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$$

Если функция дифференцируема в точке, то она и непрерывна в этой точке. Если в некоторой точке к графику функции можно провести касательную, не перпендикулярную оси абсцисс, то в этой точке функция дифференцируема.

Направление подхода к эстакаде должно совпадать с направлением касательной в конце эстакады. Нам необходимо найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y(x) = px^2$ в точке $(10; 0,5)$.

Парабола проходит через эту точку, значит, её координаты удовлетворяют уравнению $y(x) = px^2$, то есть $0,5 = p10^2$, откуда $p = 0,005$.

Геометрический смысл производной заключается в том, что значение производной функции $y=f(x)$ в точке $x=x_0$ равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке x_0 , то есть $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$

Имеем: $y'(x) = (px^2)' = (0,005 x^2)' = 0,01x$

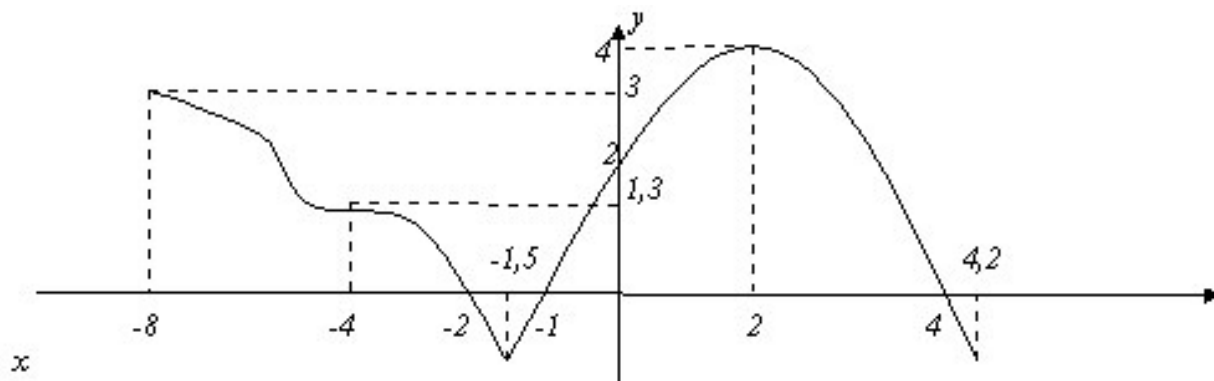
$y'(10) = 0,01 \cdot 10 = 0,1$

$k = \operatorname{tg} \alpha = 0,1$

$\alpha = \operatorname{arctg} 0,1$.

Преподаватель: Молодцы. Справились на отлично. А теперь где производная там и график.

Перед Вами – график процесса разогрева двигателя автомобиля. Исследуя данный график, постарайтесь ответить на поставленные вопросы о свойствах функции. Ниже дана таблица ответов. Впишите в строку «Буква» этой таблицы букву выбранного Вами правильного варианта. Из полученных букв составьте слово, которое обозначает основную деталь двигателя автомобиля.



Прежде чем исследуя функцию, вспомним, основные аспекты, для этого вы используете всего два слова «Да» и «Нет». И так.

1. Верите ли, вы, что область определения функции – это множество всех значений, которые может принимать ее аргумент. (То есть все значения независимой переменной).
2. Верите ли, вы, что функция возрастает, когда при увеличении аргумента увеличивается и сама функция. Проще говоря, здесь работает правило «чем больше, тем больше»: чем больше значение x , тем больше и значение y .
3. Верите ли, вы, что функция считается убывающей, когда при увеличении аргумента функция уменьшается: чем больше x , тем меньше y .
4. Верите ли, вы, что **критическая точка** – это точка, в которой производная существует. (Нет. **Критическая точка** – это точка, в которой производная равна **0** или не существует).
5. Минимумом называют точку на функции, в которой значение функции меньше, чем в соседних точках. (Да).
6. Максимумом называют точку на функции, в которой значение функции больше, чем в соседних точках.
7. В точках экстремумов (т.е. максимумов и минимумов) производная равна нулю.
8. Нули функции — это значения аргумента, при которых функция обращается в нуль.
9. Функция, дифференцируемая в каждой точке x некоторого промежутка оси ox (например, интервала $(a; b)$ или отрезка $[a; b]$) называется дифференцируемой на этом промежутке.

Задание	Вариант ответа	Буква
---------	----------------	-------

1	Область определения функции.	R	Р
		$(-\infty; +\infty)$	П
		$[-8; 4,2]$	К
		Четная	А
		Нечетная	Е
2	Промежутки возрастания функции.	$[-8; -2]$ и $[-1; 4]$	Ж
		$[-1,5; 2]$	О
		$(-1; 2)$	Ч
3	Промежутки убывания функции.	$[-8; 4)$ и $(4; -1,5)$	О
		$[-2; -1]$	Е
		$[-8; -1,5]$ и $[2; 4,2]$	Л
4	Критические точки функции.	$-4; -1,5; 2$	Е
		2	А
		$-8; 2$	И
		$-4; 2$	Б
		4	В
5	Максимум функции.	2	Г
		4,2	Н
		4	Г
6	Минимум функции.	-8	Д
		-1	В
		-1,5	З
7	Нули функции.	$-8; -4; -1,5; 2$	Ю
		$-2; -1; 4$	А
		2	Е
8	Промежутки дифференцируемости функции.	$[-8; -1,5) \cup (-1,5; 4,2]$	Л
		R	А
		$[-8; 4,2]$	О

Таблица ответов:

№	1	2	3	4	5	6	7	8
Буква	К	О	Л	Е	Н	В	А	Л

Преподаватель: Всем известно, что современный автомобиль не может работать без электричества. Так как вы будущие мастера по ремонту автомобилей, то, естественно, будете ремонтировать проводку автомобиля, а может быть станете конструкторами электромобилей. А работа с электрооборудованием предусматривает соблюдение техники безопасности. Проведем исследование – расчет с помощью производной количества опасного, смертельно опасного и неопасного электричества для человека.

Первая группа исследователей вычисляет с помощью производной количество электричества, опасного для человека.

Задача 1. Количество электричества, протекающего через тело человека при замыкании электрической цепи, задаётся формулой $q(t) = 13t^2 + 4t + 1$ (Кл). Найдите силу тока опасного для человека в момент времени $t = 1$ с.

Вторая группа находит частоту переменного тока, который является смертельным для человека.

Задача 2. Вычислить частоту переменного тока, который протекая через тело человека от руки к ноге, задается формулой $x(t) = 70t + t^5$ (м), за время $t = 1$ и является смертельным для человека.

Третья группа определяет силу тока, который не опасен для человека

Задача 3. Количество электричества, протекающего через тело человека при замыкании электрической цепи, задаётся формулой $q(t) = 4t^2 + 11,2t$ (Кл). Найдите силу тока не опасного для человека в момент времени $t = 1$ с.

Сверяем ответы, если задание выполнено правильно, ставим в оценочный лист 1 балл.

А теперь подведем итог. Решим тест. Правильный ответ – 1 балл. Не забываем ставить в оценочные листы.

1. В чём сущность физического смысла

$s'(t)$ (первая производная пути по времени)?

А. Скорость.

Б. Ускорение.

В. Угловой коэффициент.

Г. Не знаю.

2. Точка движется по закону: $S(t) = 2t^3 - 3t$

Чему равна скорость в момент $t_0 = 1$ с?

А.15. Б.12. В.9. Г.3.

«Имя в веках – имя для меня». 2023 год богат событиями. 80 лет Великой Битве под Сталинградом, 60 лет полету первой женщины – космонавту

Валентине Терешковой, 380 лет со дня рождения английского физика – математика, одного из создателей математического анализа Исаака Ньютона. На сегодняшнем уроке мы не можем пройти мимо этих событий. Мы слушаем небольшие сообщения, которые приготовили студенты, выполняя кейс – задания. Естественно все задания тесно связаны с темой нашего урока.

Великая Победа,

Великая война,

Великий подвиг русского народа,

Великая и сильная страна!

Студент: Я очень много думал над тем, как связать математический анализ с великим событием Великой отечественной войны Сталинградской битвой. Перерыл Интернет и нашел. Я думаю, что всем будет очень интересно.

Свою работу я назвал **«Роль математического анализа в Великой Победе под Сталинградом»**.

Сегодня, через десятилетия, празднуя Сталинградскую победу, мы вновь и вновь разумом и сердцем ищем ответ на вопрос: как же они наши деды и прадеды смогли выстоять? Это надо нам, живущим сегодня, понять, почему защитники Сталинграда насмерть вросли в его каменно-твердую почву и сказали: «За Волгой для нас земли нет». Нельзя стать героем по приказу. Сила мысли, знания, соревнование разума, изобретательности и точного расчета математики и ученых математиков – все это приближало Победу.

Президент АН СССР С. И. Вавилов писал: «Почти каждая деталь военного оборудования, обмундирования, военные материалы, медикаменты — все это несло на себе отпечаток предварительной научно - технической мысли и обработки». Появлению на фронтах ракетного оружия предшествовала огромная работа не только конструкторской мысли, но и мысли математиков. Предел функции в управляемом реактивном оружии. Молодые ученые механико-математического факультета А. А. Космодемьянский и Л. П. Смирнов, применив механический смысл производной, выполнили исследования, имеющие непосредственное отношение к первым образцам пороховых ракет, получивших название «Катюши». Первые снаряды для "Катюш" М-13 имели очень большое рассеивание при стрельбе. Решить проблему надо было немедленно, иначе пришлось бы снять эти снаряды с вооружения - слишком большими были расходы металла. Ученые С.А. Христианович, Л.М. Левин и И.И. Слезингер, используя уравнение касательной в теории полета ракет, просверлили боковые отверстия в корпусе снаряда, которые отводили часть пороховых газов. И опять на помощь пришла производная, так как с ее помощью провели математические расчеты, позволяющие производить закрутки снарядов в полете, что в 4 раза повысило кучность. Легендарные танки Т-34-

76, первый массовый вариант легендарного творения харьковского конструктора Михаила Кошкина с 76,2-миллиметровым орудием. Именно эти «тридцатьчетверки» составляли основу танковых войск, участвовавших в Сталинградской битве. К тому же их здесь производили. И в конце лета 1942 года сталинградские «тридцатьчетверки» шли на фронт прямо из заводских цехов. При создании брони и башни танка опять была использовано исследование производной на максимум и минимум, а также физический смысл производной. Мы выяснили, что производная – это скорость. Исследование с помощью производной скорости полета самолетов требовало не только повышения мощности двигателей, но выбора оптимального профиля фюзеляжа и крыльев, а также решения многих других вопросов. Достижение блестящих результатов в совершенствовании боевых самолетов позволило А. С. Яковлеву и С.А. Лавочкину создать грозные истребители, С. В. Ильюшину - неуязвимые штурмовики, А.Н. Туполеву, Н. Н. Поликарпову и В. М. Петлякову - мощные бомбардировщики. Выдающийся советский математик М. В. Келдыш (1911-1978) и возглавляемый им коллектив ученых исследовали самолеты на причины флаттера и шимми, это когда самолеты начинало таскать из стороны в сторону. Созданная учеными математическая теория с применением предельных значений и геометрическим смыслом производной этих опасных явлений позволила авиационной науке защитить конструкции скоростных самолетов от появления таких вибраций. В результате наша авиация во время войны не знала случаев разрушения самолетов по причине неточного расчета конструкций, тем самым были спасены жизни многих летчиков. Продолжать можно до бесконечности. Оставшиеся в живых должны помнить, а мы их внуки и потомки знать, какой ценой была завоевана Победа. До тех пор, пока существует государство, необходимо укреплять его мощь. Поэтому учёные разных областей науки продолжают свою работу в этом направлении. Лучшие конструкторы нашей страны трудятся над созданием военной техники, которая вбирает в себя новейшие высокие технологии, с применением математики.

Преподаватель: Валентина Владимировна Терешкова – Чайка советской космонавтики, первая женщина Земли, в одиночку отправившаяся на космическую орбиту, где пробыла трое суток, совершив 48 витков вокруг нашей планеты. Чайка – позывной Терешковой – отправилась в космос 16 июня 1963 года. А причем здесь производная? Послушаем.

Студент: Дифференциальное и интегральное исчисления являются теоретическим базисом космонавтики. Я сейчас расскажу. В голову Сергея Королева пришла оригинальная идея подготовить женщину-космонавта, чтобы еще больше укрепить авторитет советской космонавтики в мире. Перед полетом изучали адаптационные возможности организма. Обработка медико-биологических сигналов проводилась с помощью математических производных.

Терешкова пилотировала корабль «Восток-6», который стартовал с Байконура. Вся подготовка ракеты-носителя и **космического корабля**, а также старт «Востока-6» прошли без замечаний и каких-либо задержек. Без понятия производная были бы невозможны расчеты прочности корпуса ракеты – носителя, тех скоростей, которые необходимо придавать космической станции, чтобы она могла выполнить порученное ей задание, невозможно осуществить управление ее полетом.

Для выхода на орбиту и «освобождение» от силы земного притяжения расходуется громадное количество топлива.

$m'(t) = v(t)$ Производная массы по времени есть скорость расхода горючего.

Космический корабль при возвращении на землю, попадая в плотные слои атмосферы, сильно разогревается из-за трения о воздух. Если же **космический корабль** запускается на орбиту, то при прохождении через плотные слои атмосферы наблюдается очень слабое **нагревание корабля**.

$$T'(t) = v(t)$$

Производная температуры по времени есть скорость нагрева тела.

По-разному оценивается мощность, необходимая для поддержания условий жизнедеятельности экипажа на борту ОКС.

Производная количества электричества по времени есть сила тока.

$$q'(t) = I(t)$$

Между кораблем и Землей поддерживалась устойчивая связь на коротких и ультракоротких волнах. С помощью производной было проведено исследование колебания звуковой волны от самых низких до высоких частот, что позволило значительно расширить наземную сеть радиосвязи, чем обеспечивалось качество связи и дальность передач.

Целью полета Валентины Терешковой являлись медико – биологические исследования, касающиеся влияния космической среды на работу организма человека в непривычных для него условиях. Запуск женщины в космос давал возможность провести эксперимент в ходе которого сравнивались бы

воздействия условий орбитального полета на мужской и женский организм. И опять на помощь пришла производная, так как с помощью ее вычисляется скорость течения крови в системе кровообращения при длительной невесомости и перехода к перегрузкам и нормальной гравитации, а также скорость восстановительных реакций, и скорость релаксационного процесса восстановления женского организма.

В ходе полета Терешкова наблюдала за функционированием автоматических систем корабля, которые были разработаны так, чтобы масса приборов была наименьшей. И опять применение производной.

Несмотря на трудности полета, удалось рассчитать активность солнца с помощью производной, а также точное выведение корабля на заданные орбиты со специальными мерами защиты от радиации. Это привело к тому, что суммарная доза радиации, полученной Терешковой, была невелика и равнялась 25 миллиард.

Земля – я «Чайка»! Валентина Терешкова стала первой в мире женщиной – космонавтом. Это был звездный час. Вернее, 71 час наедине со звездами и 48 оборотов вокруг Земли. «Эй, небо! Сними шляпу! Я к тебе иду»!

Преподаватель:

Биографы Ньютона рассказывают, что первое время в школе он учился очень плохо. И вот однажды его обидел лучший ученик в классе. Ньютон решил, что самая страшная месть для обидчика — отнять у него место первого ученика. Дремавшие в Ньюtone способности проснулись, и он с легкостью затмил своего соперника. Разбуженного джинна познания нельзя снова спрятать в темную заплесневелую бутылку. С того счастливого для мировой науки эпизода начался процесс превращения скромного английского школьника в великого ученого.

380 лет со дня рождения английского физика – математика, одного из создателей математического анализа Исаака Ньютона.

Студент: Своё имя Исаак Ньютон получил в честь отца. По воспоминаниям современников, в детстве Исаак Ньютон почти ни с кем не общался, проводя время за чтением или мастера самодельные игрушки. Ещё будучи ребёнком, он соорудил водяные часы, которые так точно отмеряли время, что вскоре вся семья стала активно их использовать. В школу юный Ньютон отправился в 12 лет, но спустя 4 года ему пришлось вернуться к матери, с которой возник конфликт: она хотела, чтобы сын вёл хозяйство, его же не интересовало ничего, кроме книг. Когда ему было 18 лет, он успешно окончил школу и поступил в университет Кембриджа, уже тогда очень знаменитый. В университете Исаак Ньютон учился на «бюджетной форме обучения» — за учёбу он не платил, но был обязан отрабатывать его трудом на благо учебного заведения.

Всю жизнь Ньютона вдохновляли великие умы прошлого — Декарт, Галилей и Кеплер. Многие его работы основаны на их трудах. В марте этого же года на недавно основанной (1663) кафедре математики колледжа начались лекции нового преподавателя, 34-летнего Исаака Барроу, крупного математика, будущего друга и учителя Ньютона. Интерес Ньютона к математике резко возрос.

29 октября 1669 года 26-летний Ньютон был избран его преемником, профессором математики и оптики Тринити-колледжа, с высоким окладом 100 фунтов в год. Первые математические открытия Ньютон сделал ещё в студенческие годы. Ньютон разработал дифференциальное и интегральное исчисление одновременно с Г. Лейбницем (немного раньше) и независимо от него. Уже будучи студентом, Ньютон понял, что дифференцирование и интегрирование — взаимно обратные операции.

В 1707 году вышла книга «Универсальная арифметика». В ней приведены разнообразные численные методы. В 1711 году наконец был напечатан, спустя 40 лет, «Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов». В этом труде Ньютон с одинаковой лёгкостью исследует как алгебраические, так и «механические» кривые (циклоиду, квадрат рису). Появляются частные производные. В этом же году выходит «Метод разностей». Надо отметить, что Ньютон не только достаточно полно разработал анализ, но и сделал попытку строго обосновать его принципы. Теория пределов изложена в 11 леммах книги I «Начал»; одна лемма есть также в книге II.

В 1705 году королева Анна возвела Ньютона в рыцарское достоинство. Отныне он сэр Исаак Ньютон. В 1725 году здоровье Ньютона начало заметно ухудшаться, и он переселился в Кенсингтон неподалёку от Лондона, где и скончался 20 (31) марта 1727 года. По указу короля похоронен в Вестминстерском аббатстве.

Надпись на могиле Ньютона гласит: «Здесь покоится сэр Исаак Ньютон, дворянин, который почти божественным разумом первый доказал с факелом математики движение планет, пути комет и приливы океанов. Он исследовал различие световых лучей и появляющиеся при этом различные свойства цветов, чего ранее никто не подозревал. Прилежный, мудрый и верный истолкователь природы, древности и Св. писания, он утверждал своей философией величие Всемогущего Бога, а нравом выражал евангельскую простоту. Пусть смертные радуются, что существовало такое украшение рода человеческого». На статуе, воздвигнутой Ньютону в 1755 г. в Тринити-колледже, высечены стихи из Лукреция: *Qui genus humanum ingenio superavit* (Разумом он превосходил род человеческий).

Преподаватель: Спасибо большое всем выступающим. Очень интересная и познавательная информация. Не забываем поставить себе оценку за урок.

Вы помните, что вначале урока была выдвинута гипотеза. И цель нашего

урока состояла либо эту версию подтвердить, либо опровергнуть. У меня к вам вопрос: «Нужно ли вам изучать производную? Пригодится ли вам это в жизни»? Хочется надеяться, что сегодняшний урок разбудит и у Вас жажду новых познаний, ведь «великий океан истины» по-прежнему расстилается перед вами не исследованным до конца. Пусть ваша производная всегда будет только положительная. Спасибо вам за плодотворную работу. До свидания.