Пусть логарифмическое неравенство удалось свести к виду:

≤

Тогда если > 1, то

≤

Если 0< <1, то ≤

Позволяет использовать эти свойства то, что при > 1 функция y= возрастающая и при 0< <1 функция убывающая. При решении строго неравенства < нестрогие неравенства заменяются строгими.

Далее надо рассмотреть неравенства, в которых присутствуют логарифмы с переменным основанием.

≤

Неравенства вида

≤

В общем случае в неравенствах данного вида логарифмы приводят к одному числовому основанию *а*>0, *а*≠1 и переходят к равносильному неравенству.

≤ 0

Наиболее часто ребята ошибаются в результате неправильного использования формулы:

и

*а>0, а≠*1,  *f(x)>0 и g(x)>0*

Необходимо сделать акцент на том, что в общем случае эти равенства не являются тождествами, поскольку области определения левой и правой частей равенства могут не совпадать. В левой части выражения будет определено при таких значениях *х*, когда и *f(x)<0 и g(x)<0* а правая часть при таких значениях не имеет смысла.

В общем случае переход слева направо может привести к потере решений.

Если даны выражения и мы ходим их преобразовать их в сумму и разность логарифмов, то равносильный переход выглядит так:

и

В общем случае переход справа налево может привести к приобретению посторонних решений. Однако эти посторонние решения могут быть исключены, как не входящие в область определения переменной исходного выражения. Если в логарифмическом неравенстве присутствуют логарифмы с разными основаниями, нужно привести их к одному основанию, используя формулу

*а>0, b>0, c>0 а≠1, c≠1*

В общем случае в неравенствах вида логарифмы приводят к одному числовому основанию *b*>0, *b*≠1, переходят к равносильному неравенству

⇔

Метод расщепления неравенств применяется для решения неравенств вида *f(x) g(x)* v0 или v0, где символ v означает один из знаков неравенств ≥, >, ≤, <.

Например:

Разбиение области допустимых значений неизвестной неравенства на промежутки позволяет упростить некоторые неравенства. В этом случае неравенства решают отдельно на каждом промежутке. Например, надо решить неравенство

112–12*x+*27) ≤ 12 +

Обе части неравенства определены при ϵ (–∞; 3) U (9; +∞)

Имеется 2 случая:

1. <3. Тогда

2–12*x+*27) = –3)(–9) = 3–*x*) + –9)

= 9–)11 – 3–*x*)

113–*x*) + 119–*x*)≤12 + 119–*x*) – 3–*x*) ⇔ 3–*x*)≤12 ⇔ 3–*x*)≤1 ⇔ 0 <3–*х*≤9 ⇔ –6≤*х*<3

1. *х*>9.

2–12*x+*27) = –3) + –9),

= –9)11 – *x*–3)

11*x*–3) + 11*x*–9)≤12 + 11*x*–9) – *x*–3) ⇔ *x*–3)≤12 ⇔ *x*–3)≤1 ⇔ 0 <*х*–3≤9 ⇔ 3< *x* ≤12

Учитывая, что *x*>9 имеем 9< *x*≤12

Объединяя найденные решения, получим *x* є [–6; 3) U (9; 12]

При решении логарифмических неравенств могут пригодиться следующие теоремы (знакомить учащихся с ними можно без доказательства).

Теорема 1. Для чисел *a, b* и *c* таких, что *a*>0, *a*≠1, *b*>0 и *c*>0, верны следующие утверждения:

1. неравенство > и (*a–*1)(*b–c*)>0 равносильны;
2. < и (*a–*1)(*b–c*)<0 равносильны.

Пример. Решим неравенство –4*х*+6)≤+*х*)

Решение:

–4*х*+6)≤+*х*) ⇔ ⇔

⇔ ⇔ ⇔

Ответ: (0; ) U [2;3].

Теорема 2.

При всех допустимых значениях *a, b, c* и *d* верны следующие утверждения:

1. неравенства и (*a*–1)(*b*–1)(*c*–1)(*d*–1)>0 равносильны
2. неравенства и (*a*–1)(*b*–1)(*c*–1)(*d*–1) равносильны

Пример. Реши неравенство:

Решение:

⇔⇔

⇔ ⇔ ⇔ 2<

Теорема 3.

При всех допустимых значениях *a, b, c* верны следующие утверждения:

1. неравенство и неравенство (*a*–1)(*b*–1)(*c*–1)(*c*–*a*)>0 равносильны;
2. неравенство и неравенство (*a*–1)(*b*–1)(*c*–1)(*c*–*a)*<0 равносильны.

Пример. Реши неравенство:

Решение.

⇔ ⇔ ⇔ 1<

Ответ: (1; 2)

Выделим еще типовые выражения и соответствующие им рационализирующие выражения, где *f, h* – выражения с переменной >0, *h*≠1, *f*>0), a – фиксированное число (*a*>0, *a*≠1).

Выражение выражением (*a*–1)(*f*–a)

выражением (*a*–1)(*f*–1),

выражением (*h*–1)(*f*–*g*).

Иногда неравенство *f*(*x*) U *g*(*x*) устроены так, что на всей области допустимых значений неизвестной имеют место неравенства *f*(*x*)≥A и *g*(*x*)≤A при некотором значении A. В этом случае:

а) решение неравенства *f*(*x*)≤*g*(*x*) сводится к нахождению тех значений *x,* для которых одновременно *f*(*x*)=A и *g*(*x*)=A;

б) решение неравенства *f*(*x*)≥*g*(*x*) сводится к нахождению тех решений неравенства *f*(*x*)≥A, для которых определена функция *g*(*x*).

Строгое неравенство вида равносильно совокупности двух систем:

Рассмотрим частные случаи данного неравенства.

1. Неравенство вида

Если числа *c* и *d* связаны одним из условий 1<*c*<*d* или 0<*c*<*d*<1 или , то неравенства равносильно неравенству 0<*h*(*x*)<1.

Если числа *c* и *d* связаны одним из условий 1<*d*<*c* или 0<*d*<*c*<1 или то неравенство равносильно неравенству *h*(*x*)>1

1. Неравенство вида

Если 0<a<1, то неравенство равносильно совокупности

Если для числа *a* выполняется неравенство *a*>1, то неравенство равносильно совокупности

Обязательно надо показать неравенств с периметрами и подчеркнуть, что методы решения остаются теми же.

Пример. Для всех значений параметра *a* реши неравенство

Решение

1. 0<*a*+2<1 ⇔ –2<*a*<–1, имеем ⇔ 0<*x*+3<*a*+2 ⇔

–3<*x*<*a*–1

1. *a*+2>1 ⇔ *a*>–1, ⇔ *x*+3>*a*+2 ⇔ *x*>*a*–1

Ответ: если *a* или *a*=–1, то *x* ;

если –2<*a*<–1, то *x* (–3; *a*–1);

если *a*>1, то *x* (*a*–1; +).