**Формулы** **Герона и их практическое применение**

Рассмотрим задачу Герона, решённую им в работе «О зеркалах».

**Задача 1.** Даны две точки А и В по одну сторону от прямой ℓ*.* Требуется найти на ℓ такую точку Д, чтобы сумма расстояний от А до Д и от В до Д была наименьшей.



*Решение*: пусть точка – точка, симметричная В относительно прямой ℓ. Соединим А с . Тогда точка Д пересечения А с прямой ℓ будет искомой. Действительно, для любой точки , отличной от Д, имеет место равенство:

⎪А⎪+⎪В⎪=⎪А⎪+⎪⎪⎪А⎪=⎪АД⎪+⎪ДВ⎪

Здесь использованы свойства симметрии, из которых следуют равенства ⎪ДВ⎪=⎪Д⎪, ⎪В⎪=⎪⎪и неравенство треугольника ⎪А⎪+⎪⎪>⎪А⎪. Задача решена.

Отметим: искомая точка Д обладает тем свойством, что ∠α =∠β, а также ∠=∠, или угол падения равен углу отражения.

Задачи на нахождение площадей – наиболее распространённые задачи геометрии, при их решении требуется использовать весь арсенал геометрических знаний. Формула Герона воспитывает у учащихся интерес к решению геометрических задач.

**Задача 2.** Возможно, ли найти минимум периметра треугольника, если дана его площадь?

*Решение*: есть правдоподобное предположение: наименьший периметр при данной площади, или наибольшую площадь при данном периметре имеет равносторонний треугольник. Пусть а, b, с – стороны , S – площадь, L = 2р – периметр. По формуле Герона:

= .

Напрашивается теорема о средних: когда p дано, S не должно быть слишком велико; правая часть – произведение. Но как нам применить эту теорему? Вот указание: если равносторонний, то а = b = c, или p – a = p – b = p – c. Поэтому

Т.е. и равенство имеет место только в случае равностороннего треугольника.

Применение формулы Герона распространяется не только на треугольники, но также на четырёхугольники. Рассмотрим задачу, доказывающую это.

**Задача 3.** Возможно, ли найти минимум периметра четырёхугольника, если дана его площадь?

*Решение*: имеется правдоподобное предположение: квадрат; ε – сумма противоположных углов, пусть a и b заключают угол α, c и d – угол β, ε = α + β. Получаем: 2S = absinα + cdsinβ.

Выражая диагональ четырёхугольника, отделяющую α от β, получаем:

. Из трёх соотношений мы можем теперь исключить α и β. Складывая и , получаем



, наконец, замечая разности квадратов и полагая: a + b + c + d = 2p = L, находим . В вероятном случае равенства (квадрат) стороны равны и, следовательно, равны величины:

p – a, p – b, p – c, p – d. Пользуясь этим указанием, получаем

Чтобы оба встретившиеся неравенства стали равенствами, мы должны иметь ε = , a = b = c = d.

Выше были рассмотрены частные случаи применения формулы Герона при решении задач на плоскости: равносторонний треугольник и квадрат. Формулу Герона можно использовать не только в Евклидовой геометрии, но и в стереометрии для нахождения объёмов тел, но для этого необходимо опереться на теорему Пифагора.

**Задача 4.** Найдите объём тетраэдра с прямым трёхгранным углом при вершине О, если даны длины рёбер a, b, c его грани, противолежащей вершине О.



*Решение*: площадь искомого треугольника . По теореме Пифагора получаем:

 , , . Из этих уравнений для задачи находим: .

*, ,*

*V=* *.*

Ответ: V=.

**Новое доказательство формулы Герона**

В школьном курсе формулу Герона мы доказываем с помощью теоремы Пифагора и используем её для нахождения площади треугольника с известными сторонами. Рассмотрим принципиально новое доказательство формулы Герона.

Прежде чем перейти к самому доказательству, решим две задачи.

**Задача 1.** Пусть a, b, c – длины сторон треугольника АВС. Найти длины отрезков, на которые делятся его стороны точками касания вписанной в него окружности.



*Решение*: если M, N, P – точки касания, то, обозначив АМ через *x* и воспользовавшись свойством отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, получим: AP = *x*, BP = BN = *c – x*, CM = CN = *b – x.*

Но BN + NC = *a*. Отсюда *c – x+ b – x = a,*

а поэтому

Таким же образом можно вычислить и длины других отрезков: *BP* = *p – b, CN = p – c.*

**Задача 2.** Дан треугольник АВС; a, b, c – его стороны. Найти длины отрезков, на которые делят стороны треугольника точки касания вневписанных окружностей.



*Решение*: пусть AQ = y, тогда AS = y, QC = CT = b – y, BS = BT, а поэтому c + y = a + b – y.

Аналогично можно вычислить и длины других искомых отрезков**.**

**Переходим к выводу формулы Герона**

Нетрудно заметить, что треугольники AOM и AQ подобны. В самом деле, они прямоугольные и ∠АОМ =∠AQ, так как каждый из них дополняет ∠ОАМ до прямого (∠АОМ +∠ОАМ = 90 как острые углы прямоугольного треугольника АОМ, ∠AQ + ∠ОАМ =∠АО, который равен 90 как угол, образованный биссектрисами двух смежных углов).

Из подобия треугольников АОМ и АQ будем иметь: .

Подставим в это отношение выражения:

 , , получим

 – известная нам формула Герона.

Со времен Герона и до наших дней накопилось большое число красивых, важных, ярких и интересных задач и формул в геометрии, алгебре, физике, но мы до сих пор используем формулы Герона. Задачи Герона помогают учащимся развивать математические способности и умения решать задачи, способствуют развитию логического мышления.