**Решение показательных уравнений введением новой переменной.**

Пример 1. Решить уравнение $64^{х}$ – $2^{3+3х}$ + 12 = 12.

Решение. Поскольку $64^{х}$ = $(8^{х})^{2}$, $2^{3+3х}$ = 8·$8^{х}$, введем новую переменную р = $8^{х}$.

Получим уравнение $р^{2}$ – 8р + 12 = 0, из которого находим р1 = 2, р2 = 6. Поэтому исходное уравнение равносильно совокупности простейших показательных уравнений $8^{х}$ = 2, $8^{х}$ = 6. Корнем первого уравнения является х = $\frac{1}{3}$, а второго – х = $log\_{8}6$.

Ответ: $\frac{1}{3}$; $log\_{8}6$.

Пример 2. Решить уравнение ($\sqrt{7+ \sqrt{48}})^{х}$ + $\sqrt{7- \sqrt{48}})^{х}$ = 14.

Решение. Используя равенство $\sqrt{7- \sqrt{48}})^{х}$ = $\frac{1}{\sqrt{7+ \sqrt{48}})^{х}}$ , введем новую переменную

р = $(\sqrt{7+ \sqrt{48}})^{х}$. В этом случае получим уравнение р + $\frac{1}{р}$ = 14, решая которое, находим его корни, $р^{2}$ -14р + 1 = 0, р = 7 $\pm $ $\sqrt{49-1}$ = 7 $\pm $ $\sqrt{48}$ .

Исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

($\sqrt{7+ \sqrt{48}})^{х}$ = 7 $+$ $\sqrt{48}$; ($\sqrt{7+ \sqrt{48}})^{х}$ = 7 $-$ $\sqrt{48}$.

Корень первого уравнения х = 2, второго – х = -2. Ответ: -2; 2.

Пример 3. Решить уравнение $27^{х}$ – 13·$18^{х}$ – $12^{х}+ 13·8^{х}$ = 0.

Решение. Запишем уравнение в виде $3^{3х}-$ 13·$3^{2х}·2^{х}$ – $3^{х}·$ $2^{2х}+ 13·2^{3х}$ = 0.

Оно является однородным третьей степени относительно степеней $3^{х} и 2^{х}$.

Разделим все члены уравнения на $2^{3х}$ $\ne $ 0 и получим $(\frac{3}{2})^{3х}-$ 13·$(\frac{3}{2})^{2х}$– $(\frac{3}{2})^{х} $+ 13= 0.

Введем новую переменную р = $(\frac{3}{2})^{х}$, уравнение примет вид кубического уравнения

$ р^{3}$ – 13$р^{2}$ – р +13 = 0. Разложим методом группировки левую часть уравнения на множители и найдем его корни:$ р^{3}$ – р – 13$(р^{2}$ – 1) = 0, р(р2 -1) – 13(р2 – 1) = 0,

(р2 -1)(р – 13) = 0, р1 = -1, р2 = 1, р3 = 13. Исходное уравнение равносильно совокупности трех простейших показательных уравнений $\left(\frac{3}{2}\right)^{х}$ = –1, $\left(\frac{3}{2}\right)^{х}$ = 1, $\left(\frac{3}{2}\right)^{х}$ = 13. Первое уравнение корней не имеет, корень второго – х = 0, третьего уравнения х = $log\_{\frac{3}{2}}13. $

Ответ: 0, $log\_{\frac{3}{2}}13. $

 Аналогично уравнениям, которые были рассмотрены в примерах 1, 2, 3, введением новой переменной р = $α$х решение уравнения вида f($α$х) = 0 сводится к нахождению всех положительных корней рk уравнения f(р) = 0 и решению простейших показательных уравнений $α$х = рk.

Пример 4. Решить уравнение $2^{4х+2}·4^{-х^{2}}$ – 5 · $2^{2х-х^{2}}$ + 1 = 0.

Решение. Так как $2^{4х+2}·4^{-х^{2}}$= $2^{-2х^{2}+4х+2}$ = 4·$2^{2(2х-х^{2})},$ то уравнение можно записать так: 4·$2^{2(2х-х^{2})}$ – 5 ·$2^{2х-х^{2}}$ + 1 = 0. Введем новую переменную р = $2^{2х-х^{2}}$. Получим квадратное уравнение 4р2 – 5р +1 = 0, которое имеет корни р1  = 1, р2 = $\frac{1}{4}$. Исходное уравнение равносильно совокупности двух показательных уравнений $2^{2х-х^{2}}$ = 1, $2^{2х-х^{2}}$ = $\frac{1}{4}$. Решая первое уравнение, получаем 2х – х2 = 0, х = 0, х = 2. Решая второе уравнение, находим ещё два корня: 2х – х2 = – 2, х = $1\pm \sqrt{3}$. Ответ: $1-\sqrt{3}$; 0; 2; $1+\sqrt{3}$.

Пример 6. Решить уравнение $4^{\cos(2х)}$ + $4^{cos^{2}x}$ = 3.

Решение. Так как 2$cos^{2}x$ = 1 + $\cos(2x)$, то данное уравнение перепишем в следующем виде $2^{2\cos(2х)}$ + $2^{1+\cos(2х)}$ = 3. Сделаем замену у = $2^{\cos(2х)}$, тогда получим квадратное уравнение у2 + 2у -3 = 0, из которого найдем корни у1 = –3, у2 = 1. Значение у1 = –3, очевидно, постороннее. Поэтому исходное уравнение равносильно уравнению $2^{\cos(2х)}$ = 1, откуда $\cos(2х)$ = 0, х = $\frac{π}{4}$ + $\frac{πn}{2}$ , n$\in Z$. Ответ: $\frac{π}{4}$ + $\frac{πn}{2}$ , n$\in Z$.