**Карточка №1**

Докажите равенство: *cos* ($\frac{3}{2}π+x$)=*sinx*.

Дается образец решения аналогичного примера, в котором просматривается определенный алгоритм.

Решается в соответствии с образцом решения следующего упражнения.

Докажите равенство: *соs (π+x)= - cosx* .

Решение. Воспользуемся формулой *cos (α+β)*= cosα·cosβ - sinα·sinβ. В данном примере α=π; β=*x*.

Подставим эти значения в приведенную выше формулу: *соs (π+x)=* cosπ · cosx - sinx·sinπ.

Значения cosπ и sinπ известны: cosπ=-1; sinπ=0.

Подставив эти значения, получим: *соs (π+x)=*-1 · *cosx –* 0 · sinx = - cosx (любое число умноженное на нуль, дает в результате нуль). Итак, *соs (π+x)= - cosx* .

**Карточка№2**

Вычислите: *sin*15°.

Дается план решения, сопровождаемый дополнительными разъяснениями.

Решение:

1. 15°= 45°- 30°.
2. *sin*15° = *sin*(45°-30°).
3. Воспользуйтесь формулой: sin(α+β)=sinα·cosβ+sinβ·cosα, заменив α=45°,β=30°.
4. В полученном выражении замените числовыми значениями: sin30°,cos30°,sin45°,cos45°.
5. Произведите вычисления, применяя правила: $\sqrt{a}$·$ \sqrt{b}= \sqrt{ab}$; $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$.

**Карточка№3**

Вычислите: cos$\frac{7}{10}$π·cos$\frac{π}{5}$ + sin$\frac{7}{10}$ π ·sin$\frac{π}{5}$

Дается образец с полным разъяснением выполняемых преобразований, а затем приводится образец решения без дополнительных сведений по ранее изученному материалу. Решается в соответствии с приведенным ниже образцом решения упражнения.

Упростите выражения: cos$\frac{3π}{8}$· cos$\frac{π}{16}$ + sin$\frac{3π}{8}$ · sin$\frac{π}{16}$

Решение: cos$\frac{3π}{8}$ · cos$\frac{π}{16}$ + sin$\frac{3π}{8}$ · sin$\frac{π}{16}$ = cos($\frac{3π}{8}-\frac{π}{16} $)

Произведем вычисления:$ \frac{3π}{8}-\frac{π}{16} $ = $\frac{6π}{16}-\frac{π}{16}$= $\frac{6π-π}{16}$=$\frac{5π}{16}$ (общий знаменатель 16, дополнительный множитель для первой дроби 16:8=2).

Получили: cos$\frac{3π}{8}$· cos$\frac{π}{16}$ + sin$\frac{3π}{8}$ · sin$\frac{π}{16}$ = cos($\frac{3π}{8}-\frac{π}{16} $) = $\frac{cos5π}{16}$

Рассмотрим решение упражнения.

Упростите выражение: cos$\frac{π}{16}$· cos$\frac{3π}{8}$ + sin$\frac{π}{16}$ · sin$\frac{3π}{8}$

Решение: cos$\frac{π}{16}$· cos$\frac{3π}{8}$ + sin$\frac{π}{16}$ · sin$\frac{3π}{8}$ = cos($\frac{π}{16}$ - $\frac{3π}{8}$)

Произведем вычисления: $\frac{π}{16}$ - $\frac{3π}{8}$ = $\frac{π-6π}{16}$ = $-\frac{5π}{16}$

Получили: cos($\frac{π}{16}$ - $\frac{3π}{8}$) = cos($-\frac{5π}{16}$) = $\frac{cos5π}{16}$, т.к. косинус – четная функция, т.е. cos (-x)=cos (x).

**Карточка№4**

Вычислите: *cos (α+β)*, если известно, что sinα = sinβ = $\frac{5}{13}$, 0$<α<\frac{π}{2}$ и $\frac{π}{2}<β<π$

Даются план решения и отдельные указания, вытекающие из диагностирования возможных ошибок.

Решение:

1. В формуле *cos (α+β)*= cosα·cosβ - sinα·sinβ выделить функции, значения которых неизвестны.
2. Значения этих функций находятся из соотношения $cos^{2}x$ + $sin^{2}x$ = 1, откуда $\cos(x= \pm \sqrt{1-sin^{2}x})$.

При определении знака функции следует учесть ее знак в данной четверти:$0<α<\frac{π}{2}$, т.е. угол α – в … четверти;

$\frac{π}{2}<β<π$, т.е. угол β – в … четверти.

1. Подставьте соответствующие значения функций в формулу *cos (α+β)*= cosα·cosβ - sinα·sinβ и произведите вычисления.

**Карточка№5**

Вычислите sin*(α+β),* если известно, что $cosα=cosβ= -\frac{4}{5}$, α во II четверти, β в III четверти.

Решение:

1. В формуле sin*(α+β)*= sinα· cosβ + sinβ· cosα выделить функции значения которых неизвестны.
2. Значения этих функций находятся из соотношения $cos^{2}x$ + $sin^{2}x$ = 1, откуда $\sin(x= \pm \sqrt{1-sin^{2}x})$ .При определении знака функции следует учесть ее знак в данной четверти.
3. Подставьте соответствующие значения функций в формулу *cos (α+β)*= cosα·cosβ - sinα·sinβ и произведите вычисления. При вычислениях учтите, что квадрат любого числа есть число неотрицательное.

**Карточка№6**

Упростите выражение:$ \frac{sin35°cos20°-cos35°sin20°}{cos46°cos29°-sin46°sin29°}$

Даются только отдельные указания по использованию сведений из теории:

1). Преобразуйте числитель и знаменатель дроби по формулам;

2). Для упрощения соотношения, полученного в знаменателе, используйте формулу:$cosx=\sin(x (90°-x))$ – эта формула изучалась в 9-м классе. Например, $cos70°=\sin(\left(90°-20°\right))=sin20°$.

**Карточка№7**

Упростите выражение: cos(α+$ \frac{π}{3}$) - cos(α-$ \frac{π}{3}$)

Решение:

1. Преобразуйте данное выражение, используя формулы *cos (α+β)*=… и *cos (α-β)*=… .
2. Раскройте скобки (не забудьте изменить знаки у членов, заключенных в скобки перед которой стоит знак «минус»).
3. Сделайте приведение подобных членов.
4. Замените sin$ \frac{π}{3}$ его числовым значением и найдите произведение числовых множителей.

**Карточка№8**

Упростите выражение: $\frac{cosαcosβ-cos⁡(α+β)}{\cos(\left(α-β\right))-sinαsinβ}$

Указания:

1. Замените:

а). в числителе $\cos(\left(α+β\right))$;

б). в знаменателе $\cos(\left(α-β\right))$ по соответствующим формулам.

1. Раскройте скобки и сделайте приведение подобных членов (не забудьте изменить знак у членов, заключенных в скобки, перед которой стоит знак «минус»).
2. Воспользуйтесь формулой tg α=$\frac{sinα}{\cos(α)}$; ctg α=$\frac{cosα}{\sin(α)}$.

**Карточка №9**

Упростите выражение: $\frac{\sin(\left(α+β\right)+sin⁡(α-β))}{\cos(\left(α+β\right))+cos⁡(α-β)} $.

Указания:

1. Замените:

а) в числителе $\sin(\left(α+β\right) и sin(α-β))$;

б) в знаменателе $\cos(\left(α+β\right))и cos(α-β)$.

1. Сделайте приведение подобных членов (отдельно в числителе и отдельно в знаменателе).

Если возможно, произведите сокращение получившейся дроби.

1. Воспользуйтесь формулами.

**Карточка№10**

Докажите тождество: *cos (α+*$ β$*)* · *cos (α-*$ β$*)*=$cos^{2}β-sin^{2}α$.

Указания:

1. Замените *cos (α+*$ β$*)* и *cos (α-*$ β$*)* по соответствующим формулам.
2. Произведите умножение, воспользовавшись формулой разности квадратов: (a+b)·(a-b)=$a^{2}-b^{2}$. Например: (ac+bd)·(ac-bd)=$(ac)^{2}-(bd)^{2}=a^{2}c^{2}-b^{2}d^{2}$.

В данном случае: a= cosα; c= cosβ; b= sinα; d= sinβ.

1. Произведите замену: $cos^{2}α$ = 1- $sin^{2}α$, $sin^{2}β=1-sin^{2}β$. Возможна и другая замена:$ cos^{2}β=1- sin^{2}β$, $cos^{2}α=1- sin^{2}α$.

**Карточка№11**

Докажите тождество: $\frac{cos⁡(α+β)}{sinα∙sinβ}=ctgα∙ctgβ-1$.

Рассматривается новый для студентов прием решения, аналогичный тому, который в дальнейшем будет применяться при решении однородных тригонометрических уравнений.

Указания:

1. Замените $\cos(\left(α+β\right))$=… .
2. Разделите каждый член числителя и знаменателя дроби на произведение sinα·sinβ.(Если числитель и знаменатель дроби разделить на одно и то же число, не равное нулю, то величина дроби не изменится- основное свойство дроби.)

**Карточка№12**

Вычислите: tg75°

Даются отдельные указания по порядку выполнения упражнения о подробные пояснения о правилах выполнения преобразований, изучаемых в 9-летней школе:

1. 75°=45°+30°.
2. tg75°= tg(45°+30°). Воспользуйтесь формулой tg$\left(α+β\right)$=… , где α=45°, β=30°.
3. В полученную формулу tg(45°+30°)=… подставьте числовые значения входящих в нее функций и произведите вычисления.

Вычисления произведите по следующему образцу:

$$\frac{\frac{2}{1}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{2}{1}-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}÷\frac{2-\sqrt{2}}{2}=\frac{(2+\sqrt{2})2}{2(2-\sqrt{2})}=\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=$$

Приведем к общему знаменателю и произведем сложение в числителе и вычитание в знаменателе данной дроби. Черта дроби означает деление. По правилу деления дробей: $\frac{a}{b}÷\frac{c}{n}=\frac{a∙n}{c∙b}$ .

Преобразуем получившееся выражение:

$$=\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)(2+\sqrt{2})}{\left(2-\sqrt{2}\right)(2+\sqrt{2})}=\frac{(2+\sqrt{2})^{2}}{(2)^{2}-(\sqrt{2})^{2}}=\frac{2^{2}+2∙2\sqrt{2}+(\sqrt{2})^{2}}{4-2}=\frac{4+4\sqrt{2}+2}{2}=\frac{6+4\sqrt{2}}{2}=\frac{2(3+2\sqrt{2})}{2}=3+2\sqrt{2}$$

Умножим числитель и знаменатель дроби на сумму $(2+\sqrt{2})$- величина дроби не изменится.

В числителе получаем произведение двух одинаковых множителей, т.е. квадрат двучлена.

В знаменателе получаем произведение разности двух чисел на их сумму, т.е. разность квадратов этих двух чисел.

Выносим общий множитель за скобки.

**Карточка№13**

Вычислите: $tg\left(\frac{π}{3}+α\right),если sinα=\frac{3}{4} и \frac{π}{2}<α<π$.

Указания:

1. $tg\left(\frac{π}{3}+α\right)= tg\left(α+\frac{π}{3}\right)$.
2. В формуле tg$=\left(α+β\right)$=… ,замените β=$\frac{π}{3}$.
3. Найдите значение cosα из соотношения $sin2x+cos2x=1$, откуда cos *x* =$\pm \sqrt{1-cos^{2}x}$. $\frac{π}{2}<α<π$, т.е. угол α – в … четверти, в которой косинус имеет знак «…». Следовательно, значение корня берем со знаком «…».

Подробно рассматривается новый прием решения.

Указания: рассмотрим левую часть данного тождества.

1. Зная значения cosα и sinα, можно вычислить значение $tg$α по формуле: $tg$α= … .
2. Подставим в формулу : $tg\left(\frac{π}{3}+α\right)$ числовые значения $tg$α и $tg$ $\frac{π}{3}$ и произведем вычисления.

При выполнении вычислений воспользуйтесь образцом решения следующего примера:

$\frac{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}-\frac{4}{\sqrt{5}}}{\frac{\sqrt{5}}{1}+\sqrt{2}∙\frac{4}{\sqrt{5}}}=\frac{\frac{\sqrt{10}-4}{\sqrt{5}}}{\frac{\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{10}-4}{\sqrt{5}}÷\frac{\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{(10+4)\sqrt{5}}{\sqrt{5}(\sqrt{5}+4\sqrt{2})}=\frac{\left(\sqrt{10}-4\right)(\sqrt{5}-4\sqrt{2})}{\left(\sqrt{5}+4\sqrt{2}\right)(\sqrt{5}-4\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{50}-4\sqrt{20}-4\sqrt{5}+16\sqrt{2}}{(\sqrt{5})^{2}-(4\sqrt{2})^{2}}=\frac{\sqrt{25∙2}-4\sqrt{4∙5}-4\sqrt{5}+\sqrt{2}}{5-16∙2}=\frac{5\sqrt{2}-8\sqrt{5}-4\sqrt{5}+16\sqrt{2}}{-27}=\frac{12\sqrt{5}-21\sqrt{2}}{27}=\frac{3(4\sqrt{5}-7\sqrt{2})}{27}=\frac{4\sqrt{5}-7\sqrt{2}}{9}$.

 Приводим дроби к общему знаменателю, отдельно в числителе и знаменателе.

Используем правило: $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$.

Производим деление дробей по правилу: $\frac{a}{b}÷\frac{c}{n}=\frac{a∙n}{c∙b}$ . Освободимся от иррациональности в знаменателе получившейся дроби, умножив ее числитель и знаменатель на одно и то же число: ($\sqrt{5}-4\sqrt{2}$). В знаменателе получим разность квадратов.

**Карточка№14**

Вычислите $tg$(45°-α), если $tg$α=7

Даются краткие указания: в формуле tg$\left(α-β\right)$=… замените α=45°, β=α и подставьте соответствующие значения tg45° и tgα в формулу $tg$(45°-α)=… .

**Карточка№15**

Докажите тождество: $\frac{tgα+tg(45°-α)}{1-tgα∙tg(45°-α)}=1$.

1. Определите, тангенсы, каких углов входят в числитель и знаменатель дроби? Выпишите эти углы.
2. Сравните эту дробь с формулами tg$\left(α+β\right)$и tg$\left(α-β\right)$:

а) обратите внимание на числитель – содержит он сумму или разность тангенсов выписанных вами углов;

б) какой можно сделать предварительный вывод о том, какая из формул tg$\left(α+β\right)$ или tg$\left(α-β\right)$ может соответствовать левой части данного тождества;

в) чтобы убедиться в правильности своего предварительного вывода, следует проверить соответствие выбранной вами формулы знаменателю дроби.

3. Убедившись в том, что левая часть тождества соответствует формуле tg$\left(α…β\right)$=…, замените в ней α=…, β=… выписанными раньше углами и произведите вычисления в скобках tg(…)= tg… . У вас получится угол, тангенс которого вам известен.

**Карточка№16**

Известно, что sinα= 0,6; 0<α<$\frac{π}{2}$.

Вычислить: sin2α, cos2α, tg2α.

1. Выпишите каждую из формул: sin2α=…, cos2α=…, tg2α=… .
2. Выделите функцию, значение которой неизвестно, и найдите ее значение из соотношения sin2 х + cos2х=1. Так как 0<α<$\frac{π}{2}$, т.е. угол α – в … четверти, значение этой функции берется со знаком … .
3. В формулу sin2α=… подставьте значения подходящих в нее функций и произведите вычисления.
4. В формулу cos2α=… подставьте значения входящих в нее функций и произведите вычисления.
5. tg2α можно вычислить двумя способами. Вычислите значение tg2α двумя способами и сравните результаты.

**Карточка№17**

Известно, что cosα= - $\frac{5}{13}$ и sinα>0.

Вычислить: sin2α, cos2α, tg2α.

1. Выпишите каждую из формул: sin2α=…, cos2α=…, tg2α=… .
2. Выделите функцию, значение которой неизвестно, и найдите ее значение из соотношения sin2х + cos2х=1. Так как по условию sinα и cosα имеют различные знаки и при этом sinα>0, а cosα<0, то угол α находится в … четверти.
3. В формулу sin2α=… подставьте значения подходящих в нее функций и произведите вычисления.
4. В формулу cos2α=… подставьте значения входящих в нее функций и произведите вычисления.
5. tg2α можно вычислить двумя способами. Вычислите значение tg2α двумя способами и сравните результаты.

**Карточка№18**

Докажите: sin15°- cos15°=$\frac{1}{4}$.

Дается новый прием решения по образцу. Упростите выражение sin75°· cos75°.

Решение:

1. Сравнивая данное выражение с формулами двойного аргумента, замечаем, что оно соответствует формуле sin2α=2 sinα · cosα, где α=75°.
2. Чтобы получить формулу синуса двойного аргумента, в данном выражении должен быть множитель 2. Чтобы значение выражения не изменилось, нужно его умножить и разделить на 2:$\frac{2sin75° ∙cos75°}{2}$ .
3. В числителе получаем формулу синуса двойного аргумента:

$$\frac{sin2∙75°}{2}=\frac{sin150°}{2}=\frac{1}{2}∙sin150°=\frac{1}{2}∙\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

$sin150°=\frac{1}{2}$

**Карточка№19**

Упростите выражение: 1-2$sin^{2}α$+*cos*2*α.*

Указания:

Решить можно двумя способами:

1-й способ: использовать формулу: cos2α=: $cos^{2}α$ - $sin^{2}α$ и привести подобные члены.

2-й способ: заменить первый и последний члены формулами $sin^{2}x+ cos^{2}x=1$ и cos2α=: $cos^{2}α$ - $sin^{2}α$, сделать приведение подобных членов, вынести общий множитель за скобки.

Возможны и иные способы. Если сможете, решите пример различными способами.

**Карточка№20**

Упростите выражение: ($cos^{2}α+2sinαcosα-sin^{2}α$)2 .

Указания:

1. Члены, стоящие в скобках, можно заменить на формулу: sin2α= 2 sinα · cosα.
2. Возведите в квадрат по формуле: $(a+b)^{2}=a^{2}+2ab+b^{2}$ двучлен, получившийся в скобке.

При подготовке к проверочной работе по формулам приведения тригонометрических функций могут быть использованы следующие карточки

**Карточка№1**

Упростите выражения: 1) $tg(\frac{3π}{2}+α)∙tg(π-α)$; 2) $tg (\frac{π}{2}+α)∙tg(2π+α)$.

1. Рассмотрим выражение: $tg(\frac{3π}{2}+α)$:

а) так как угол $tg(\frac{3π}{2}+α)$ находится в 4-й четверти, тангенс этого угла отрицателен (знак синуса совпадает со знаком оси OY, т.е. отрицателен, знак косинуса совпадает со знаком оси OX), т.е. здесь он положителен, тогда $tg(\frac{3π}{2}+α)$=$\frac{sin(\frac{3π}{2}+α)}{cos(\frac{3π}{2}+α)}<0$;

б) так как в формуле приведения, которую мы рассматриваем, значение аргумента получается прибавлением к α величины $\frac{3π}{α}$ (т.е. числа π, взятого нечетное число раз), функция меняется на «кофункцию», т.е. тангенс – на котангенс;

в) в результате имеем $tg(\frac{3π}{2}+α)$= -ctgα.

 2. Рассмотрим выражение $tg(π-α)$:

а) так как угол $tg(π-α)$ находится во второй четверти, тангенс этого угла отрицателен($y>0, x<0$);

б) так как π=$\frac{2π}{2}$, т.е. $\frac{π}{2}$ взято четное число раз, название функции не меняется. Имеем $tg(π-α)$= - $tgα$.

3. Получили: $tg(\frac{3π}{2}+α)∙tg(π-α)$= -ctg α(-tg α)= ctgα·tgα. Вспомним эту формулу. Если вы ее забыли, то легко можете ее получить, заменив $tgα=\frac{\sin(α)}{\cos(α)}$ и $ctgα=\frac{cosα}{sinα}$.

Второе упражнение выполните самостоятельно.

**Карточка№2**

Упростите выражения: 1) $cos⁡(α-\frac{π}{2})∙sin⁡(2π+α)$; 2) $sin⁡(α-\frac{3}{2π})∙cos⁡(4π+α)$.

1. Рассмотрим выражение $cos⁡(α-\frac{π}{2})$:

а) значение аргумента $(α-\frac{π}{2})$ отличается от того, которое имеется в формуле приведения, где дается аргумент $⁡(\frac{π}{2}-α)$. Чтобы получить нужное значение аргумента, надо умножить данное значение на «-1» - тогда оно станет равным $⁡(\frac{π}{2}-α)$. Так как косинус - четная функция , при умножении его аргумента на «-1» знак функции не изменится, т.е. $cos⁡(α-\frac{π}{2})$=$ cos⁡⁡(\frac{π}{2}-α)$;

б) полученный угол $⁡(\frac{π}{2}-α)$ находится в первой четверти, где значения всех тригонометрических функций положительны;

в) так как в формулу приведения в значение аргумента число $\frac{π}{2}$ входит нечетное число раз (один раз), то функция меняется на «кофункцию», т.е. косинус - на синус;

г) имеем: $cos⁡(α-\frac{π}{2})$= $cos⁡⁡(\frac{π}{2}-α)$=$ sinα$.

2. Рассмотрим $sin⁡(2π+α)$: $2π$- период синуса, т.е. от прибавления к аргументу α числа 2πk, где k – любое целое число, значение синуса не изменится. Имеем: $sin⁡(2π+α)$= $sinα$.

3. Получили: $cos⁡(α-\frac{π}{2})∙sin⁡(2π+α)$= $sinα·$ $sinα=$ $sin^{2}α$.

**Карточка№3**

Вычислите выражения: 1). t*g18°*·tg288°; 2).$\frac{ctg372̊̊°}{ctg258˚}$Рассмотрим tg288°; А) угол 288° можно записать в виде суммы (270°+18°); Б) данный угол 288°=270°+18° находится в 4-й четверти, где тангенс отрицателен (в 4-й четверти ось OYотрицательна, значит, знак синуса отрицателен; Ось OX положительна , значит, знак косинуса положителен); $tg(270°+18°)=\frac{sin⁡(270°+18°)}{cos⁡(270°+18°)}$<0;

В) в полученной формуле в значение аргумента число 90°($\frac{π}{2}$) входит нечетное число раз (270°=90°·3), поэтому функция меняется на «кофункцию», т.е. тангенс – на котангенс. Имеем: tg(270°+18°)= - ctg 18°;

Г) получили: tg 18° tg288°=tg(270°+18°)=-tg18° ctg18°=-1 (по формуле tga·ctga = -1).

Второе упражнение выполните самостоятельно.

Дифференцированный подход должен предусматривать и предварительную подготовку студентов к изучению нового материала. Известно, что для выполнения заданий на исследование функции с помощью производной необходимо умение решать неравенства второй степени с одной переменной. Учитывая, что данный материал входит в программу девятилетней школы, т.е. с момента его изучения прошло много времени, карточки-инструкции могут содержать подробные сведения о методах решения таких неравенств.

Приводим некоторые материалы для работы со студентами по подготовке их к усвоению нового материала,;

**Карточка-инструкция по теме «Решение неравенств второй степени с одной**

**переменной».**

Неравенства вида ах2+ Ьх +с > 0 и ах2 + Ьх + с < 0 , где а $\ne $ 0 , называются неравенствами второй степени с одним неизвестным (ах2 + Ь + с $\geq $ 0 -нестрогое неравенство).

Для решения неравенств второй степени рассмотрим расположение графика квадратичной функции у = ах2 + Ьх + с относительно оси X.

Это расположение определяется двумя условиями: знаком коэффициента а квадратичного трехчлена у = ах2 + Ьх + с и значением дискриминанта D (D = Ь2 - 4ас). От знака коэффициента а зависит направление «ветвей» параболы: если а > 0, то они

направлены вверх, если а< 0, то они направлены вниз. От знака дискриминанта D зависит положение параболы относительно оси X: если D > 0, то парабола имеет с осью X две общие точки (пересекает ось X в этих точках); если D = 0 - имеет одну общую точку (касается оси X в этой точке): если D < 0 - не имеет общих точек.

Различные виды расположения графиков функции относительно оси X показаны на рис. 191 учебного пособия, где ХО - абсцисса вершины параболы.

Рассмотрим решение неравенств.

1. 6х2 - 7х + 2 > 0. Решение: 1) находим дискриминант: D = b2 - 4ас. В нашем случае: а = 6, b = -7, с = 2,

*D = 49 - 4* $∙$ *6 ∙ 2 = 49 - 48 = 1;*

1. *Находим корни квадратного трехчлена по формуле x=*$\frac{-b\pm \sqrt{D}}{2a}$: x=$\frac{7\pm \sqrt{1}}{2∙6}=\frac{7\pm 1}{12}, x\_{1}=\frac{7-1}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}, x\_{2}=\frac{7+1}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$
2. *Покажем примерное расположение графика данной квадратичной функции относительно оси X:*

*а) «ветви» параболы направлены вверх, так как а = 6 > 0;*

*б) парабола пересекает ось X в двух точках, так какD= 1 > 0: точки пересечения* $\frac{1}{2}$ *и*$ \frac{2}{3}$*.*

******

*- - 8 6 –*

*Рис.2*

*в) отметим точки пересечения параболы с осью X и наметим направление «ветвей»параболы (рис. 1). Эти точки разбивают прямую на три промежутка. В промежутке от*$ \frac{1}{2}$ *до* $\frac{2}{3}$ *трехчлен 6х2 — 7х + 2 отрицателен (парабола расположена под осью X), а в двух других положителен. Следовательно, решение неравенства 6х2 — 7х + 2 > 0: х<* $\frac{1}{2}$ *и х>*$\frac{2}{3}$*.*

* 1. *Решить неравенство 4х2 — 4х + 15 < 0. Решение:*
		1. *D = Ь2 - 4ас; а = 4, b = -4, с = 15.*

*D = 16 - 4 • 4 • 15 = 16 - 240 = -224 < 0;*

* + 1. *трехчлен действительных корней не имеет;*
		2. *«ветви» параболы направлены вверх и парабола не имеет общих точек с осью ОХ, т.е. при любых значениях х трехчлен 4х2 — 4х + 15 положителен(на рис. 191 этот случай(3)). Значит, неравенство 4х2 — 4х + 15 < 0 решений не имеет.*
	1. *Решение неравенства: 4х2 - 4х + 15 > 0.*

*1) и 2) этапы решения аналогичны предыдущему примеру;*

*3) при любых значениях х трехчлен положителен (парабола расположена над осью ОХ). Значит данное неравенство справедливо при всех действительных х, что можно записать так: (—*$\infty $*;*$\infty $ *) или х*$ \in $ *R (R- обозначение множества действительных чисел).*

* 1. *Решение неравенства — х2 — 2х + 48* $\geq $ *0.*

*Решение.*

*Данное неравенство можно заменить равносильным ему неравенством х2 + 2х — 48< 0 (если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному):*

*1)a = 1,b=2, с = -48. D = b2 - 4 ас, D = 4-4*$∙$*1*$∙$ *(-48) = 4+192 = 196;*

2) x=$\frac{-b\pm \sqrt{D}}{2a}$; x= $\frac{-2\pm \sqrt{196}}{2а}=\frac{-2\pm 14}{2}, x\_{1}=-8, x\_{2}=6.$

3) (рис.2). Ответ: -8≤х≤6. (Обратите внимание на то, что концы промежутка входят в множество решений неравенства, так как оно не строгое.)

**5.** Рассмотрим решение неравенства $x^{2}-4x>0.$

1) D=16 - 4$∙1∙4=0$;

2) x= $\frac{4\pm 0}{2}=2; х=2, $

3) a=1$>0$ - ветви параболы направлены вверх и парабола имеет с осью Х одну общую точку х=2 (парабола касается оси Х в этой точке), рис.3. Как видно из рисунка, при всех действительных значениях х, кроме х=2, трехчлен $x^{2}-4x+4$ положителен. В точке х=2, трехчлен равен нулю. Ответ: все действительные числа, кроме х=2.

 *2 х*

Рис.3

Если неравенство имеет вид $x^{2}-4x+4\geq 0,$ его решением будет множество действительных чисел: *(—*$\infty $*;*$\infty $ *).*

Если неравенство имеет вид $x^{2}-4x+4<0$, оно не имеет решений.

Если неравенство имеет вид $x^{2}-4x+4\leq 0$, его решение будет состоять из одного числа 2.

Решите самостоятельно неравенства:

а) $x^{2}+7x+10>0;$

б) $2x^{2}+5x-3<0;$

в) $x^{2}+2x+1>0;$

г) $x^{2}+4x+5<0.$

**Карточка-инструкция по теме: «Метод интервалов» содержит не только образцы решения, но и некоторые сведения из теории.**

Пусть дано неравенство вида ($x-x\_{1}$)($x-x\_{2}$)($x-x\_{3}$)…($x-x\_{n-2}$)($x-x\_{n-1}$)($x-x\_{n>0}$), где $ƒx=x-x\_{1}…x-x\_{n}$- многочлен*.* Вся числовая прямая этими корнями будет разбита на промежутки, где справа располагаются все числа, большие, чем наименьший корень. В каждом из этих интервалов многочлен (в силу своей непрерывности) имеет определенный знак, одинаковый для каждой точки данного интервала. При переходе из интервала в интервал, т. е. при переходе х через одно из значений х1, х2, х3...$x\_{n-2}$, $x\_{n-1},x\_{n},$ знак многочлена меняется. Таким образом, достаточно установить знак многочлена в одном из таких интервалов. Если хn - наибольший по величине корень, то при х > хn все сомножители в левой части неравенства будут положительны. Действительно, если х > хn, то х – хn > 0 (из большего числа вычли меньшее), а тогда и все другие разности х — х1, х - x2 ... будут тоже

$x\_{n-2}$ *+* $x\_{n-1}$$x\_{n}$ *+*

х1 х2 х3 \_\_ $-$ x

Рис.4

положительны, так как в каждой из них производится вычитание из большего числа меньшего (если *х > хn ,*а *хn -* наибольший по величине корень, то и подавно *х* > *х1,х* > *х2,х > х3* ...). Значит, на числовой прямой в интервале *(хn;* ∞) многочлен *(х — х1)(х - х2)(х -x3) ... (х* — *хn-1)(х* — *xn)* положителен - ставим в этом интервале знак «плюс», в следующем интервале (хn-1;xn) «минус» затем «плюс», затем «минус» и т.д. Решением данного неравенства будут промежутки, в которых стоит знак «плюс».

1. Рассмотрим решение неравенства: *(х —* 3)(х + *2)(х -* 5) *>* 0.

Решение. Корнями многочлена с одной переменной (х - 3)(х + 2) *(х -* 5) являются значения переменной, при которых значение многочлена равно нулю. Значит, для нахождения корней данного многочлена нужно решить уравнение *(х* — 3) *(х* + 2) *(х* — 5) = 0.

Рис.6

В левой части этого равенства - произведение трех множителей. Произведение равно нулю тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Приравнивая к нулю отдельно каждый из множителей, получаем три корня: 1)х — 3 = 0,х = 3; 2) х + 2=0,х = -2; 3) *х* — 5 = 0, x = 5. Отметим эти значения на числовой прямой: они разобьют эту прямую на четыре промежутка, в каждом из которых многочлен имеет определенный знак (рис. 5). Наибольший корень *х* = 6. При всех значениях *х >* 5 многочлен будет положителен, так как каждый из множителей положителен (проверьте вычислениями). Ставим справа от *х = +*5 в интервале (5; ∞) знак «плюс», в следующем промежутке - «минус», в следующем за ним -«плюс» и в последнем - «минус». Решением данного неравенства будут промежутки, в которых стоит знак «плюс», т. е. (—2; 3) и (5;∞).

2.Рассмотрим решение неравенства:$\frac{\left(x-4\right)(x+1)}{\left(2x-5\right)(3-x)}$ < 0.

Изменим, знак у двучлена (3 - *х)*, поменяв одновременно и знак неравенства $\frac{\left(x-4\right)(x+1)}{\left(2x-5\right)(x-3)}$>0. Как известно, правило знаков при делении то же самое, что и при умножении, поэтому будем рассматривать знак выражения *(х -* 4)(х + *1)(2х* - 5)(х - 3) на различных промежутках числовой прямой. Находим корни уравнения *(х — 4)(х +* 1)(2х-5)(х-3)=0:1) *х -* 4 = 0,x = 4; 2) *х +* 1 = 0,х = -1; 3) *2х -* 5 = 0,х =2,5; 4)x-3=0, x=3.

Отметим эти числа на числовой прямой (рис. 6). Наибольший корень *х =* 4. Ставим справа от *х =* 4 знак «плюс», в следующем за ним промежутке - «минус», далее - «плюс», затем -«минус» и опять - «плюс». Решением данного неравенства будут промежутки, в которых стоит знак «плюс»: (-$\infty $; -1), (2,5; 3), (4;∞).

Рис.5

 + +

 - -2 3 – 5 x

Рис.5

+ + +

 -1 -2,5 3 - 4 x

Рис.6

**Карточка-инструкция по теме: «Решение показательных уравнений»**

Решите уравнение *22х —* 5 ∙ *2х —* 24 = 0 по следующему образцу. Рассмотрим решение уравнения: З2x — 10 ∙ *3х* + 9 = 0:

1. заменим *3х =* у, тогда *32х =* (Зx)2 = у2;
2. уравнение приводится к виду у2 — 10у + 9 = 0, корни которого *у1 =* 1, у2 = 9;
3. получаем совокупность двух показательных уравнений простейшего вида:
3x = 1; 3x = 9;
4. решим показательное уравнение *3х =* 1. Так как 1 = 3°, то *3х* = 3°, откуда х = 0;
5. решим показательное уравнение *3х =* 9. Так как 9 = З2, то *3х =* З2, откуда *х = 2.* Ответ: *х =* 0 и *х = 2.*

Можно сделать проверку найденных корней уравнения:

1. Проверим корень *х =* 0. Подставим значение *х =* 0 в заданное уравнение:
3° - 10 ∙ 3° + 9 1-10+9=0, 0 = 0 - истинно.
2. Проверим корень *х =* 2∙32∙2*-* 10 ∙ З2 + 9 = З4 - 10 ∙ 9 + 9 = 81 - 90 + 9 , 0 = 0- истинно. Таким образом, *х* =0 и *х* =2 являются корнями данного уравнения.

Карточка может иметь и сокращенную запись решения, например такую:

 Рассмотрим решение уравнения 2 ∙ *2х* + *4х =* 80:

1. *4х = 22х-*
2. 2 ∙ *2х + 22х =* 80;
3. *2х = у,22х =у2;*
4. 2у + у2 = 80,у2 + 2у-80 = 0, у = -1±$\sqrt{1+80}$; у = -1 ± 9,у1 = -1 - 9 =-10,y2 = -1+9=8;
5. *2х* = *у1; 2х =* —10 - не имеет решения, так как *2х >* 0 при любых значениях *х.*
6. *2х* = у2...2х=8, 2х=23 ,х=3

**Карточка-инструкция по теме «Решение логарифмических уравнений».**

Рассмотрим решение уравнения *log4(х —* 1) = *log4(5* - х). Область определения находится из системы неравенств:

$$\left\{\begin{array}{c}x-1>0\\5-x>0\end{array}\right.\rightarrow \left\{\begin{array}{c}x>1\\x<5\end{array}\rightarrow <x<5.\right.$$

Из равенства *log4(х —* 1) = *log4(5* - х) следует, что х — 1 = 5 — х, 2х = 6, *х = 3* входит в область определения. Ответ: *х = 3.*

Решите самостоятельно уравнение log*3(2х* — 1) = *log3(х* + 3).

**Карточка-инструкция по теме «Решение логарифмических** уравнений**».**

Решите уравнение log*3(х2* — *6х* + 17) = 2.

 Указание:

1. найдите область определения. Для этого надо решить неравенство *х2 — 6х* + 17 >0;
2. замените 2 на *log3* 9;
3. решите уравнение *log3(х2 — 6х* + 17) = *log3* 9;
4. проверьте, все ли получившиеся значения переменной входят в область
определения;
5. запишите ответ.

Решить это уравнение можно иначе: сначала уравнение *х2 — 6х* + 17 =9 решить без нахождения области определения, а затем проверить полученные корни. Если при подстановке значения переменной *х* получается истинное равенство, то это значение *х* является корнем данного уравнения.

**Карточка-инструкция но теме «Решение иррациональных уравнений».**

Рассмотрим решение уравнения$\sqrt{x-1}+\sqrt{2x+6}$ = 6.

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим: *х —* 1 + *2*$\sqrt{\left(x-1\right)(2x+6)}+2x+6$= 36 (По формуле (а + Ь)2 = а2 + *2аЬ* + *Ь2 .* Здесь a=$\sqrt{x-1}$, тогда a2 = x-1 и b=$\sqrt{2x+6}$ и тогда b2 = 2x+6, 2ab=2$\sqrt{x-1}∙\sqrt{2x+6})$. Сделав приведение
подобных членов, получим: *Зх* + 5 + 2$\sqrt{\left(x-1\right)(2x+6)}$= 36 или *Зх* + *2*$\sqrt{\left(x-1\right)(2x+6)}$= 31. Изолируем радикал: 2$\sqrt{2x^{2}+4x-6}$= — Зх + 31. Возведя обе части уравнения в квадрат, получаем уравнение 8x2 + 16x — 24 = 9х2 — 186x + 961, или *х2 —* 202x + 985 = 0, откуда *х =* 5 или *х* = 197 . Сделайте проверку получившихся корней и запишите ответ.

Решите уравнение: $\sqrt{\left(3x+2\right)(7x+5)}-3x=$2.

\* \* \*

При проведении самостоятельных работ обучающего характера в карточки-задания можно включать отдельные рекомендации по решению входящих в них упражнений.

Рассмотрим возможное содержание таких карточек при проведении самостоятельной работы по первому разделу тригонометрии:

**Карточка 1.**

Упростите: 1) $\frac{(\sin(α+\cos(α)))^{2}}{1+2\sin(α∙cosα)}$; 2)$\frac{cos^{2}α}{1-sin^{2}α}$.

Указание: преобразуйте только числитель.

**Карточка 2**.

Упростите: 1) $\frac{\sin(α)}{1-2cos^{2}α}+\frac{\cos(α)}{1-2sin^{2}α}$; 2) $sin^{4}α+cos^{2}α sin^{2}α cos^{2}α$.

Указание:

1. преобразуйте каждый из знаменателей; измените знак у второй дроби; сложите дроби; разложите на множители знаменатель; произведите сокращение получившейся дроби;
2. сгруппируйте первый и третий члены.

**Карточка 3.**

Упростите: 1) $\frac{1-2cos^{2}α}{2sin^{2}α-1};2) cos^{2}α-cos^{4}α+sin^{4}α$.

Указание: сгруппируйте первые два члена и вынесите общий множитель за скобку; примените формулу к выражению, получившемуся в скобке; снова вынесите общий множитель за скобку и примените формулу.

Этот пример можно решить иначе: сгруппировав второй и третий члены, получить разность квадратов (вспомните, как разложить на множители выражение а4 — *b4).*

**Карточка 4.**

Упростите: 1$sin^{4}α+sin^{2}α cos^{2}α-sin^{2}α+1;2) cos^{2}α-1.$

Указание: сгруппируйте первые два члена.

**Карточка 5.**

Упростите: 1)1 + $cos^{2}α-sin^{2}α;2) sin^{4}α-cos^{4}α-sin^{2}α+cos^{2}α$

Указание: примените группировку: можно первый со вторым - получим разность квадратов, и третий с четвертым - перед скобкой поставьте знак «минус»; возможна и другая группировка: первого с третьим членом и второго с четвертым.

**Карточка 6**

1. Решите уравнение $\cos(2x=1)$.

 Воспользуйтесь формулой cos x=1; x=2πn, и решите полученное уравнение относительно *х.*

1. Найдите корни функции $y=\sin(\left(\frac{3x}{2}-\frac{π}{10}\right)).$

Приравняйте функцию к 0 и воспользуйтесь формулой sin x =0; x=πn.

1. Найдите все решения уравнения $tg \left(\frac{π}{4}-x\right)=0.$ Воспользуйтесь формулой tg x=0; x=πn.
2. Решите уравнение $sin3x=sinx.$ Воспользуйтесь условиями равенства двух синусов $\left\{\begin{array}{c}f1\left(x\right)-f2\left(x\right)=2πn\\f1\left(x\right)+f2\left(x\right)=π+2πn\end{array}\right.$.
3. При каких значениях аргумента функции $y=tg\left(\frac{π}{4}-x\right)и y=tg2x$ имеют одинаковые значения? Приравняв обе функции, примените условия равенства двух тангенсов f1 (x)- f2 (x)=πn.
4. Найдите все решения уравнения cos3x=cos12 °. Примените условие равенства двух косинусов$ \left\{\begin{array}{c}f1\left(x\right)-f2\left(x\right)=2πn\\f1\left(x\right)+f2\left(x\right)=2πn\end{array}\right.$.

Решите уравнения:

1. $\sin(\left(x+1\right)=\frac{2}{3})$. Примените формулу $x=(-1)^{n}\arcsin(a)+πn, где n\in Z$.
2. $tg \left(\frac{π}{12}+2x\right)=-\sqrt{3}$. Примените формулу $x=arctg a+πn, n\in Z$
3. $2cos^{2}x-3\cos(x+1=0.)$ Решите уравнение относительно $\cos(x)$ по общей формуле для решения квадратного уравнения, после чего получившуюся совокупность уравнений относительно $x.$
4. $sin^{2}x-sinx=0$. Решите уравнение относительно $sinx.$
5. $\frac{2cos2x}{1-sin2x}=0.$ Приравняйте числитель к нулю. Учтите, что могли появиться посторонние корни.
6. $sin3x ctg x=0$. При $sinx\ne 0$ уравнение равносильно совокупности уравнений $sin3x=0$ и $ctg x=0$.
7. $5sinxtgx$−*sinx-5tgx+1=0.* Разложите левую часть уравнения на множители, равносильное совокупности двух простейших тригонометрических уравнений , при условии существования $tgx$.
8. $sin^{2}\frac{x}{2}-2\cos(\frac{x}{2})+2=0.$ Выразите $sin^{2}\frac{x}{2}$ через $cos^{2}\frac{x}{2}$.
9. $sinx+1,5ctgx=0.$ Выразив $ctgx$ через $sinx$ и $cosx$, приведите уравнение к целому виду.
10. 2$\cos(\left(6π-2x\right))+4cosec\left(\frac{π}{2}+2x\right)=9.$ Воспользуйтесь свойствами периодичности и четности косинуса, а так же формулой приведения для косеканса.

**2. Тема: «Применение производной к исследованию функции».**

1. Если $ƒ'\left(x\right)>0$ в каждой точке промежутка $\left]a;b\right[$ то функция $ƒ\left(x\right)$ возрастает на этом промежутке.

Если $ƒ'\left(x\right)<0$ в каждой точке промежутка $\left]a;b\right[$, то функция $ƒ\left(x\right)$ убывает на этом промежутке.

Найдем промежутки возрастания и убывания функции: $ƒ\left(x\right)$=$2x^{2}-8x+3$.

Решение:

1). Данная функция определена на множестве *R*;

2). $ƒ'\left(x\right)$=($2x^{2}-8x+3$)' =4$ x$ – 8;

3). $ƒ'\left(x\right)>0$, если 4$ x$ – 8$>0$. 4$ x$ – 8$>0 $→4$ x>$8 →$x>$2. Функция возрастает на промежутке $\left]2;+\infty \right[$.

4). $ƒ'\left(x\right)<0$,если 4$ x$ – 8$<0$. 4$ x$ – 8$<0 $→4$ x<$8 →$x<$2. Функция убывает на промежутке. $\left]-\infty ;2\right[$

5). Так как функция $ƒ\left(x\right)$=$2x^{2}-8x+3$ непрерывна в точке $x\_{0}$=2, то $ƒ\left(x\right)$ возрастает на промежутке $\left]2;+\infty \right[$ и убывает на промежутке $\left]-\infty ;2\right[$.

Ответ: функция $ƒ\left(x\right) $возрастает на промежутке $\left]2;+\infty \right[$ и убывает на промежутке $\left]-\infty ;2\right[$.

2.Самостоятельно определите промежутки возрастания и убывания функции $ƒ\left(x\right)$=$7x^{2}+3x-12.$