*Сборник задач для выпускников лицея.*

*Задачи линейного программирования*

1.Предприятие выпускает изделие двух видов. На одно изделие первого вида расходуется 5 единиц сырья *а*  и три единицы сырья *в*, а на одно изделие второго вида – 3 единицы сырья *а* и 2 единицы сырья *в*. От реализации одного изделия первого вида получают прибыль в 1,2 тыс.руб., а от реализации одного изделия второго вида – 1 тыс.руб. Сколько изделий каждого вида должно выпустить предприятие, чтобы получить наибольшую сумму прибыли, если оно располагает 480 единиц сырья *а* и 300 единиц сырья *в* ?

2.Для откорма животных на ферме в их ежедневный рацион включать не менее 33 единиц питательного вещества А, 23 единицы питательного вещества В и 12 единиц питательного вещества С. Для откорма используется три вида кормов. Данные о содержании питательных веществ и стоимость одной весовой единицы каждого из кормов помещены в таблице:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | А | В | С | Стоимость одной весовой единицы |
| В одной весовой единице корма 1 | 4 ед. | 3ед. | 1 ед. | 20 руб. |
| В одной весовой единице корма 2 | 3 ед. | 2 ед. | 1 ед. | 20 руб. |
| В одной весовой единице корма 3 | 2 ед. | 1 ед. | 2 ед. | 10 руб. |

Составить наиболее дешевый рацион, при котором каждое животное получало бы необходимые количества питательных веществ А, В и С.

3. Из листового проката определенной формы необходимо вырезать некоторое количество заготовок двух типов А и В для производства 90 штук изделий. Для одного изделия требуется две заготовки типа А и 10 заготовок типа В. Возможны 4 варианта раскроя одного листа проката.

Количества заготовок А и В, вырезаемых из одного листа при каждом варианте раскроя, и отходы от раскроя указаны в таблице:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Вариант раскроя | Заготовки А | Заготовки В | Отходы от  раскроя |
| 1 | 4 шт. | 0 шт. | 12 ед. |
| 2 | 3 шт. | 3 шт. | 5 ед. |
| 3 | 1 шт. | 9 шт. | 3 ед. |
| 4 | 0 шт. | 12 шт. | 0 ед. |

Какое количество листов проката нужно раскроить каждым вариантом для изготовления 90 штук изделий, чтобы отходы от раскроя были наименьшими ?

4. На двух шахтах добывается руда: - на первой 100т в день, на второй 200т в день. Эту руду нужно перерабатывать на двух заводах, причем стоимость перевозки 1т руды видна из таблицы:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1-я шахта | 200 руб. | 175 руб. |
| 2-я шахта | 280 руб. | 200 руб. |

Известно, что первый завод может перерабатывать 140 т руды, второй – 160т. Сколько руды нужно возить с каждой шахты на каждый завод, чтобы стоимость перевозки была наименьшей?

5. Для изготовления шкафов и столов имеется 60 м3 древесины. Расход древесины и доход на одно изделие таковы:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Изделие | Количество древесины (куб. м) | Доход (руб.) |
| Стол  Шкаф | 0,15  0,2 | 2000  3200 |

Сколько столов и сколько шкафов должен изготовить цех, чтобы обеспечить наибольший доход, если используется вся древесина?

6. Содержание витамина С в 1 кг фруктов и стоимость 1 кг заданы таблицей:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Фрукты | Витамин С (мг) | Стоимость (руб.) |
| Вишня  Абрикосы | 150  75 | 30  40 |

Сколько граммов вишни сколько граммов абрикосов следует включить в дневной рацион, чтобы в нем оказалось 75 мг витамина С и не менее 0,25 кг вишни при минимальных затратах?

7. Из лесного хозяйства в город нужно привезти 1590 деревьев. Для перевозки деревьев можно заказать полуторатонки, трехтонки, пятитонки. На полуторатонке можно перевезти за один раз 26 деревьев, на трехтонке – 45, на пятитонке – 75 деревьев. Стоимость одного пробега для полуторатонки равна 900 руб., для трехтонки – 1500 руб., для пятитонки – 2400 руб. Как следует организовать перевозки, чтобы их общая стоимость была наименьшей? Недогруз машин не допускается.

8. Завод должен переслать заказчику 1100 деталей. Детали упаковывают в ящики трех видов: по 70, 40 и 25 деталей в каждый. Стоимость пересылки одного ящика каждого вида соответственно равна 200 руб., 100руб. и 70 руб. Сколько ящиков и какого вида должен использовать завод, чтобы стоимость пересылки была наименьшей? (Недогрузка ящиков не допускается.)

9. Полосы профильного проката длиной 5 м необходимо раскроить для серийного производства некоторого изделия длиной по 6 см и 7 см. Как раскроить материал, чтобы максимально использовать его и получить при этом почти одинаковое количество изделий обоих видов?

10. Полосы профильного проката длиной 500 мм и 400 мм необходимо раскроить для серийного производства некоторого изделия длиной по 60 мм и 70 мм. Как раскроить материал, чтобы максимально использовать его и получить при этом одинаковое количество изделий обоих видов?

11. Столяр имеет в своем распоряжении заготовки – бруски стандартного сечения длиной 2100 мм. Для каждого стола ему нужно 4 ножки по 900 мм и две поперечные планки по 600 мм. Найдите все возможные варианты раскроя материала и выберите из них оптимальный.

*Геометрические экстремальные задачи*

12. Под каким углом к берегу нужно направить лодку, чтобы ее во время переправы через реку как можно меньше снесло течением при условии, что скорость течения 6 км/ч, а скорость лодки относительно воды 3 км/ч?

13. В лесхозе три лесоучастка А,В и С, на которых ведется заготовка леса. Каждый день приходится развозить рабочих по этим участкам и привозить обратно. Поселок, где живут рабочие, расположен вне треугольника АВС. Найдите кратчайший маршрут автобуса.

14. Четыре объекта расположены в вершинах квадрата. Как надо провести сеть дорог, соединяющих все объекты друг с другом, чтобы она имела наименьшую возможную длину?

15. Из скважин, расположенных в вершинах прямоугольника со сторонами *a* и 2*a*, выделяется газ. Соедините их наиболее рациональным способом системой трубопроводов (из прямолинейных участков).

16. Коридор лицея шириной 2 м и высотой 3 м имеет прямоугольный поворот.

а) Какой наибольшей длины доску можно перенести через этот коридор? (толщиной доски можно пренебречь);

б) Какой наибольшей длины доску толщиной 4 см можно перенести через этот коридор?

*Применение дифференциального исчисления.*

17. Скорость (изменения) обесценивания оборудования вследствие его износа пропорциональна его фактической стоимости. Начальная стоимость 10000 р., через год 9000 р., какова стоимость оборудования через 10 лет?

18. Опытным путем установлено, что скорость размножения бактерий в любой момент положительна и пропорциональна их массе. Найти зависимость массы от времени.

19. При остывании металлической детали ее температура меняется по закону Т = То ℓ- kt . В начальный момент времени t = 0 температура была равна 240К, а скорость остывания 2 k/c. Найдите температуру детали через одну минуту после начала остывания.

20. Круглый металлический диск расширяется при нагревании так, что его радиус равномерно увеличивается на 0,01 м/с.. С какой скоростью увеличивается его площадь в тот момент, когда его радиус равен 2 см?

21. Под каким углом необходимо сбить две одинаковые доски, чтобы получить водопойный желоб для животных наибольшего объема.

22. Тело удаляется от поверхности Земли в вертикальном направлении по закону

h(t)= -3t2+ 14t +7 (t- время в секундах, h- расстояние от поверхности земли в метрах). Определите, в какой момент времени скорость тела будет 2 м/с.

23. Движение тела по прямой задано законом s(t) = 3t4– 2t +13 (t – время в секундах, s- отклонение точки от начального положения в метрах). Найдите ускорение тела в момент времени t=2.

24. Движение тела задано законом s(t)= -0,25t5+ 20t2 3t +4 (t- время в секундах, s-отклонение точки от начального положения в метрах). Найдите наибольшую скорость движения в метрах.

25.Тело, массой 6 кг движется прямолинейно по закону x(t) = t2– 3t + 2 (x – расстояние от начала координат в метрах, t – время в секундах). Найдите кинетическую энергию тела через 10 секунд после начала движения.

26. Количество протекающего через проводник электричества задается формулой q(t) = 10-3sinπt, (t – время в секундах). Найдите силу тока в момент времени t = 3.

27. Прямолинейные движения двух материальных точек заданы законами

s1 (t) = 4t3+2t– 6t(м), s2 (t) = 4t3 – 6t2 + 26t – 11 (м). Найдите ускорения точек в тот момент времени, когда скорости их равны (время измеряется в секундах)

28.Тело массой 2 кг движется прямолинейно по закону S(t) =13t +2t2, (s – в метрах, t – в секундах) Найдите: а) скорость v движения точки в момент t; б) ускорение a движения точки в момент t; в) силу F = ma, действующую на точку в момент t = 4.

29.У грузового автомобиля передние покрышки стираются через 15 тыс.км, а задание - через 25 тыс.км. Как нужно менять покрышки на колесах, чтобы проехать на одних и тех же покрышках наибольшее расстояние? Чему оно равно?

30. Из гранита нужно вырубить постамент в форме прямоугольного параллелепипеда, высота которого должна быть равна диагонали основания, а площадь основания должна быть равна 4 м2. При каких длинах сторон основания площадь поверхности постамента будет наименьшей? S>=16√2+8 (м2), равенство при x=y=2.

31. Требуется изготовить коробку в форме прямоугольного параллелепипеда. Площадь дна коробки должна быть равна 2 дм2, а боковая поверхность 18 дм2. При каких размерах коробки сумма длин всех ее ребер будет наименьшей.

32. Окно имеет форму прямоугольника, периметр которого равен 8 м. Каковы должны быть размеры окна, чтобы оно пропускало наибольшее количество света?

33. Докажите, что на изготовление цилиндрической бочки заданной вместимости пойдет наименьшее количество материала в том случае, если ее высота равна диаметру основания.

34. Экспериментальным путем установлены функции спроса q= (p+8)/(p+2) и предложения s=p+0,5, где q и s – количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени; р – цена товара. Найти:

а) равновесную цену, т.е. цену, при которой спрос и предложения уравновешиваются;

б) эластичность спроса и предложения для этой цены;

в) изменение дохода при увеличении цены на 5 (от равновесной).

*Применение интегрального исчисления.*

35. Вычислить объем корпуса песочных часов, боковая поверхность которых образована вращением графика функции y= arccos x вокруг оси ординат.

36. Бочку цилиндрической формы, до краев наполненную водой, наклонили так, что стала видна ровно половина днища. Сколько процентов воды осталось в бочке?

37. Длина трубки конденсатора шаровой турбины 6000 мм при t = 20o C. Определите на сколько увеличится ее длина при работе турбины, если температура трубки изменяется равномерно по всей длине от 20o C на входе в трубку охлаждающей воды до 50о С на выходе из нее.

α =1,1 \*10-5 к-1.

*Задачи для химико–биологического профиля*

1. Популяция состоит из трех генотипов – АА, Аа и аа в соотношении

¼ : ½ : ¼. В каком соотношении в двух следующих поколениях будут представлены эти генотипы при условии самоопыления?

2. В популяции, состоящей из 100 млн. людей, 40 тыс. поражено заболеванием, вызываемым рецессивным геном. Если этим лицам воспрепятствовать в воспроизведении потомства и если численность популяции не изменится, то сколько больных будет в следующем поколении?

3. На остров ветром занесло семечко однолетнего самоопыляющегося растения, гетерозиготного по одному гену. Как будет выглядеть растительный покров на острове через три года, если предположить , что все особи выживают, производя одно поколение в год? Какова вероятность нахождения через пять лет растения, идентичного по генотипу с прародительским?

4. В популяции крупного рогатого скота 4169 особей имели красную окраску, 3780 чалую, 756 белую. Определите соотношение аллелей и генотипов в F3 этой популяции (чалую окраску имеют особи, гетерозиготные по аллелям красной и белой окрасок).

5. Альбинизм у человека контролируется рецессивным аллелем диаллельного локуса (А,а). Частота встречаемости альбиносов в европейском населении ≈ 1: 17000. Определите частоту гетерозигот в этой популяции при допущении равновесия Харди-Вайнберга.

6. От скрещивания желтых длиннохвостых попугайчиков с голубыми в первом поколении все потомки оказались зелеными, а во втором – 56 зеленых, 18 голубых, 20 желтых и 6 белых. Объясните расщепление, определите генотипы птиц всех окрасок.

Литература:

1. Возняк Г.М. «Прикладные задачи на экстремумы», М, «Просвещение», 1985г.

2. Глазер В.М. «Задачи по современной генетике», М., «КДУ», 2005 г.

3.Гомонов С.А. «Замечательные неравенства: способы получения и примеры применения», М., «Дрофа», 2005г.

4.Шапиро И.М. «Использование задач с практическим содержанием в преподавании математики», М., «Просвещение», 1990 г.