**Департамент образования г. Москвы**

**ГБОУ СПО Колледж автомобильного транспорта № 9**

**Мультимедийный учебно-методический комплект по математике по теме «Производная»**

**(блочная система)**

**Выполнили: Чердакли Л.Н.**

**Титова Е.А.**

**2012 г.**

**Пояснительная записка.**

В различных теоретических и практических исследованиях часто приходится применять понятие «Производная функции».

Дидактический материал по теме «Производная» позволяет студентам наиболее полно изучить эту тему, помогает применять полученные знания при решении практических задач.

В дидактическом материале представлены теоретические материалы по теме «Производная функция», рассмотрено применение производной при исследовании функций и решении уравнений, предложены задания для самостоятельного изучения и закрепления новых знаний и умений. Это пособие поможет подготовиться к ЕГЭ по математике.

Дидактический материал представлен в 2-х разделах: теоретический и практический. Это позволяет быстро и легко изучить теоретический материал и отработать его на практике. Главная задача заключается в том, чтобы объяснение было доступно каждому студенту независимо от его успеваемости. Теория написана доступным языком даже для тех, кто плохо усваивает учебный материал. Практические задачи подобраны так, чтобы начать с самых простейших и закончить сложными задачами.

Весь материал разделен на блоки. В первом блоке рассмотрен краткий теоретический материал, способствующий эффективному развитию навыков и умений. Во втором блоке рассмотрено решение типовых примеров, решение упражнений с применением карточек-инструкций, рассмотрено применение производной в технике. В третьем блоке предложены задания для самостоятельной работы (тренажер, тесты, индивидуальные задания, решение задач практического содержания).

Данные материалы способствуют развитию моторной и смысловой памяти, умению анализировать, сравнивать, отбирать ключевые задания по теме и методы их решения, способствуют становлению информационной компетенции (работа со справочником, дополнительной литературой).

**Блок I.Производная функции.**

**1. Актуализация знаний.**

**определение**

**формулы**

**правила**

**- производная суммы**

**- производная произведения**

**- производная частного**

**- физический смысл**

**-геометрический смысл**

**производная сложной функции**

**2. Определение производной.**

**Производная функции**

**Физический смысл**

**Геометрический смысл**

**3.Уравнение касательной к графику функции ) в точке**

y =) +

**4.Применение производной к исследованию функций.**

Достаточный и необходимый признак возрастания (убывания) функции: при f ′(х) 0 функция возрастает; при f ′(х) 0 функция убывает.

Необходимые условия экстремума функции: если в точке хо f ′(хо) = 0.

Достаточные условия экстремума функции: если функция непрерывна в точке хо и в этой точке производная меняет знак, то точка хо – экстремум функции.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке, надо найти значения в критических точках и на концах отрезка, выбрать из них наибольшее и наименьшее.

**Блок 2.Производная и ее применение.**

Таблица 1

|  |  |
| --- | --- |
| **Производные элементарных функций** | **Примеры** |
|  | f(x)=5; f ′(x)=0.  f(x)=5x+6; f ′(x)=5. |
|  | f(x)=f ′(x)=. |
| ( | f(x)=2f ′(x)=2 |
| (cos x)′= - sin x | f(x)=3f ′(x)= - 3 |
| (tg x)′ = | f(x)=7tg x; f ′(x)= . |
| (ctg x)′ = | f(x) = 4ctg x; f ′(x) = . |
| **Правила дифференцирования** |  |
| С – постоянная; u, v - функции  (Cu)′ = C(u)′ | f(х) = 5х2; f ′(х) = (5x2)′ = 5(x2)′ = 5·2x = 10x. |
| (u + v)′ = u′ + v′ | f(х) = 3 +5х; f ′(х) = (3 + 5x)′=  3′ + 5(x)′= 0 + 5·1 = 5 |
| (u·v)′ = u′·v + u·v′ | f(x) = х2(3х-2); f ′(х) = (х2)′·(3х – 2) + х2(3х – 2)′ = 2х(3х – 2) +х2·3 = 6х2 – 4х + 3х2 = 9х2 – 4х |
| ( | f(x)=(  = . |
| сложная функция.  ( | f(х) = (х2+2х – 1)4;  f ′(х) = 4(х2+2х – 1)3·(х2 + 2х – 1)′ =  4(х2 + 2х – 1)·(2х + 2). |
| **Геометрический смысл производной** |  |
| Уравнение касательной к графику функции f(х) в точке хо:  у = f(хо) + f ′(хо)·(х – хо) | Составить уравнение касательной к параболе f(х) = х2 – 4х в точке с абсциссой хо = 1.  f ′(х) = 2х – 4  f(хо) = 12 - 4·1 = - 3  f ′(хо) = 2·1 – 4 = - 2  (1; - 3) – точка касания  k = f ′(х) = - 2 – угловой коэффициент касательной  у = - 3 + (-2)(х – 1) = - 2х – 1  Уравнение касательной:  у = - 2х – 1 |
| Производная второго порядка  у′′ = (у′(t))′ | у = х3; у′ = 3х2; у′′(х) = (3х2)′ = 6х |
| Механический смысл производной  Закон движения – S(t)  Скорость – V(t) = S′ (t)  Ускорение – а(t) = V ′(t) = S′′(t) | Точка движется прямолинейно по закону S(t) = 3t2 – 5. Найти скорость точки через 2 секунды (путь – метры, время – секунды).  V(t) = (3t2 – 5)′ = 6t  V(2) = 6·2 = 12 м/с |

**Применение производной при решении упражнений.**

1.Найти производную функцию f(х)=5х9.

Воспользуемся формулой (Сu)′= сu′, получим f ′(х) = (5х9)′= 5(х9)′

Используем формулу (хn)′ =nxn-1

f ′(x) = 5(x9)′ = 5·9·x9-1 = 45x8

Ответ: f ′(х) = 45х8.

2.Вычислить значение производной функции f(х) = при х = 1.

Решение:

Полагая u = 3x2 – x + 7; v = 2x + 5, имеем f(х) = .

Применяем формулу производной частного: f ′(х) =

Вычисляем отдельно производные функций u и v

(u)′ = (3x2 – x + 7)′ = 6x – 1

(v)′ = (2x + 5)′ = 2

Подставляем найденные выражения в последнюю дробь:

f ′(х) = =

Найдем значение производной при х = 1:

f ′(1) = = .

Ответ:

3.Найти точки экстремума функции f(х) =

Решение:

Для нахождения точек экстремума функции необходимо найти производную f ′(х), найти значения х, в которых она равна нулю.

f ′(х) = ′ =

х1 = 0 х2 = 4

х1  и х2 – точки экстремума.

f ′(х) + +

f(х) 0 4 х

Рисунок 1

При переходе через точку х = 0 производная меняет знак с плюс на минус, а у функции возрастание переходит в убывание, значит точка х = 0 – точка максимум. При переходе через точку х = 4 производная меняет знак с минуса на плюс, а у функции убывание переходит в возрастание, значит точка х = 4 – точка минимум.

Ответ:

4.Найти наибольшее и наименьшее значения функции f(х) = на отрезке [ - 1;2].

Решение:

Функция достигает своего наибольшего или наименьшего значения на отрезке, либо в точках экстремума, либо на концах этого отрезка.

Найдем значение функции на концах отрезка [ - 1; 2].

f(- 1) =

f(2) =

Найдем производную данной функции и приравняем ее к нулю:

f ′(х) =

2

х = 1

Точка х = 1

Вычислим значение данной функции в этой точке.

f(1) =

Наибольшее значение: 5,5.

Наименьшее значение:

Ответ: 5,5;

5.Кривая задана уравнением у = . Определить угол наклона касательных к положительному направлению оси ОХ, проведенных к кривой в точках с абсциссами х = - 2 и х = 0.

Решение:

Найдем производную: у′ = 2х+5

Обозначив угол наклона касательной в точке с абсциссой х = - 2 через а в точке с абсциссой х = 0 через , получим:

Ответ: 45⁰; 79⁰.

6.Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой у = в точке С(-2;-8).

Решение:

у ′ = k

Найдем производную функции у =

у′ = (

у′ (-2) = 3(-2)2 = 12

k = 12

Ответ: k = 12.

**Карточки – инструкции для решения заданий по теме**

**«Производная и ее применение».**

**I.Приращение аргумента и приращение функции.**

Вычислить приращение функции f(х) = 2х2 + 1 в произвольной точке.

Таблица 2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | План вычисления приращения | Применение плана |
| 1 | Фиксируем произвольное значение аргумента хо и находим значение функции f(хо) | х = хо  f(хо) = 2хо2 + 1 |
| 2 | Задаем аргументу приращение Δх и находим значение функции f(хо + Δх) | х = хо + Δх  f(хо + Δх) = 2(хо + Δх)2 + 1 =  2(хо2 +2хо·Δх + Δх2) + 1 =  2хо2 + 4хо·Δх + 2Δх2 + 1 |
| 3 | Находим приращение функции  Δf = f(хо + Δх) – f(хо) | Δf = 2хо2 + 4хо·Δх + 2Δх2 + 1 – 2хо2 - 1 = 4хо·Δх + 2Δх2 |

Используя план вычисления приращения функции, решите задания трех уровней сложности.

Уровень А:

1.f(х) = 3х – 8; 2. f(х) = 2 – х2; 3. f(х) = х3 + 4.

Уровень В:

1. f(х) = ; 2. f(х) = 3. f(х) = .

Уровень С:

1. f(х) = 2. f(х) = 1 - f(х) = tg 3x.

**2.Производная функции.**

Вычислить производную функции f(х) = 9х2 – х + 2 в точке хо = 2.

Таблица 3

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | План вычисления производной функции | Применение плана |
| 1 | Фиксируем точку и даем приращение | х + Δх |
| 2 | Вычисляем приращение функции Δf = f(хо + Δх) - f(х) | Δf = 9(х + Δх)2  - (х + Δх) + 2 – (9х2 – х + 2) = 9х2 + 18хΔх + 9Δх2 – х – Δх + 2 – 9х2 + х – 2 = 18хΔх + 9Δх2 - Δх |
| 3 | Находим отношение приращения функции к приращению аргумента  = | = 18х + 9Δx – 1 |
| 4 | Находим производную  f ′(х) = | f ′(х) = =  = 18х – 1 |
| 5 | Находим f(хо) | F(2) = 18·2 – 1 = 35 |

Используя план вычисления производной функции в точке, решите задания 3-х уровней сложности.

Уровень А:

1. f(х) =2х + 3 в точке х = 2; 2. f(х) = 3х2 – 2 в точке х = 3;

Уровень В:

1. f(х) = в точке х = 2. f(х) = в точке х = 4.

Уровень С:

1. f(х) = в точке х = - 2; 2. f(х) = в точке х = .

**3.Уравнение касательной к графику функции f(х) в точке хо.**

Написать уравнение касательной к графику функции f(х) = х2 – 4х в точке с абсциссой хо = 1.

Таблица 4

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | План составления уравнения касательной к кривой в точке | Применение плана |
| 1 | Вычисляем значение функции f(х) в точке х = хо | хо = 1 f(хо) = 12 - 4·1 = - 3 |
| 2 | Находим производную функции | f ′(х) = 2х – 4 |
| 3 | Вычисляем значение производной в точке хо, т.е. угловой коэффициент касательной. | f ′(хо) = f ′(1) = 2·1- 4 = - 2 |
| 4 | Подставляем числа в уравнение касательной у = f(хо) + f ′(хо)(х – хо) | у = - 3 + (- 2)(х – 1)  у = - 3 – 2х + 2  у = - 2х – 1 |

Используя формулу уравнения касательной решить примеры 3-х уровней.

Уровень А:

1. f(х) = х3 – 2х в точке хо = 2; 2. f(х) = х2 + 3х в точке хо = 3.

Уровень В:

1.f(х) = в точке хо = .

Уровень С:

1.f(х) = в точке хо = 2.

**4.Общая схема исследования функции и построения графика.**

Исследовать функцию f(х) = 3х4 – 4х3 + 1 и построить график.

Таблица 5

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | План исследования | Применение плана |
| 1 | Область определения D(f) | D(f) = R |
| 2 | Исследовать на четность(нечетность) | f(-х) = 3(-х)4 – 4(-х)3 + 1 = 3х4 + 4х3 +1  функция ни четная ни нечетная |
| 3 | Находим нули функции | 3х4 – 4х3 + 1 = 0  (х – 1)2·(3х2 + 2х + 1) = 0  х – 1 = 0  х = 1 |
| 4 | Находим производную и критические точки | f ′(хо) = 12х3 – 12х2  12х2(х – 1) = 0  х = 0 х – 1 = 0  х = 1 |
| 5 | Находим промежутки монотонности, точки экстремумы и экстремумы функции | f ′(х) \_ \_ min  f(х) 0 1 х  f ′(-1)<0; f ′(0,5)<0; f ′(2)>0  х = 1- точка экстремум  min f(1) = 0 |
| 6 | Находим предел функции |  |
| 7 | Строим эскиз графика функции | у  1    0 1 х |

Используя план исследовать и построить графики функций 3-х уровней.

Уровень А:

1.f(х) = х2 – 3х + 2; 2. f(х) = - 2х2 + 3х + 2

Уровень В:

1. f(х) = 3х – х3; 2. f(х) = х3 – 3х2 + 4

Уровень С:

1. f(х) = х2 + 2. f(х) = 2х2 – х4 – 1.

**5.Наибольшее и наименьшее значение функций.**

Найти наибольшее и наименьшее значение функции у = х3 – 2х2 – 3 на промежутке .

Таблица 6

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | План нахождения и на промежутке | Применение плана |
| 1 | Находим производную функции | у′ = 3х2 – 4х |
| 2 | Находим критические точки у′ = 0 | 3х2 – 4х = 0  х(3х – 4) = 0  х = 0 3х – 4 = 0  3х = 4  х = |
| 3 | Выбираем точки, лежащие внутри промежутка | 0; |
| 4 | Находим значения функции в критических точках и на концах промежутка | у(0) = - 3  у() = (3 – 2(2 – 3 = - 4  у(2) = 23 - 2·22 – 3 = - 3 |
| 5 | Выбираем наибольшее и наименьшее | max у(х) = у(0) = у(2) = - 3  min у(х) = у( |

Используя план нахождения наименьшего и наибольшего значений функции решить примеры 3-х уровней сложности.

Уровень А:

1.у = 2х2 - х - 6 на промежутке ;

2.у = 3х2 – х3 на промежутке

Уровень В:

1.у = х4 – 2х2 - 3 на промежутке ;

2.у = 3х5 – 5х3 на промежутке ;

Уровень С:

1.у = 2 на промежутке ;

2. у = х + на промежутке .

**Применение производной в технике.**

1.Расход горючего легкового автомобиля (литр на 100 км) в зависимости от скорости х км/ч при движении на четвертой передачи приблизительно описывается функцией f(х) = 0,0017х2 – 0,18х + 10,2. При какой скорости расход горючего будет наименьший. Найдите этот расход.

Решение:

Исследуем расход горючего с помощью производной:

f ′(х) =0,0034х – 0,18

f ′(х) = 0

0,0034х – 0,18 = 0

0,0034х = 0,18

х

Найдем расход горючего, для этого определим знак второй производной в критической точке.

f ′′(х) = (0,0034х – 0,18)′ = 0,0034 , следовательно расход горючего при скорости 53 км/ч будет наименьшим.

f(53) = 5,43 л.

Ответ: 5,43 л.

2.Автомобиль приближается к населенному пункту со скоростью 72 км/ч. Висит дорожный знак «Ограничение скорости» 36 км/ч. За 7 секунд водитель, увидев знак, нажал на тормозную педаль. С разрешаемой ли скоростью автомобиль въехал в населенный пункт, если тормозной путь определяется формулой S = 20t – t2.

Решение:

S′ = (20t – t2)′ = 20 - 2t

S′(7) = 20 - 2·7 = 6 м/с.

6м/с = 21,6 км/ч.

Ответ: да.

3.Маховик за время t поворачивается на угол (t – сек.; - радианы). Определите угловую скорость в конце 3 секунды. Найдите момент, когда прекратится вращение.

Решение:

(8t – 0,5t2)′ = 8 – 0,5·2t = 8 – t

′(t) = = 8 – t

(3) = 8 – 3 = 5 рад/с.

Вращение прекратится в момент, когда

8 – t = 0

t = 8 с.

Ответ: 8 секунд.

**Блок 3. Задания для самостоятельной работы.**

**Тренажер.**

Найти производную:

f(x) = 4х3 + 6х + 3;

f(x) = 7х2 – 56х + 8;

f(x) =

f(x) =

f(x) = 2х·

f(x) =

f(x) =

Найти угловые коэффициенты касательных к графикам функций в точке с заданными абсциссами:

f(x) = 3х – х2 х0 = - 2;

f(x) = = 1.

Найти экстремумы:

f(x) = 7

f(x) =

f(x) =.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданных отрезках:

f(x) = х + х;

f(x) = х4 – 2х2+3 х.

**Тестовые задания по теме «Производная».**

1.Найти значение производной функции, если f(х) =3+5х4 – 10х10

1)20х3 – 10х9 3)3+5х3 – 10х9

2)3+5х4 +5 4)20х3 – 100х9

2.Найти производную функции у =

1)36 3)36х+18

2)9 4)9(4х+2)6

3.Через точку графика функции с абсциссой х0 проведена касательная. Найти угловой коэффициент касательной к оси абсцисс, если у = 3х2+5х – 15 х0=

1) 6 2) 11 3) 7 4) 4

4.На рисунке изображен график производной функции f ′(х), заданной на отрезке . Укажите число промежутков возрастания.

у

f ′(x)

х

а b

Рисунок 2

1)3 2)1 3)2 4)4

**Лабораторная работа.**

**Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.**

Дан график функции f(х):

у

х

- 6 -1 0 1 4 6

Рисунок 3

1.Укажите критические точки функции.

2.Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на отрезках:

а) б) в)

3.Укажите какой-либо отрезок, на котором наименьшее значение функции принимается на его конце.

4.Укажите какой-либо отрезок, на котором наибольшее значение функции принимается в критической точке.

**Индивидуальная работа.**

Таблица 7

|  |  |
| --- | --- |
| Вариант 1  1.Найти производную функций:  у = 5х2;  у = .  2.Вычислить значение производной функции у = в точке х0 = 1.  3.Найти производную функций:  у =  у = .  4.Найти точки экстремума и значения функций в этих точках:  у =  у = . | Вариант 2  1.Найти производную функций:  у = 3х2;  у = .  2.Вычислить значение производной функции у = в точке х0 = 2.  3.Найти производную функций:  у =  у = .  4.Найти точки экстремума и значения функций в этих точках:  у =  у =. |

**Список используемой литературы.**

1. Башмаков М.И. Математика: учебник для начального и среднего профессионального образования – М.: Академия,2010.
2. Богомолов Н.В. Математика. – М.: Дрофа, 2009.
3. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике. – М.: Дрофа, 2009.
4. Колмогоров А.Н., Абрамов А.М., и др. Алгебра и начало анализа (10-11) – М.: Высшая школа, 2007.
5. Гусев В.А., Григорьева С.Г., Иволгина С.В. Математика: учебник для начального и среднего профессионального образования – М.: Академия,2010.