«**Показательные и логарифмические уравнения и неравенства».**

Логарифмом числа ***b (b>0)*** по основанию ***а (а>0, а≠1)*** называется показатель степени, в которую надо возвести основание ***а***, чтобы получить число ***b.*** Это число обозначается символом , т.е. по определению .

**Основные свойства логарифмов.**

Для положительных ***M, N, a>0, a≠1, b>0, b≠1*** и действительного ***α***:

1. - основное логарифмическое свойство.
2. 
3. 
4. 
5.  - переход к новому основанию.
6. Для двух оснований приняты специальные обозначения логарифмов: основание ***10***(десятичный логарифм)- ***lg*** и основание **e=2,718**…(натуральный логарифм) ***ln***

Для решения уравнений и неравенств будут нужны знания показательной и логарифмической функций, свойства которых можно оформить в виде таблицы.

|  |  |
| --- | --- |
| Свойства функции | Функции |
|  |  |
| Область определения |  |  |
| Область значений |  |  |
| Четность  | Общего вида |
| Нули функции |  |  |
| Промежутки знакопостоянства |  при любых х | Для 0<а<1 у>0 при  у<0 при Для а>1 у>0 при  у<0 при   |
| Промежутки монотонности  | Для 0<а<1 убывает при всех х из области определенияДля а>1возрастает при всех х из области определения |
| Экстремумы функции | Не имеет |
| Ограниченность  | Снизу | Не имеет |
| График | а) для 0<а<1 | б) для а>1 |

 y y

 а) б)

 ***y = ax***

  x

 

 **0 x**



**Показательные уравнения.**

Для успешного решения большинства учебных примеров решающим является умение преобразовывать исходное уравнение к более простому. При этом необходимо знать решения следующих основных уравнений:

1. 
2. 
3. Это уравнение заменой переменных сводится к уравнению g(t)=0, у которого отыскиваются положительные корни, а затем решаются уравнения типа 2.
4. для всех чисел из области определения.

Рассмотрим некоторые уравнения:

1. Решить уравнение: . После преобразования правой части получим: . Из равенства степеней с одинаковыми основаниями следует равенство их показателей, т.е. .

Ответ: .

1. Решить уравнение: . Представим уравнение в виде  Разделив обе части уравнения на  получим 

Ответ: 

1. Решить уравнение:

Ответ: 

1. Решить уравнение: . Разделим уравнение на , получим . Обозначим  и решим уравнение  учитывая, что с>0, решим уравнения: 

Ответ: .

1. Решить уравнение: .



Ответ: 

6. Решите уравнение: 

Это уравнение удается решить, используя то, что левая часть уравнения является строго убывающей функцией, которая любое положительное значение принимает ровно один раз. Подбором убеждаемся, что корень х=-1. Ответ: -1.

**Логарифмические уравнения.**

Логарифмические уравнения вызывают у многих школьников затруднения в связи с областью определения, а значит с потерей или приобретением корней в промежуточных выкладках. Поэтому при решении простых логарифмических уравнений лучше пользоваться равносильными преобразованиями. В противном случае надо записать ОДЗ уравнения, но не надо находить его (решить все неравенства, связанные с ОДЗ, бывает намного труднее, чем решить само уравнение, а иногда и просто невозможно). После нахождения корней необходимо в этом случае сделать проверку. Если корень не принадлежит ОДЗ, то он не может быть решением. Основными типами логарифмических уравнений являются следующие:

1) , где );

2) , которое сводится соответствующей заменой переменных к одному или нескольким уравнениям первого вида.

Рассмотрим некоторые уравнения:

1. Решить уравнение: .

Ответ: 

1. Решить уравнение: 

 

учитывая ОДЗ, запишем ответ.

Ответ: 11.

3. Решить уравнение: 

учитывая, что , запишем ответ.

Ответ: -4.

**Показательные и логарифмические неравенства.**

 Решение простейших показательных и логарифмических неравенств основано на монотонности показательной и логарифмической функции: при основании 0<а<1 эти функции убывающие, а при основании а>1- возрастающие.

1. Решите неравенство: 

Запишем неравенство в виде Так как основание 2>1(показательная функция возрастающая), то показатели степеней связаны неравенством того же знака: Решение этого неравенства .

Ответ: 

1. Решите неравенство: 

Запишем неравенство в виде:  Учитывая, что основание  (логарифмическая функция убывающая), и ОДЗ неравенства, запишем систему, равносильную неравенству: 

Ответ: 

В более сложных случаях необходимо, используя вышеизложенные приемы, свести неравенство к простейшему.

1. Решить неравенство: .

Запишем неравенство в виде  Пусть  Тогда Учитывая, что исходное неравенство равносильно 

Ответ: .

1. Решить неравенство: .

Запишем неравенство в виде . Учитывая ОДЗ неравенства х>1, обозначая, ()=у, получим неравенство:  Получаем следующее:



Ответ: .

1. Решить неравенство: 

ОДЗ неравенства . Найдем от обеих частей неравенства десятичные логарифмы. При этом знак неравенства не меняется, так как основание логарифмов больше1.

Ответ: 

В случае, если в основание показательной или логарифмической функции входит неизвестная величина х, то естественно, необходимо рассмотреть ситуации, когда это основание принадлежит промежутку (0;1) и когда принадлежит промежутку (1; ).

1. Найти наибольшее целое число, являющееся решением неравенства:

 

 

Ответ: 2.

Однако при решении показательных и логарифмических неравенств существуют такие условия равносильности, которые часто за один шаг сводят решение этих неравенств к решению рациональных неравенств.

Рассмотрим неравенство .

Пусть  и  - непрерывные функции на промежутке Х, . Тогда  тоже непрерывны на Х, и к неравенству  применим метод интервалов. Его решение зависит от того, является ли число а большим или меньшим 1.

1. 

2. 

Верно и обратное: если, то

при 

при 

Таким образом есть условие равносильности:  Это условие верно и для нестрогих неравенств, а при решении неравенства меняется лишь знак произведения. Итак правило: **Знак разности**  **совпадает со знаком произведения .**

Это правило дает некоторое преимущество: 1) не надо задумываться над тем, какое а: больше оно или меньше 1; 2) облегчает решать неравенства, содержащие разные функции.

1. Найти наименьшее целое решение неравенства: 



Ответ: 3.

Для логарифмических неравенств условие равносильности выглядит так:

 

 Для нестрогого неравенства: 

Для неравенств вида  условие равносильности выглядит так



Отсюда следует правило: **Знак разности**  **совпадает со знаком произведения**  **в ОДЗ.**

1. Решите неравенство: .

Найдем ОДЗ: 

Воспользуемся правилом: 

Учитывая ОДЗ можно записать ответ.

Ответ: 

1. Найти наибольшее целое решение неравенства: 

Найдем ОДЗ: 

Теперь воспользуемся правилом:



Учитывая ОДЗ, запишем ответ: 

Ответ: 2.

Аналогично можно записать правила для показательных и логарифмических неравенств с переменным основанием. **Знак разности**  **совпадает со знаком произведения в ОДЗ.**

Преимущество этого правила состоит в том, что если ;;-рациональные функции, то за один шаг мы перейдем к классическому варианту метода интервалов.

1. Решите неравенство: .

Найдем ОДЗ: 



Учитывая ОДЗ запишем ответ:

Ответ: 

**Знак разности**  **совпадает со знаком произведения в ОДЗ, знак функции**  **совпадает со знаком произведения** **в ОДЗ.**

1. Решите неравенство: 

Находим ОДЗ: 

В ОДЗ выполним равносильные преобразования:





Ответ: 

**Показательные и логарифмические уравнения и неравенства с параметром.**

Как правило, показательные и логарифмические уравнения и неравенства с помощью тождественных преобразований и замен сводятся к алгебраическим уравнениям и неравенствам первой или второй степени с параметром, решение которых достаточно подробно рассмотрено в 8-10 классх.

1. Решить уравнение: .(1)

Заменим , получим уравнение , *Д*= 4(4+*а*),

*у* =2  2и рассмотрим функцию  Уравнение (1) имеет 4 действительных корня, если выполняются следующие условия:

*Д*>0; 4+*а*>0;

0< <1; 0<2<1;

*f* (0)>0; -*а*>0;

*f*(1)≥0;-3-*а*≥0;Решений у системы нет.

Уравнение (1) имеет 2 корня, если

*f* (1) ≤0; -3-*а*≤0; *а*≥-3

*f* (0) >0; -*а*>0; *а*<0 *а*∈[-3;0); х=2 

Уравнение (1) так же имеет 2 корня, если

 *f* (0) <0; -*а*<0; *а*>0

 *f* (1) ≥0; -3-*а*≥0; *а*≤-3 Решений нет.

Ответ: при *а*∈[-3;0); х=2 

 при *а*∈(-∝;-3)∪[0;+∝); решений нет.

1. Найти а при которых корни уравнения  меньше 3. (1)



Получим уравнение : 

Для решения уравнения рассмотрим функцию f(у)= 

Уравнение (1) имеет один корень, если  f(0) <0; <0; .

Уравнение (1) имеет два корня, если f(0) ≥0; 

 *Д*≥0; 

 <0.  

при а=1, -4у=2у; у=-

Ответ: 

1. Найти все *к* при которых уравнение имеет единственное решение.



Если х=0, то уравнение не имеет смысла, значит 0 не является решением уравнения.

Решим графически систему. Для построения графиков функций найдем производную функции  и точки пересечения графиков функций 

; 

Функция  убывает на промежутках  и возрастает на каждом из промежутков ,  Точки пересечения графиков А(3;); В(1;-2) С(2;-).

Ответ: .

1. Решите неравенство: 

 При , учитывая ОДЗ.

 При  

если  .

если  так как  ,то 

 При а <1, 

Ответ: ;

**Задания для самостоятельного решения.**

Для успешной подготовки к ЕГЭ по теме «Показательные и логарифмические уравнения и неравенства» решите следующие задания самостоятельно.

**Задания с выбором ответа.**

1. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения 

 

1. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения 

 

1. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения 

 

1. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения 

 

1. Найти корень уравнения 

 1) 0,3 2) 0,4 3) 0,2 4) -0,2

1. Найти корень уравнения 

 1) -2 2) -5 3) 2 4) 5

1. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения 

  

1.  Найти корень уравнения 

 1) -1 2) 2 3) -2 4) 1

1. Найти корень уравнения 

 1) -2 2) -1 3) 0 4) 1

1. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения 

 

1. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения

 

 

1. Найти корень уравнения 

 1) 13 2) 15 3) 19 4) 5

1. Найти наибольший корень уравнения 

 1) -2 2) -2 3) 2 4) 2

1. Найти наибольший корень уравнения 

 1) 5 2) -5 3) 1,5 4) -1,5

1. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения

 

 

1. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения

 

 

1. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения

 

 

1. Найти наименьший корень уравнения 

 1) -2 2) -4,5 3) 4,5 4) 2

1. Найти корень уравнения а в случае нескольких корней их сумму 

 1) 4 2) -1 3) 2 4) 1,5

1. Указать промежуток которому принадлежит наибольшее целое решение неравенства 

 1)  2)  3)  4) 

1. Решить неравенство 

 

1. Найдите наименьшее натуральное решение неравенства 

 1) 1 2) 0 3) 3 4) 6

1. Найдите наименьшее целое решение неравенства 

 1) -2 2) 3 3) 1 4) 0

1. Найдите количество целых решений неравенства 

 1) 1 2) 3 3) 5 4) 7

1. Найдите наименьшее целое решение неравенства 

 1) 1 2) 0 3) -1 4) 3

1. Решить неравенство 

 

1. Решить неравенство 

 

1. Решите неравенство. В ответе укажите длину промежутка, являющегося решением неравенства 

 1) 1 2) 0,2 3) 2 4) 0,5

1. Найдите количество целых решений неравенства 

 1) 8 2) 5 3) 4 4) 6

1. Найдите количество целых решений неравенства 

 1) 25 2) 2 3) 8 4) 27

1. Укажите наименьшее натуральное число, являющееся решением неравенства

 

 1) 4 2) 2 3) 1 4) 3

1. Укажите длину промежутка, являющегося решением неравенства

 

 1) 0,5 2) 2,5 3) 1 4) 2

1. Укажите промежуток, которому принадлежит наименьшее натуральное число, яющееся решением неравенства 

 

**Задания с кратким ответом.**

1. Решите уравнение 
2. Решите уравнение 
3. Найдите сумму корней уравнения 
4. Укажите сумму решений уравнения 
5. Решите уравнение 
6. Решите уравнение 
7. Укажите сумму решений уравнения 
8. Найдите сумму решений уравнения 

1. Решите уравнение 
2. Решите уравнение 
3. Найдите длину промежутка, являющегося решением неравенства 
4. Найдите наибольший корень неравенства 
5. Найдите наименьшее целое число, принадлежащее множеству решений неравенства 
6. Укажите длину промежутка, в котором выполнено неравенство 
7. Найдите сумму длин промежутков, являющихся решениями неравенства 
8. Найдите сумму длин промежутков, являющихся решениями неравенства 
9. Найдите наименьшее целое решение неравенства 
10. Найдите наибольшее целое решение неравенства 
11. Найдите наибольшее целое решение неравенства 
12. Найдите наименьшее целое число х, для которого выполняется неравенство 
13. Найдите наименьшее целое решение неравенства 
14. Найдите сумму длин интервалов, являющихся решениями неравенства 
15. Сколько целых решений имеет неравенство 
16. Найдите наибольшее целое решение неравенства 
17. Найдите наименьшее целое решение неравенства 
18. Найдите наименьшее целое число, для которого выполняется неравенство 
19. Пусть (х; у) – то решение системы уравнений 

 у которого х и у являются целыми числами. Найдите сумму х+у для этого решения.

**Задания с развернутым ответом.**

1. Решите неравенство (МГУ, 1999, мехмат)

1. Укажите, при каких значениях параметра а уравнение  имеет единственное решение. (ГУ, 1996 ВМиК)

1. Решите неравенство  (МГУ,1997, химфак)
2. Решите неравенство (МФТИ, 1985)
3. Решите неравенство (МГУ,2002, химфак)
4. Решите неравенство (МГУ, 1979, эконом.фак.)
5. Решите неравенство (МГУ, 1992, филфак)
6. Решите неравенство  (МГУ,2004, химфак)
7. Решите неравенство  (МФТИ, 1990)
8. Решите уравнение  (МГУ, 2003, биофак)
9. Решите уравнение: 
10. Решите неравенство  (МГУ, 1970, эконом.фак)
11. Решите неравенство  (МФТИ, 1996)
12. Решите неравенство  (МГУ, 1976, геолог.фак.)
13. Найдите все а, при которых уравнение  имеет решение. (МФТИ, 2001)
14. Решите неравенство  (МГУ,1996, химфак)
15. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых неравенство 

Выполнено для всех х. (МГУ, 1971, филологический фак.)

1. Решите систему уравнений (МГУ, 2000, мехмат)
2. Найти все значения а, при которых система уравнений 

 имеет ровно два решения. (МФТИ, 2002)

 **Ответы:**

 **на задания с выбором ответа:**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| ответ | 2 | 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 | 4 | 4 | 1 | 2 |
| № | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |
| ответ | 3 | 3 | 1 | 4 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 3 |
| № | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 |
| ответ | 2 | 3 | 4 | 4 | 1 | 2 | 3 | 3 | 2 | 1 | 1 |

**на задания с кратким ответом:**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 |
| ответ | 2 | 1 | 6 | 2 | 1 | 1 | 2 | 5 | 2 |
| № | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 |
| ответ | 1 | 0,25 | 0 | 2 | 4 | 2,5 | 5 | 4 | 1 |
| № | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| ответ | 2 | 5 | 4 | 0,5 | 4 | 0 | 4 | 8 | 3 |

**на задания с развернутым ответом:**

61. 

62. 

63. 

64. 

65. 

66. 

67. 

68. 

69. 

70. 

71. 

72. 

73. (0;1) ∪(2;3)

74. (9;9,5) ∪(9,5;9,75)

75. 

76. 

77. 

78. 

79. (1;3)