Приложение 8

*4 уровень*

**Химия**. *В резервуаре имеется 100 литров рассола, содержащего 10 кг растворенной соли. Каждую минуту 2 литра рассола вытекает из резервуара, а 3 литра пресной воды притекает в него. Перемешивание сохраняет одинаковую концентрацию соли в резервуаре. Сколько соли останется в резервуаре через час?*

**Решение:** обозначим через количество соли в резервуаре, через - время, отсчитываемое от начального момента в минутах.

За промежуток времени из резервуара уходит  кг соли [ведь икс – убывающая функция времени, значит,  - отрицательная величина, а  - положительная].

Чтобы составить уравнение, вычислим убыль соли иным путем. В момент  в резервуаре находится (100+) литров жидкости (притекло 3 литров и утекло 2), в ней растворено кг соли. Значит, в одном литре рассола содержится  кг соли. За время из резервуара вытекает 2 литра рассола, значит, количество соли уменьшится на

 кг.

Получаем дифференциальное уравнение

.

Разделяя переменные и учитывая начальные условия , получаем:

, т.е.  или .

Подставляя  в последнее равенство, найдем искомое количество соли  (кг).

**Электродинамика*.*** *Изолированному проводнику сообщен заряд . Вследствие несовершенства изоляции проводник постоянно теряет свой заряд. Скорость потери заряда в данный момент пропорциональна наличному заряда проводника. Какой заряд останется на проводнике по истечении времени , если за первую секунду потеряно 10Кл.*

**Решение:** предположим, что в момент времени t заряд проводника равен . Скорость потери заряда в этот момент равна . Т.к. эта скорость пропорциональна заряду q , то получим следующее дифференциальное уравнение процесса: **(1)**, где k – коэффициент пропорциональности.

Разделяем переменные и интегрируем: .

 => .

Отсюда . Потенцируя, получаем общее решение ,

 **(2)**, (c>0).

Используем начальные условия: при *t*=0: .

Подставим эти условия в уравнение **(2)**:

.

Закон протекающего процесса:  **(3)**.

Согласно дополнительному условию при *t*=1: .

Подставим *t*=1, *q*=90 в уравнение **(3)**: .

Подставляя  в уравнение **(3)**, получим .

Таким образом, после 10 сек на проводнике останется заряд .

Ответ: закон изменения заряда ; .

**Ядерная физика.** *Скорость распада радия в каждый момент времени прямо пропорциональна наличной его массе. Определить, какой процент массы m0 радия распадется через 200 лет, если известно, что период полураспада радия (период времени, по истечении которого распадается половина наличной массы радия) равен 1590 лет.*

**Решение:** скорость распада радия измеряется его количеством, распавшимся в единицу времени. За малый промежуток времени , истекший с некоторого момента времени *t,* количество распавшегося радия равно , где *m* – количество радия в данный момент, *k* – коэффициент пропорциональности. Это же количество, взятое со знаком «-» (масса убывает), равно приращению массы за время :  **(1).**

Делим обе части равенства **(1)** на  и переходим к пределу при . Тогда:  **(2).**

Таким образом, равенство **(2)** представляет дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Разделяя переменные, получим:  **(3)**.

Интегрируя уравнение **(3)**, найдем: ,

или после потенцирования:  **(4)**.

Постоянную *с* найдем из начального условия:

При *t*=0; *m*=m0, получим: , откуда *c=m*0.

Уравнение **(4)** запишем в виде: .

Коэффициент *k* определяется из дополнительного условия, что период полураспада радия равен 1590 лет: при *t*=1590; . Таким образом, , или .

Искомая функция .

Количество радия, оставшегося нераспавшегося через 200 лет: .

Следовательно, через 200 лет распадется лишь 8,5% радия.

Пояснение: т.к. распадется  радия, то искомый процент равен .

**Теоретическая механика.** *Проходя через лес и испытывая сопротивление деревьев, ветер теряет часть своей скорости. На бесконечно малом пути эта потеря пропорциональна скорости в начале этого пути и его длине. Найти скорость ветра, прошедшего в лесу 150 м, зная, что до вступления в лес начальная скорость ветра ; после прохождения пути S=1м, скорость ветра уменьшилась до величины .*

**Решение:** Пусть на расстоянии *S* от начала леса скорость ветра равна *V*, потеря скорости на пути *dS* равна *–dV* (процесс убывающий). Эта потеря пропорциональна *V* , и поэтому дифференциальное уравнение процесса примет вид: .

Разделяем переменные: .

Интегрируя, получим общее решение задачи:

 **(1)**.

Найдем частное решение, используя начальное условие: при *S*=0; . Подставим это условие в уравнение **(1)**: .

Закон процесса:

 **(2)**.

Для определения коэффициента пропорциональности *k* используем дополнительное условие: при *S=*1*м*, .

Откуда: , или .

Подставляя числовые значение в уравнение **(2)**, получим искомую скорость: .

Итак, скорость ветра, углубившегося на 150м в лес, составит 0,93м/с.

Ответ: .