Приложение 6

 *3 уровень*

*Задание 1*

**Исследовать равномерную сходимость последовательности  на каждом из множеств **

*Решение:*

 При фиксированном при :



 В точках *х =* 1 и *х* = -1 *f(x)* = 0,

 Т.е. предельная функция .

 Рассмотрим  при  , т.е. сходимость равномерная на всем отрезке , т.е. на множествах Е1 и Е2.

*Задание 2*

**Исследовать равномерную сходимость ряда  на множестве .**

*Решение:*

 Применим признак Дирихле. Для этого представим исходный ряд в виде:

****



Последовательность *bn(x)* монотонно сходится к 0, т.к. , а последовательность с общим членом  монотонно сходится к 0.

Оценим последовательность частичных сумм ряда:



т.к. на ** ,** то  имеет конечное значение. Условия признака Дирихле выполнены.

Ряд сходится равномерно.

*Задание 3*

**Найти область существования функции  и исследовать ее на непрерывность.**

*Решение:*

 С учетом того, что , получаем:



 Т.к. ряд  сходится, то ** -** сходится равномерно на R по мажорантному признаку. Можно сделать вывод о непрерывности на R предельной функции.

*Задание 4*

**Найти множество сходимости ряда  и исследовать дифференцируемость во внутренних точках множества.**

*Решение:*

 При  общий член ряда не стремится к 0 – не выполняется необходимое условие сходимости, ряд расходится.

 Рассмотрим ряд **.**

 Применим к нему признак Даламбера: . Этот ряд будет сходиться при .

 Подставим в ряд точки . Оба ряда будут сходиться, т.к. , а ряд с общим членом  сходится.

 Таким образом, область сходимости .

 Исследуем дифференцируемость ряда:

 Этот ряд сходится во всех точках Е (по признаку Даламбера см. выше).

Для любой внутренней точки *х*0 можно указать *х* = *q*;  чтобы ряд  сходился. При этом на (-*q; q*) ряд из производных сходится равномерно.

 Таким образом, исходный ряд сходится к дифференцируемой функции *S(x).*

*Задание 5*

**Показать, что ряд  допускает почленное интегрирование на [2, 10] и найти получаемый при этом числовой ряд.**

*Решение:*



** -** бесконечно убывающая геометрическая прогрессия (сходится равномерно), первый член равен *e-x*, знаменатель прогрессии равен *е-х*.

****

Можно сделать вывод о равномерной сходимости ряда  на [2, 10], значит на этом отрезке возможно почленное интегрирование ряда:



*Задание 6*

**Используя известные разложения элементарных функций и методы дифференцирования и интегрирования, разложить функцию  в степенной ряд с центром в точке *х*0 = 0. Найти радиус сходимости полученного ряда.**

*Решение:*

Заметим, что 

 Обозначим .



Тогда: 

 Известно разложение 

 Для нашего случая получаем: 





Окончательно: 

Для ряда , радиус сходимости , для 