Приложение 4

 *2 уровень*

***Задача 1***

С точностью до *е*=0,001 вычислить интеграл



*Решение:* Т.к. интегрирование производится в окрестности точки *х*=0, то можно воспользоваться для разложения подынтегральной функции рядом Маклорена.

 Разложение функции cos*x* имеет вид:



Зная разложение функции cos*х* легко найти функцию 1 – cos*x*:



В этой формуле суммирование производится по *п* от 1 до бесконечности, а в предыдущей – от 0 до бесконечности так получается в результате преобразования.

Теперь представим в виде ряда подынтегральное выражение.



Теперь представим наш интеграл в виде:



В следующем действии будет применена теорема о почленном интегрировании ряда. Вообще говоря, со строго теоретической точки зрения для применения этой теоремы надо доказать, что ряд сходится и, более того, сходится равномерно на отрезке интегрирования [0, 0,5].

Однако, в нашем случае, скажем, что равномерная сходимость степенного ряда по теореме Абеля следует из сходимости ряда. , а сходимость этого ряда может быть легко доказана при любом *х*.

Радиус сходимости этого ряда равен:



т.е. ряд сходится при любом конечном значении *х*.

Можно не доказывать факт равномерной сходимости так детально, сослаться на общеизвестные формулы для разложения косинуса и комбинацию этого разложения в подынтегральной функции. Итак:



Итого, получаем:



Как видно, абсолютная величина членов ряда очень быстро уменьшается, и требуемая точность достигается уже при третьем члене разложения.

***Задача 2***

Найти площадь области, заключённой между первым и вторым витком спирали Архимеда ( ) и отрезком горизонтальной оси .



*Решение:*

Первый виток спирали соответствует изменению угла в пределах от 0 до , а второй -- от до . Чтобы привести изменение аргумента к одному промежутку, запишем уравнение второго витка спирали в виде , ![$ {\varphi}\in[0;2\pi]$](). Тогда площадь можно будет найти по формуле

,

положив и :





***Задача 3.***

Вычислить площадь, заключенную внутри лемнискаты Бернулли *r*2 = *a*2cos 2*φ*.



*Решение.*

В полярной системе координат площадь фигуры, ограниченной дугой кривой *r* = *f*(*φ*) и двумя полярными радиусами *φ*1 = *ʅ* и *φ*2 = *ʆ*, выразится интегралом



В силу симметрии кривой определяем сначала одну четвертую искомой площади



Следовательно, вся площадь равна *S* = *a*2.

***Задача 4***

Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции.



*Решение:*

Плотность воды  кг/м3, ускорение свободного падения  положить равным 10 м/с2.

.



Согласно закону Паскаля давление жидкости на элементарную площадку равно:

,

где . Т.к. фигура симметрична относительно оси , то

,

где

.

Таким образом

.

Сила, с которой вода давит на плотину:



***Задача 5 .***

Определить работу (в джоулях), совершаемую при подъеме спутника с поверхности Земли на высоту  км.

*Решение:*

Масса спутника равна  т, радиус Земли  км. Ускорение свободного падения  у поверхности Земли положить равным 10 м/с2.

.

По определению, элементарная работа силы  равна

.

Зависимость силы от координаты  находим из закона гравитации

,

где  – гравитационная постоянная,  – масса спутника,  – масса Земли,  – расстояние между их центрами масс.

Для спутника, находящегося на поверхности Земли

,

где  – ускорение свободного падения на поверхности Земли.

Для спутника, находящегося на высоте  над Землей

,

где  – ускорение свободного падения на расстоянии  от Земли.

Из соотношения



находим

.

Окончательно для работы имеем

