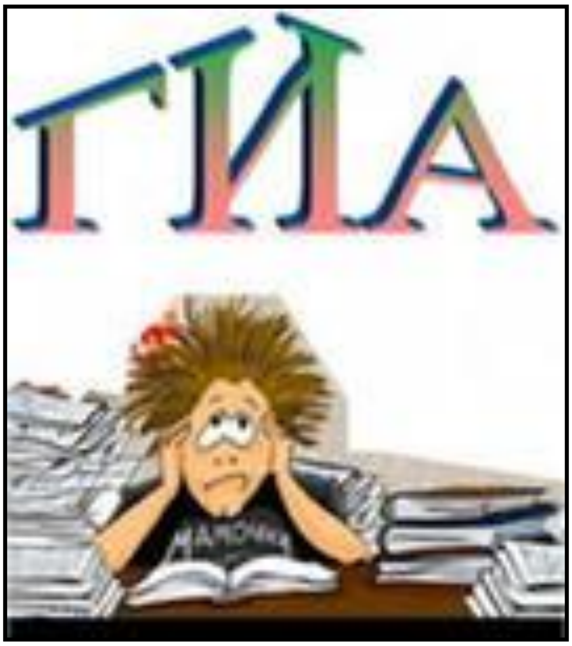


ГИА-2012 ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ «ЧАЙНИКОВ»: СОВЕТЫ РЕПЕТИТОРА

(Версия 2012.01)

El Corto

ВВЕДЕНИЕ

Существуют два основных способа организации учебных пособий для подготовки к ГИА и ЕГЭ. В одном случае они разбиваются по номерам заданий (именно так, как это выглядит в вариантах экзамена), в другом – по темам или разделам математики.

Мне представляется, что для подготовки к ГИА-2012 (в отличие от ЕГЭ) значительно лучше подходит второй, «тематический» способ.

Это связано с тем, что во многих опубликованных сборниках вариантов ГИА нет жесткой привязки математических разделов за определенными номерами заданий. Так, например, Задание №13 в некоторых сборниках вариантов ГИА может выглядеть как «решите неравенство», в других – быть текстовой задачей, или, например, заданием на вычисление вероятности.

Так как же в этом случае можно разумно готовиться к этому заданию?

Такая неразбериха – обычное явление даже во многих весьма известных сборниках уже не первый год. Она настолько распространена, что можно предположить: их авторы намеренно создают сложности, что называется, «на ровном месте». Другого объяснения этому я не нахожу.

Гораздо разумнее было бы закрепить за каждым номером варианта строго определенное задание (как это и сделано в вариантах ЕГЭ).

Но эта простая и здравая (как мне кажется) мысль как-то до сих пор не прижилась в учебной литературе…

Именно поэтому (и только поэтому) предлагаемое ниже Пособие
«ГИА-2012 ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ «ЧАЙНИКОВ»: СОВЕТЫ РЕПЕТИТОРА»
составлено в некоем условном тематическом порядке «от простого к сложному»:
Числа – Выражения – Текстовые задачи – Уравнения – Неравенства.

Поскольку это Пособие предназначено для «чайников», в него включены не все задания вариантов ГИА, и даже не все задания его 1-й части.
Я решил ограничиться только заданиями по Алгебре, отбросив все задания по Геометрии и Вероятности событий (вовсе не потому, что они сложнее – просто алгебраические задания в вариантах ГИА явно преобладают).
Думаю, что и этого будет достаточно для того, чтобы «просто сдать» этот экзамен.

Все то существенное, что обычно принято писать во введении к различным книжкам,
вы найдете на сайте http://www.EGEprosto.ru.

Свои отзывы и пожелания (если они вдруг неожиданно обнаружатся ☺)
вы можете отправить мне через меню «Обратная связь» этого сайта.

В течение учебного года я планирую иногда обновлять текст Пособия.
Эти обновления могут быть связаны как с возможными изменениями в содержании ГИА, внесенными его разработчиком (ФИПИ),
так и с пожеланиями и замечаниями читателей.

В нижней части титульного листа Пособия указан номер его версии.
Например, 1-я версия в этом учебном году обозначена номером 2012.01.

ПОСОБИЕ
«ГИА-2012 ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ «ЧАЙНИКОВ»: СОВЕТЫ РЕПЕТИТОРА»
размещается некоторыми посетителями сайта для скачивания на довольно большом количестве других сайтов подобной направленности и иных интернет – ресурсах.
Если вы скачали Пособие не на сайте автора http://www.EGEprosto.ru,
а где-то на другом ресурсе – возможно перед вами устаревшая версия.
Обратите на это внимание!

ЖЕЛАЮ УСПЕХОВ В РАБОТЕ!

АВТОР

ОГЛАВЛЕНИЕ

1.ЧИСЛА

Приведенные ниже примеры типовых заданий ГИА разбиты мною на 5 тематических групп. Названия этих групп выбраны довольно условно – они просто отражают смысл содержащихся в них заданий.

В реальных вариантах ГИА, а также в различных сборниках примерных вариантов подобные задания могут формулироваться иначе. Хотя их смысл остается прежним.

1.1. «НАЙДИТЕ ТОЧКУ НА ЧИСЛОВОЙ ОСИ»

ЗАДАНИЕ 1.1.1. НА КООРДИНАТНОЙ ПРЯМОЙ ОТМЕЧЕНЫ ТОЧКИ F, E, K, P (СМ. РИС. 1.1.1) . ОДНА ИЗ НИХ СООТВЕТСТВУЕТ ЧИСЛУ $\sqrt{79}$. КАКАЯ ЭТО ТОЧКА?

1) ТОЧКА ***F*** **2**) ТОЧКА ***E*** **3**) ТОЧКА ***K*** **4**) ТОЧКА ***P***

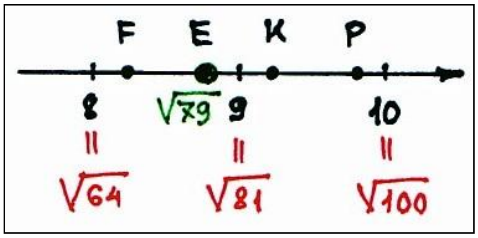


РИСУНОК 1.1.1

1-Й ЭТАП: РАБОТА С РИСУНКОМ, ВЫЧИСЛЕНИЯ.

В задачах такого типа практически все понятно становится из рисунка.
Записав числа 8, 9, 10 в виде $\sqrt{64}$, $\sqrt{81}$, $\sqrt{100}$, сразу можно понять, что число $\sqrt{79}$ (точка E) находится близко от «9» и слева от нее. Точка F (как возможный вариант), конечно, тоже находится левее «9», но она находится гораздо ближе к $8 = \sqrt{64}$.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

2

ЗАДАНИЕ 1.1.2. НА КООРДИНАТНОЙ ПРЯМОЙ ОТМЕЧЕНЫ ТОЧКИ A, B, C, D (СМ. РИС. 1.1.2). ОДНА ИЗ НИХ СООТВЕТСТВУЕТ ЧИСЛУ $(-\sqrt{10})$. КАКАЯ ЭТО ТОЧКА?

1) ТОЧКА ***A*** **2**) ТОЧКА ***B*** **3**) ТОЧКА ***C*** **4**) ТОЧКА ***D***

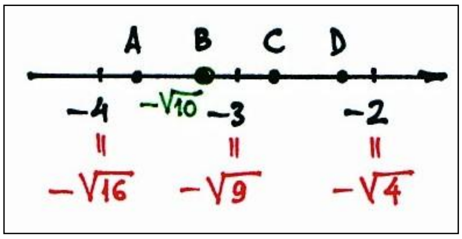


РИСУНОК 1.1.2

1-Й ЭТАП: РАБОТА С РИСУНКОМ, ВЫЧИСЛЕНИЯ.

В отличие от предыдущей задачи, здесь все числа – отрицательные. А значит «раскладка» чисел на числовой оси меняется на противоположную.
Число $-\sqrt{10}$ будет находиться близко и слева от числа $-3 = -\sqrt{9}$ (для сравнения: число $+\sqrt{10}$ находится близко и справа от $+3 = +\sqrt{9}$). Это соответствует ответу №2.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

2

ЗАДАНИЕ 1.1.3. НА КООРДИНАТНОЙ ПРЯМОЙ ОТМЕЧЕНЫ ТОЧКИ A, B, C, D (СМ. РИС. 1.1.3). ОДНА ИЗ НИХ СООТВЕТСТВУЕТ ЧИСЛУ $\sqrt{610}$. КАКАЯ ЭТО ТОЧКА?

1) ТОЧКА ***A*** **2**) ТОЧКА ***B*** **3**) ТОЧКА ***C*** **4**) ТОЧКА ***D***

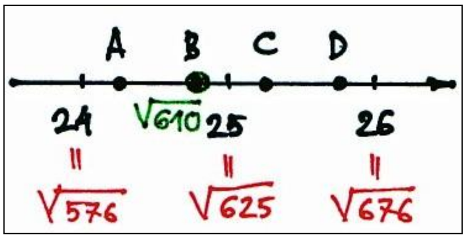


РИСУНОК 1.1.3

1-Й ЭТАП: РАБОТА С РИСУНКОМ, ВЫЧИСЛЕНИЯ.

И опять история повторяется. Наносим на ось, предварительно посчитав «в столбик» значения $24 \cdot 24 = 576,\ \ 25 \cdot 25 = 625,\ \ 26 \cdot 26 = 676$ (не запоминать же таблицу квадратов чисел!). Очевидно, что $\sqrt{610}$ соответствует точке B. Выбираем вариант №2.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

2

Следующая группа заданий связана со сравнением чисел.

1.2. «РАСПОЛОЖИТЕ В ПОРЯДКЕ ↑ ИЛИ ↓ ЧИСЛА»

ЗАДАНИЕ 1.2.1. РАСПОЛОЖИТЕ В ПОРЯДКЕ ВОЗРАСТАНИЯ ЧИСЛА $\mathbf{11;\ \sqrt{133};\ 8\sqrt{2}}$

$\mathbf{1)\ 8\sqrt{2};\ 11;\ \sqrt{133}}$ $\mathbf{2)\ \sqrt{133};\ 11;\ 8\sqrt{2}}$ $\mathbf{3)\ 11;\ 8\sqrt{2};\ \sqrt{133}}$ $\mathbf{4)\ 11;\ \sqrt{133};\ 8\sqrt{2}}$

1-Й ЭТАП: ВОЗВЕСТИ ИСХОДНЫЕ ЧИСЛА «В КВАДРАТ». РАСПОЛОЖИТЬ ПОЛУЧЕННЫЕ, А ЗАТЕМ ИСХОДНЫЕ ЧИСЛА В ПОРЯДКЕ, ЗАДАННОМ В УСЛОВИИ.

Итак, исходные числа таковы:

$11;\ \sqrt{133};\ 8\sqrt{2}.$

Получим из них другой ряд чисел:

$11^2;\ \left(\sqrt{133}\right)^2;\ \left(8\sqrt{2}\right)^2.$

Вычислим все числа нового ряда:

$11^2 = 121$

$\left(\sqrt{133}\right)^2 = 133$

$\left(8\sqrt{2}\right)^2 = \left(8\cdot\sqrt{2}\right)^2 = 8^2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2 = 64\cdot 2 = 60\cdot 2 + 4\cdot 2 = 120 + 8 = 128$

Расположим полученные числа в порядке возрастания: $121;\ 128;\ 133.$

Значит, исходный ряд чисел будет расположен в таком порядке: $11;\ 8\sqrt{2};\ \sqrt{133}.$

Выбираем вариант ответа 3).

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

3

ЗАДАНИЕ 1.2.2. РАСПОЛОЖИТЕ В ПОРЯДКЕ УБЫВАНИЯ ЧИСЛА $\mathbf{7\sqrt{3};\ \sqrt{141};\ 12}$

$\mathbf{1)\ 7\sqrt{3};\ 12;\ \sqrt{141}\quad 2)\ 7\sqrt{3};\ \sqrt{141};\ 12\quad 3)\ 12;\ \sqrt{141};\ 7\sqrt{3}\quad 4)\ \sqrt{141};\ 12;\ 7\sqrt{3}}$

1-Й ЭТАП: ВОЗВЕСТИ ИСХОДНЫЕ ЧИСЛА «В КВАДРАТ». РАСПОЛОЖИТЬ ПОЛУЧЕННЫЕ, А ЗАТЕМ ИСХОДНЫЕ ЧИСЛА В ПОРЯДКЕ, ЗАДАННОМ В УСЛОВИИ.

Итак, исходные числа таковы:

$7\sqrt{3};\ \sqrt{141};\ 12.$

Получим из них другой ряд чисел:

$(7\sqrt{3})^2;\ (\sqrt{141})^2;\ 12^2.$

Вычислим все числа нового ряда:

$(7\sqrt{3})^2 = (7\cdot\sqrt{3})^2 = 7^2\cdot(\sqrt{3})^2 = 49\cdot 3 = 40\cdot 3 + 9\cdot 3 = 120 + 27 = 147$

$(\sqrt{141})^2 = 141$

$12^2 = 144$

Расположим полученные числа в порядке убывания: $147;\ 144;\ 141.$

Значит, исходный ряд чисел будет расположен в таком порядке: $7\sqrt{3};\ 12;\ \sqrt{141}.$

Выбираем вариант ответа 1).

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

1

2. ВЫРАЖЕНИЯ

2.1. «НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ»

ЗАДАНИЕ 2.1.1. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ $\mathbf{1,4x^3+0,3x-2}$ ПРИ $\mathbf{x=-2}$.

1-Й ЭТАП: ВЫБОР СПОСОБА РЕШЕНИЯ; ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Что касается выбора способов решения подобных заданий, то их можно условно разделить на две группы:

- ✓ Сразу «тупо подставить» числа вместо букв (здесь, например, вместо x подставить -2) и перейти к вычислениям;
- ✓ Сначала как-то преобразовать исходное выражение (увидеть в нем формулу сокращенного умножения и применить ее, привести дроби к общему знаменателю и так далее), а только после этого подставлять в него числа.

В этом примере мудрить не нужно – сразу подставляем в исходное выражение $x=-2$:

$$1{,}4x^3+0{,}3x^2-2=1{,}4(-2)^3+0{,}3(-2)^2-2=1{,}4(-8)+0{,}3\cdot 4-2=-1{,}4\cdot 8+0{,}3\cdot 4-2=$$
$$=-11{,}2+1{,}2-2=-10-2=-12$$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

-12

ЗАДАНИЕ 2.1.2. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ $3x+2y^2$ ПРИ $x=\frac{5}{6}$, $y=\frac{1}{2}$.

1-Й ЭТАП: ВЫБОР СПОСОБА РЕШЕНИЯ; ВЫЧИСЛЕНИЯ.

И здесь, очевидно, преобразовывать нечего – подставляем числа в исходное выражение.

$$3x+2y^2=\frac{3}{1}\cdot\frac{5}{6}+\frac{2}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{1}\cdot\frac{5}{6}+\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{4}=(*)=\frac{3\cdot5}{1\cdot6}+\frac{2\cdot1}{1\cdot4}=\frac{15}{6}+\frac{2}{4}=\frac{15\cdot2}{6\cdot2}+\frac{2\cdot3}{4\cdot3}=$$
$$=\frac{30}{12}+\frac{6}{12}=\frac{36}{12}=3$$

Записанное выше вычисление можно было «запустить» и по несколько другому пути, например, с места $(*)$ таким образом:

$$(*)=<\text{сокращаем числители и знаменатели}>=\frac{1}{1}\cdot\frac{5}{2}+\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=\frac{6}{2}=3$$

А можно (при желании) придумать еще что-нибудь.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

3

ЗАДАНИЕ 2.1.3. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ $\frac{6x-y}{x+y}$ ПРИ $x=0,5,\ y=1,5.$

1) 0,66   2) 1,5   3) 1,33   4) 0,75

1-Й ЭТАП: ВЫБОР СПОСОБА РЕШЕНИЯ; ВЫЧИСЛЕНИЯ.

В этом примере значения «буковок» даны в десятичных числах. Похоже, что переводить их в простые дроби здесь не нужно
(при необходимости можно было сделать замену $0{,}5=\frac{1}{2}$; $1{,}5=\frac{3}{2}$).

Подставляем числа в «исходник»:

$$\frac{6x-y}{x+y}=\frac{6\cdot0{,}5-1{,}5}{0{,}5+1{,}5}=\frac{3-1{,}5}{2}=\frac{1{,}5}{2}=\frac{15}{20}$$

Поскольку все ответы даны в десятичных числах, и нам нужно ответ привести именно к такому числу. Делаем последний рывок:

$$\frac{15}{20}=\frac{15\cdot5}{20\cdot5}=\frac{75}{100}=0{,}75$$

Этот же рывок можно сделать и по-другому:

$$\frac{15}{20}=\frac{7{,}5}{10}=0{,}75$$

Или как-нибудь еще (в том числе, начиная не с $\frac{15}{20}$, а с другого места цепочки вычислений). Попробуйте, и у вас получится!

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

4

ЗАДАНИЕ 2.1.4. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ $\frac{7}{3}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ ПРИ $x=1,\ y=3.$

1-Й ЭТАП: ПОДСТАНОВКА ЧИСЕЛ ВМЕСТО БУКВ, ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Поскольку ничего другого не видно, попробуем подставить числа:

$$\frac{7}{3}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{7}{3}-\frac{1}{1}-\frac{1}{3}$$

Теперь появляется мысль привести все к знаменателю 3:

$$\frac{7}{3}-\frac{1}{1}-\frac{1}{3}=\frac{7-3-1}{3}=\frac{3}{3}=1$$

Вот и все! Все оказалось совсем не больно ☺.

В этом примере гораздо худшим путем была бы попытка привести все три дроби общему знаменателю прямо в буквах. Это привело бы к довольно дикому и менее приятному преобразованию:

$$\frac{7}{3}-\frac{1}{1}-\frac{1}{3}=\frac{7xy-1\cdot 3y-1\cdot 3x}{3xy}=\frac{7xy-3y-3x}{3xy}=\frac{7\cdot 1\cdot 3-3\cdot 3-3\cdot 1}{3\cdot 1\cdot 3}=\frac{21-12}{9}=\frac{9}{9}=1$$

Хотя, можно идти любым путем, лишь бы он приводил к правильному ответу! Решенный пример показывает, что нужно хоть немного продумывать возможные варианты вычислений. Сделайте паузу, не торопитесь, и может быть вы найдете более простой вариант действий, чем первый пришедший в голову.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

1

ЗАДАНИЕ 2.1.5. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ $\left(a^2+2ab+b^2\right)^2$ ПРИ $a+b=2$.

1-Й ЭТАП: ВЫБОР СПОСОБА РЕШЕНИЯ; ВЫЧИСЛЕНИЯ.

При разглядывании этого примера выясняется, что числа в него особо и не подставишь, так как чему равно a и b по отдельности – не известно. Продолжаем разглядывать…
Внутри скобок узнается знакомая формула $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. В этом-то и дело!

$$(a^2+2ab+b^2)^2=((a+b)^2)^2=(2^2)^2=4^2=16$$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

16

ЗАДАНИЕ 2.1.6. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

$$\frac{(a-1)^2}{4}-\frac{3\mathrm{b}}{(\mathrm{a}-2\mathrm{b})^2}$$ ПРИ $a=5$ И $b=3$.

1-Й ЭТАП: ПОДСТАНОВКА ЧИСЕЛ ВМЕСТО БУКВ, ВЫЧИСЛЕНИЯ.

А это уже что-то значительно более «навороченное». И что с этим делать?...
Конечно, разглядывать! В любом случае числа всегда подставить успеем.

Мысль 1: «распаковка» выражений $(\quad)^2$ по формулам сокращенного умножения приведет к явному усложнению «исходника» с непонятными выгодами.

Мысль 2: привести обе дроби к общему (одинаковому) знаменателю $4(\mathrm{a}-2\mathrm{b})^2$ тоже вызовет кучу вычислительных трудностей…

Мысль 3: а может все-таки «тупо подставить» числа? Пробуем:

$$\frac{(a-1)^2}{4}-\frac{3\mathrm{b}}{(\mathrm{a}-2\mathrm{b})^2}=\frac{(5-1)^2}{4}-\frac{3\cdot 3}{(5-2\cdot 3)^2}=\frac{16}{4}-\frac{9}{(-1)^2}=\frac{16}{4}-\frac{9}{1}=4-9=-5$$

Да, этот вариант оказался гораздо лучше остальных. Но так бывает не всегда!

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

-5

ЗАДАНИЕ 2.1.7. НАЙДИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ $\sqrt{1+7x}$ ПРИ $x=-\frac{9}{64}$.

1-Й ЭТАП: ВЫБОР СПОСОБА РЕШЕНИЯ; ВЫЧИСЛЕНИЯ.

А здесь, кроме подстановки, ничего и не придумаешь.

$$\sqrt{1+7x}=\sqrt{1+7\cdot\left(-\frac{9}{64}\right)}=\sqrt{1+\frac{7}{1}\cdot\left(-\frac{9}{64}\right)}=\sqrt{1-\frac{7}{1}\cdot\frac{9}{64}}=\sqrt{1-\frac{7\cdot 9}{1\cdot 64}}=\sqrt{1-\frac{63}{64}}=$$

$$=\sqrt{\frac{64}{64}-\frac{63}{64}}=\sqrt{\frac{64-63}{64}}=\sqrt{\frac{1}{64}}=\frac{1}{8}$$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

1/8

2.2. «РАЦИОНАЛЬНОЕ ИЛИ ИРРАЦИОНАЛЬНОЕ?»

В следующей группе заданий требуется выбрать из предлагаемых чисел либо рациональное, либо иррациональное число.

Говоря простым языком (применительно к этим заданиям ГИА), рациональное число – это число, которое можно представить без знака $\sqrt{\ }$.
А в иррациональном числе никакими преобразованиями совсем избавиться от $\sqrt{\ }$ нельзя.

Примеры рациональных чисел:

$\sqrt{9} = 3$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}} = \sqrt{\frac{3}{27}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

$\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6.$

Примеры иррациональных чисел:

$\sqrt{5}$

$$\sqrt{\frac{4}{7}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$\sqrt{11} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{11 \cdot 2} = \sqrt{22}.$

А теперь перейдем к примерам на нахождение рационального (либо иррационального) числа из предлагаемого ряда.

ЗАДАНИЕ 2.2.1. ЗНАЧЕНИЕ КАКОГО ВЫРАЖЕНИЯ ЯВЛЯЕТСЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫМ ЧИСЛОМ?

$$\mathbf{1)}\ (7\sqrt{5})^2 \qquad \mathbf{2)}\ 2\sqrt{3^8} \qquad \mathbf{3)}\ \sqrt{2}\cdot\sqrt{10} \qquad \mathbf{4)}\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}}$$

1-Й ЭТАП: ПОПЫТКА «ИЗБАВИТЬ ОТ КОРНЯ» КАЖДЫЙ ИЗ ВАРИАНТОВ ОТВЕТА.

Вариант ответа 1).

$(7\sqrt{5})^2 = (7\cdot\sqrt{5})^2 = 7^2\cdot(\sqrt{5})^2 = 49\cdot 5$ – дальше можно не вычислять, так как корня уже нет.

Вариант ответа 2).

$$2\sqrt{3^8} = 2\cdot\sqrt{3^8} = 2\cdot\sqrt{3^4\cdot 3^4} = (*) = 2\cdot\sqrt{81\cdot 81} = 2\cdot\sqrt{81^2} = 2\cdot 81$$

Опять же, как и во многих других случаях, последнее преобразование можно выполнить и каким-либо другим путем. Например, так:

$$2\sqrt{3^8} = 2\cdot\sqrt{3^{4\cdot 2}} =<\text{ Правило } 1 >= 2\cdot\sqrt{(3^4)^2} =<\text{ Правило } 5 >= 2\cdot\sqrt{81^2} = 2\cdot 81$$

Или, начиная с места $(*)$, так:

$$2\cdot\sqrt{81\cdot 81} = 2\cdot\sqrt{81}\cdot\sqrt{81} = 2\cdot 9\cdot 9 = 2\cdot 81.$$

Или как-нибудь еще…
Нужно ясно понимать, что у вас большое количество вариантов вычисления – в любой ситуации выбирайте тот, который вам больше подходит.

Вариант ответа 3).

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}$$

Ни $\sqrt{2}$, ни $\sqrt{10}$ не являются целыми числами, их значения мы не знаем.
Попробуем «слить» эти корни в один (как уже делали выше) или представить как произведение других корней, и посмотрим, что из этого получится.

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{10} = \sqrt{2\cdot 10} = \sqrt{20} = (?) = \sqrt{4}\cdot\sqrt{5} = 2\cdot\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

Знак $(?)$ здесь, и в следующих примерах означает размышление – как же продолжить преобразование, чтобы оно оказалось успешным.

Избавиться от корня не получилось и таким путем (возможно именно этот вариант будет нашим ответом?).

Вариант ответа 4).

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}}$$

Ни $\sqrt{5}$, ни $\sqrt{20}$ не являются целыми числами, их значения мы не знаем.
Попробуем «слить» эти корни в один или представить как произведение других корней, и посмотрим, что получится.

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}} = \sqrt{\frac{5}{20}} = \sqrt{\frac{5:5}{20:5}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

Таким образом, не получилось избавиться от корня в варианте 3).
Как мы ранее и предположили, это число и будет иррациональным.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

3

И еще одно подобное задание.

ЗАДАНИЕ 2.2.2. ЗНАЧЕНИЕ КАКОГО ВЫРАЖЕНИЯ ЯВЛЯЕТСЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫМ ЧИСЛОМ?

$$\mathbf{1)}\ (5\sqrt{7})^2 \qquad \mathbf{2)}\ \sqrt{5}\cdot\sqrt{12} \qquad \mathbf{3)}\ 4\sqrt[3]{27} \qquad \mathbf{4)}\ \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$$

1-Й ЭТАП: ПОПЫТКА «ИЗБАВИТЬ ОТ КОРНЯ» КАЖДЫЙ ИЗ ВАРИАНТОВ ОТВЕТА.

Вариант ответа 1).

$(5\sqrt{7})^2 = (5\cdot\sqrt{7})^2 = 5^2\cdot(\sqrt{7})^2 = 25\cdot 7$ – дальше можно не вычислять, так как корня уже нет.

Вариант ответа 2).

$$\sqrt{5}\cdot\sqrt{12} = \sqrt{5\cdot 12} = \sqrt{60} = (?) = \sqrt{4\cdot 15} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{15} = 2\cdot\sqrt{15} = 2\sqrt{15}$$

Корень сохранился. Как-то еще разбить 60 на два сомножителя, чтобы из каждого извлекался корень не получается (например, $60 = 30\cdot 2$; $60 = 3\cdot 20$; $60 = 8\cdot 7{,}5$ ...).
Возможно, выражение $\sqrt{5}\cdot\sqrt{12}$ - кандидат в ответы.

Вариант ответа 3).

$4\sqrt[3]{27} = 4\cdot\sqrt[3]{27} = 4\cdot\sqrt[3]{9\cdot 3} = 4\cdot\sqrt[3]{3\cdot 3\cdot 3} = 4\cdot\sqrt[3]{(3)^3} = 4\cdot 3$ – дальше можно не вычислять, так как корня уже нет.

Как вариант, $\sqrt[3]{27}$ можно запомнить или найти «подбором»: $3\cdot 3\cdot 3 = 27$, значит $\sqrt[3]{27} = 3$.

Таким образом, наши «подозрения» насчет окончательного ответа в этом задании подтвердились.

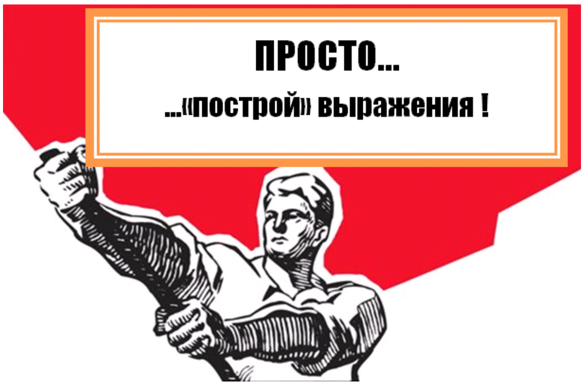
2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

2

Следующая группа заданий перекликается с предыдущей в том смысле, что связана с преобразованием выражений, в том числе содержащих $\sqrt{}$.

2.3. «СРАВНИТЕ ВЫРАЖЕНИЯ»



ЗАДАНИЕ 2.3.1. **ЧИСЛА x, y, z МЕНЬШЕ НУЛЯ. РАСПОЛОЖИТЕ В ПОРЯДКЕ ВОЗРАСТАНИЯ ЧИСЛА x^2, y^2, z^2, ЕСЛИ $x < y < z$.**

1) z^2, y^2, x^2 2) y^2, z^2, x^2 3) x^2, z^2, y^2 4) x^2, y^2, z^2

В таких заданиях, где знак всех переменных известен (здесь – все они меньше нуля) проще всего вместо «буковок» сразу же подставить какие-нибудь простые числа, и дальше уже работать именно с ними. Покажем это на нескольких примерах.

1-Й ЭТАП: ПОДСТАНОВКА ЧИСЕЛ ВМЕСТО БУКВ, ВЫЧИСЛЕНИЯ.

В условии говорится, что $x < y < z$, и все эти числа меньше нуля. Пусть тогда они у нас станут числами $-3, -2, \text{и} -1$ соответственно. Теперь осталось всего лишь вычислить x^2, y^2, z^2.

Итак,

$$x^2 = (-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$$
$$y^2 = (-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$$
$$z^2 = (-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

Если расположить эти числа в порядке ↑, то получится вариант ответа 1).

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

1

ЗАДАНИЕ 2.3.2. ЧИСЛА b И c ОТМЕЧЕНЫ ТОЧКАМИ НА КООРДИНАТНОЙ ПРЯМОЙ (СМ. РИС. 2.3.2).

РАСПОЛОЖИТЕ В ПОРЯДКЕ УБЫВАНИЯ ЧИСЛА $1-c$; $\frac{1}{c}$; $\frac{1}{b}$.

1) $\frac{1}{b}; 1-c; \frac{1}{c}$ 2) $\frac{1}{b}; \frac{1}{c}; 1-c$ 3) $1-c; \frac{1}{b}; \frac{1}{c}$ 4) $\frac{1}{c}; 1-c; \frac{1}{b}$

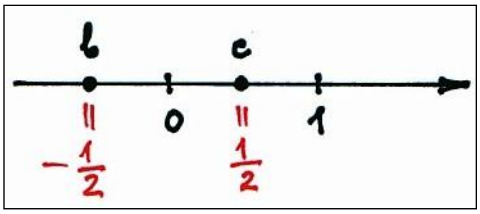


РИСУНОК 2.3.2

1-Й ЭТАП: ПОДСТАНОВКА ЧИСЕЛ ВМЕСТО БУКВ, ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Пусть будет $c = \frac{1}{2}$, а $b = -\frac{1}{2}$ (что, похоже, и соответствует рисунку).

Тогда

$$1 - c = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{c} = 1 : c = \frac{1}{1} : \frac{1}{2} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{1}{b} = 1 : b = \frac{1}{1} : \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{1} : \frac{1}{2} = -\frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1} = -\frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 1} = -2$$

Исходный ряд чисел (данный в условии), таким образом, будет выглядеть так:

$\frac{1}{2}$; 2; -2.

Расположим его в порядке ↓: 2; $\frac{1}{2}$; -2, что соответствует варианту ответа 4).

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

4

ЗАДАНИЕ 2.3.3. НА КООРДИНАТНОЙ ПРЯМОЙ ОТМЕЧЕНЫ ЧИСЛА m И n (СМ. РИС. 2.3.3). КАКОЕ ИЗ СЛЕДУЮЩИХ УТВЕРЖДЕНИЙ НЕВЕРНО?

$$1)\ n+m<0 \quad 2)\ n-m>0 \quad 3)\ \frac{n}{m}<-1 \quad 4)\ m-2n<0$$

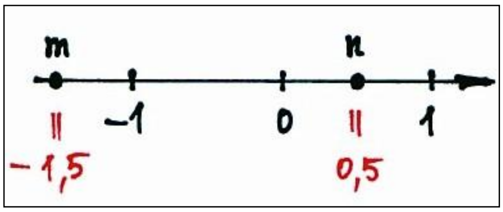


РИСУНОК 2.3.3

1-Й ЭТАП: ПОДСТАНОВКА ЧИСЕЛ ВМЕСТО БУКВ, ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Судя по рисунку, $m=-1{,}5;\ n=0{,}5$. Эти числа и возьмем в качестве вполне пригодных. Подставим выбранные значения во все (!) варианты ответов и посмотрим, что получится.

$$n+m=0{,}5+(-1{,}5)=0{,}5-1{,}5=-2{,}0=-2\ \ (\text{верно, так как}\ \ -2<0)$$

$$n-m=0{,}5—1{,}5=0{,}5+1{,}5=2{,}0=2\ \ (\text{верно, так как}\ \ 2>0)$$

$$\frac{n}{m}=\frac{0{,}5}{-1{,}5}=-\frac{5}{15}=-\frac{1}{3}\ \left(\text{неверно, так как}\ \ -\frac{1}{3}>-1\right)$$

$$m-2n=-1{,}5-2\cdot 0{,}5=-1{,}5-1=-2{,}5\ \ (\text{верно, так как}\ \ -2{,}5<0)$$

Таким образом, неверное утверждение стоит под №3. Его и выбираем.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

3

Примечание.

Как вы, возможно, заметили, в примере 2.3.2 «буковки» заменены на «обычные», простые дроби, и вычисления проводятся именно с ними. В примере 2.3.3 и в замене, и в вычислениях используются десятичные числа. Кстати, можно использовать оба варианта или комбинировать их, переходя по мере надобности с одного на другой.

Попробуйте оба варианта, «обкатайте» их, а затем выбирайте для себя наиболее удобный!

Успехов вам в подобных заданиях ГИА!

2.4. «МОЖНО ЛИ ПРЕОБРАЗОВАТЬ К ВИДУ …?»

Надеюсь, особенности работы с этой группой будут понятны без особых пояснений.

ЗАДАНИЕ 2.4.1. КАКОЕ ИЗ ДАННЫХ ВЫРАЖЕНИЙ НЕЛЬЗЯ ПРЕОБРАЗОВАТЬ К ВИДУ $\frac{\sqrt{30}}{20}$?

$$1)\ \frac{\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{10}} \qquad 2)\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{40}} \qquad 3)\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{10}} \qquad 4)\ \frac{\sqrt{3}}{2}$$

1-Й ЭТАП: ПОПЫТКИ ПРИВЕСТИ ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ К ЗАДАННОМУ ВИДУ.

Вариант ответа 1).

$$\frac{\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{10}}{2\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{3\cdot 10}}{2\cdot\sqrt{10\cdot 10}}=\frac{\sqrt{30}}{20}$$

Вариант ответа 2).

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{40}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{10}}{\sqrt{40}\cdot\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{400}}=\frac{\sqrt{30}}{20}$$

Вариант ответа 3).

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{10}}{2\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{30}}{2\cdot\sqrt{100}}=\frac{\sqrt{30}}{20}$$

Первые три выражения нам удалось привести к необходимому виду.
И, хотя есть соблазн «автоматом» выбрать ответ 4), нужно все-таки «отработать» его.
А вдруг и последний вариант тоже приведется к исходному – тогда это будет означать, что где-то произошла ошибка, и ее нужно будет найти!

Вариант ответа 4).

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{10}}{2\cdot\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{30}}{2\cdot\sqrt{10}}=(?)=\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{40}}=(?)$$

Преобразование не получилось – понятно, что $\sqrt{40}\neq 20$.

Действительно, ответом оказался вариант 4).

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

4

ЗАДАНИЕ 2.4.2. КАКОЕ ИЗ ДАННЫХ ВЫРАЖЕНИЙ МОЖНО ПРЕОБРАЗОВАТЬ К ВИДУ $\frac{2}{\sqrt{8}}$?

$$1)\ \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{12}} \qquad 2)\ \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{3,5\cdot\sqrt{8}}} \qquad 3)\ \frac{5\cdot 3}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{3}} \qquad 4)\ \frac{5}{\sqrt{50}}$$

1-Й ЭТАП: ПОПЫТКИ ПРИВЕСТИ ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ К ЗАДАННОМУ ВИДУ.

Вариант ответа 1).

$$\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{48}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{16\cdot 3}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{16}\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{16}}\cdot\sqrt{\frac{6}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{16}}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{16}\cdot\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{32}}$$

Мы привели числитель к 2, при этом знаменатель оказался $\neq 8$.

Можно сделать преобразование как-то иначе, на результат будет такой же.

Вариант ответа 2).

$$\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{3{,}5\cdot\sqrt{8}}}=\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{3{,}5\cdot 8}}=\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{28}}=1$$

Понятно, что исходное выражение $\frac{2}{\sqrt{8}}<1$, так как $\sqrt{8}>2$. Ответ 2) не подходит.

Вариант ответа 3).

$$\frac{5\cdot 3}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{3}}=\frac{5\cdot 3}{\sqrt{25\cdot 2\cdot\sqrt{3}}}=\frac{5\cdot 3}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}=\frac{5\cdot 3}{5\cdot\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{9}{6}}=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{8}}$$

Это затянувшееся вычисление также не привело нас к исходному выражению: мы привели знаменатель к $\sqrt{8}$, но в числителе $\sqrt{12}\neq 2$.

Можно было пойти и более коротким путем:

$$\frac{5\cdot 3}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{25}\cdot\sqrt{9}}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{25}{50}}\cdot\sqrt{\frac{9}{3}}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{3}{1}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{8}}$$

Примечание.

В варианте ответа 3) мы приводили знаменатель к $\sqrt{8}$ (а не числитель – к 2) просто потому, что так было удобнее.

Вариант ответа 4).

$$\frac{5}{\sqrt{50}}=\frac{5}{\sqrt{25\cdot 2}}=\frac{5}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}}=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\cdot 2}{\sqrt{2}\cdot 2}=\frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{4}}=\frac{2}{\sqrt{8}}$$

Получилось!

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

4

Следующие 3 группы заданий (2.5 – 2.7) так или иначе связаны с преобразованиями выражений:

1) первая связана с так называемыми «тождественными преобразованиями»;
2) вторая и третья связаны с заданиями типа «упростить»
   (именно так, а не «типа упростить» ☺).
   В таком прядке их и рассмотрим.

Но вначале несколько слов по поводу только что написанных умного слова «тождественные».

Назвать «тождественными» для простоты можно такие преобразования, которые производятся без нарушения математических правил. То есть такие преобразования, которые «разрешены» правилами математики. Вот и все!

2.5. «ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ»

Рассмотрим несколько типовых примеров подобных заданий. Отсутствие теоретических объяснений производимых действий снова компенсируются подробностью вычислений и комментариями к ним. Вопросы, которые у вас могут возникать в процессе чтения, должны отпасть после внимательного рассмотрения этих примеров до конца!

ЗАДАНИЕ 2.5.1. В КАКОЕ ИЗ ПРИВЕДЕННЫХ НИЖЕ ВЫРАЖЕНИЙ МОЖНО ПРЕОБРАЗОВАТЬ ВЫРАЖЕНИЕ $(7-x)\cdot(x-4)$?

1) $-(7-x)\cdot(4-x)$ **2)** $(7-x)\cdot(4-x)$ **3)** $(x-7)\cdot(x-4)$ **4)** $-(x-7)\cdot(4-x)$

1-Й ЭТАП: ПОПЫТКИ ПРИВЕСТИ ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ К ИСХОДНОМУ ВЫРАЖЕНИЮ.

Вариант ответа 1). $-(7-x)\cdot(4-x)=(7-x)\cdot(x-4)$

Убираем минус перед первой скобкой и меняем в разности $4-x$ местами числа. В итоге, в точности получилось исходное выражение! Но (по уже объясненной выше причине) нужно проделать такую попытку со всеми возможными вариантами.

Вариант ответа 2). $(7-x)\cdot(4-x)$

Для приведения этого выражения к исходному нужно всего лишь поменять местами 4 и x.
Но тогда следует поставить минус перед 1-ой скобкой, который окажется лишним.
Попытка преобразования оказалась неудачной.

Вариант ответа 3). $(x-7)\cdot(x-4)$

Это выражение можно привести «почти к исходному», поменяв местами x и 7, но это приведет к ситуации предыдущего варианта и лишним минусом.

Вариант ответа 4). $-(x-7)\cdot(4-x)$

Попытку этого, последнего, преобразования можно сделать и объяснить, по крайней мере, двумя способами.

Способ 1.

Для приведения выражения к исходному нужно поменять местами числа в обеих скобках. Каждая такая замена мест приводит к появлению минуса перед скобкой.
Таким образом, указанная замена мест приведет к выражению:

$-(x-7)\cdot(4-x)=-(-1)\cdot(-1)\cdot(7-x)(x-4)=-(7-x)(x-4)$

Два умножаемых " $-$ " дают " $+$ " и исчезают. Но один, лишний, опять остается.

Способ 2.

Как было видно из Способа 1, одновременная смена мест в 2-х скобках не влечет за собой никаких других изменений в исходном выражении. Так мы и делаем: просто меняем местами числа в 2-х скобках, не меняя больше ничего:
$-(x-7)\cdot(4-x)=-(7-x)(x-4)$

Примечание.
Точно так же, «не изменяя больше ничего», можно поменять местами 2 числа, связанных " $-$ ", в любом четном числе скобок (то есть одновременно в 4-х, 6-и, 8-и скобках и так далее).

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

1

ЗАДАНИЕ 2.5.2. КАКОЕ ИЗ ПРИВЕДЕННЫХ НИЖЕ ВЫРАЖЕНИЙ ТОЖДЕСТВЕННО РАВНО ВЫРАЖЕНИЮ $\boldsymbol{x(x-2)-(x-1)\cdot(1+x)}$?

1) $\boldsymbol{(1-x)(x+1)-x(x-2)}$ **2)** $\boldsymbol{-x(2-x)-(x-1)\cdot(1-x)}$
3) $\boldsymbol{-x(2-x)+(1-x)(1+x)}$ **4)** $\boldsymbol{2x-1}$

Здесь то же самое задание сформулировано несколько по-другому.

1-Й ЭТАП: ПОПЫТКИ ПРИВЕСТИ ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ К ИСХОДНОМУ ВЫРАЖЕНИЮ.

Вариант ответа 1). $(1-x)(x+1)-x(x-2)$

Глядя на исходное выражение, пытаемся к нему придти.

$(1-x)(x+1)-x(x-2)=+(1-x)(x+1)-x(x-2)=-x(x-2)+(1-x)(x+1)=(*)$

Меняем в скобке $(1-x)$ числа местами и заменяем перед этой скобкой " $+$ " на " $-$ ":

$(*)=-x(x-2)-(x-1)(1+x)$

Цель почти достигнута, но самый первый минус оказался лишним!

Вариант ответа 2). $-x(2-x)-(x-1)\cdot(1-x)=x(x-2)-(x-1)\cdot(1-x)$

Все бы хорошо, но скобку $(1-x)$ никак не удастся переделать на $(1+x)$. Все, что можно сделать, это $(1-x)$ заменить на $(x-1)$ с вынесением " $-$ ". Эта попытка преобразования тоже неудачна.

Вариант ответа 3). $-x(2-x)+(1-x)(1+x)=x(x-2)-(x-1)\cdot(1+x)$

Перемена мест в скобках $(2-x)$ и $(1-x)$ с вынесением " $-$ " привела нас к успеху!
И все же «отрабатываем» следующий вариант.

Вариант ответа 4). $2x-1$

А в этом случае нужно пойти обратным путем – исходное выражение приводить к данному, сокращая все возможное.

$$x(x-2)-(x-1)\cdot(1+x)=x^2-2x-(x+x^2-1-x)=x^2-2x-x-x^2+1+x=$$
$$=-2x+1=1-2x$$

Понятно, что $1-2x\neq 2x-1$. Попытка неудачна.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

3

ЗАДАНИЕ 2.5.3. В КАКОЕ ИЗ ПРИВЕДЕННЫХ НИЖЕ ВЫРАЖЕНИЙ МОЖНО ПРЕОБРАЗОВАТЬ ВЫРАЖЕНИЕ

$$\frac{x-5}{4-x}\ ?$$

$$1)\ \frac{x-5}{x-4} \qquad 2)\ -\frac{x-5}{4-x} \qquad 3)\ -\frac{5-x}{x-4} \qquad 4)\ -\frac{x-5}{x-4}$$

А вот появились и дроби, которые тоже нужно «тождественно преобразовывать».
Правила работы с дробями (в смысле перемены мест чисел в разности и вынесения минуса) остаются теми же.

1-Й ЭТАП: ПОПЫТКИ ПРИВЕСТИ ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ К ИСХОДНОМУ ВЫРАЖЕНИЮ.

Вариант ответа 1). $\frac{x-5}{x-4}=-\frac{x-5}{(4-x)}$ или $=\frac{-(x-5)}{4-x}$ или $=-\frac{x-5}{4-x}$

Полученные варианты выражений явно не равны исходному.

Вариант ответа 2). $-\frac{x-5}{4-x}$

Это выражение мы только что получили выше. Вариант не подходит.

Вариант ответа 3). $-\frac{5-x}{x-4}=-\frac{-(x-5)}{-(4-x)}=-\frac{x-5}{4-x}$

И опять приходим к уже знакомому результату.

«Фокус» с исчезновением (сокращением) минусов на последнем этапе (было 3 минуса, и вдруг остался 1!) для ясности можно расписать и более подробно. Например, так:

$$-\frac{-(x-5)}{-(4-x)}=-\frac{-1\cdot(x-5)}{-1\cdot(4-x)}=-\frac{x-5}{4-x}$$

И опять, вместо «автоматического» выбора оставшегося ответа 4), проверяем его!

Вариант ответа 4). $-\frac{x-5}{x-4}=-\frac{x-5}{-(4-x)}=\frac{-(x-5)}{-(4-x)}=\frac{x-5}{4-x}$

Получилось!

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

4

2.6. «УПРОСТИТЕ ВЫРАЖЕНИЕ – 1»

Как правило, из всего многообразия различных преобразований, здесь приходится иметь дело только с умножением, делением, сложением и вычитанием дробей. Иногда в процессе решения нужно применять так называемые формулы сокращенного умножения (ФСУ).
Но опять же – не все, а лишь некоторые:

$$\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\boldsymbol{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2} \qquad \textbf{(2)}$$

$$\boldsymbol{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2} \qquad \textbf{(3)}$$

$$\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)} \qquad \textbf{(4)}$$

$$\boldsymbol{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)} \qquad \textbf{(5)}$$

Рассмотрим несколько примеров этой группы заданий.

ЗАДАНИЕ 2.6.1. УПРОСТИТЕ ВЫРАЖЕНИЕ

$$\frac{9c^2-d^2}{5cd}\cdot\frac{c}{6c-2d}$$

1-Й ЭТАП: ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С ЦЕЛЬЮ СДЕЛАТЬ ИСХОДНОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ПРОЩЕ, КОРОЧЕ.

В числителе 1-ой дроби узнается формула (1).

$$\frac{9c^2-d^2}{5cd}\cdot\frac{c}{6c-2d}=\frac{(3c)^2-d^2}{5d}\cdot\frac{1}{2(3c-d)}=(\text{ф}.1)=\frac{(3c-d)(3c+d)}{5d}\cdot\frac{1}{2(3c-d)}=$$
$$=\frac{3c+d}{5d}\cdot\frac{1}{2}=\frac{(3c+d)\cdot 1}{5d\cdot 2}=\frac{3c+d}{10d}$$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

Способ 1. Пересчитать все заново.

Способ 2. Подставить и в исходное, и в окончательное выражения вместо чисел c и d какие-нибудь простые значения ($\neq 0$), например, $c=1,\ d=2$.
После этого сравнить результаты – должны получиться одинаковые выражения или числа.

При такой подстановке

$$\frac{9c^2-d^2}{5cd}\cdot\frac{c}{6c-2d}=\frac{5}{20}\quad\text{и}\quad\frac{3c+d}{10d}=\frac{5}{20},$$

что говорит о правильности преобразования.

Мне представляется, что для качественной проверки Вариант 2 надежнее, но лучше всего (для подстраховки) выполнить оба варианта.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

$$\boxed{\frac{3c+d}{10d}}$$

Или, в зависимости от требований к форме записи ответа, таким образом:

$$\boxed{(3c+d)/(10d)}$$

ЗАДАНИЕ 2.6.2. УПРОСТИТЕ ВЫРАЖЕНИЕ

$$\frac{9a^2+6ab+b^2}{12ab}\cdot\frac{3b}{3a+b}$$

1-Й ЭТАП: ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С ЦЕЛЬЮ СДЕЛАТЬ ИСХОДНОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ПРОЩЕ, КОРОЧЕ.

В числителе 1-ой дроби «виднеется» формула (3):

$$9a^2+6ab+b^2=(3a)^2+2\cdot 3a\cdot b+b^2=(3a+b)^2$$

Итак, начнем преобразование:

$$\frac{9a^2+6ab+b^2}{12ab}\cdot\frac{3b}{3a+b}=\frac{(3a+b)^2}{12ab}\cdot\frac{3b}{3a+b}=\frac{3a+b}{4a}\cdot\frac{1}{1}=\frac{3a+b}{4a}$$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

Способ 1. Пересчитать все заново.

Способ 2. Подставить и в исходное, и в окончательное выражения вместо чисел c и d какие-нибудь простые значения $(\neq 0)$, например, $a=2$, $b=1$. После этого сравнить результаты.

При такой подстановке

$$\frac{9a^2+6ab+b^2}{12ab}\cdot\frac{3b}{3a+b}=\frac{7}{8}\quad\text{и}\quad\frac{3a+b}{4a}=\frac{7}{8},$$

что говорит о правильности преобразования.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

$$\boxed{\frac{3a+b}{4a}}$$

Или, в зависимости от требований к форме записи ответа, таким образом:

$$\boxed{(3a+b)/(4a)}$$

ЗАДАНИЕ 2.6.3. УПРОСТИТЕ ВЫРАЖЕНИЕ

$$\frac{a^3-b^3}{2ab}\cdot\frac{a}{7a-7b}-\frac{a^2}{14b}$$

1-Й ЭТАП: ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С ЦЕЛЬЮ СДЕЛАТЬ ИСХОДНОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ПРОЩЕ, КОРОЧЕ.

В числителе 1-ой дроби присутствует формула (5):

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

Итак, начнем преобразование:

$$\frac{a^3-b^3}{2ab}\cdot\frac{a}{7a-7b}-\frac{a^2}{14b}=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{2ab}\cdot\frac{a}{7(a-b)}-\frac{a^2}{14b}=\frac{a^2+ab+b^2}{14b}-\frac{a^2}{14b}=$$

$$=\frac{a^2+ab+b^2-a^2}{14b}=\frac{b(a+b)}{14b}=\frac{a+b}{14}$$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

Способ 1. Пересчитать все заново.

Способ 2. Подставить и в исходное, и в окончательное выражения вместо чисел a и b какие-нибудь простые значения ($\neq 0$). После этого сравнить результаты.

3-й этап: внимательно (!) записать ответ.

$$\boxed{\frac{a+b}{14}}$$

Или, в зависимости от требований к форме записи ответа, таким образом:

$$\boxed{(a+b)/14}$$

ЗАПОМНИТЬ:

$\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)}$ **(1)**

$\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$ **(2)**

$\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$ **(3)**

$\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)}$ **(4)**

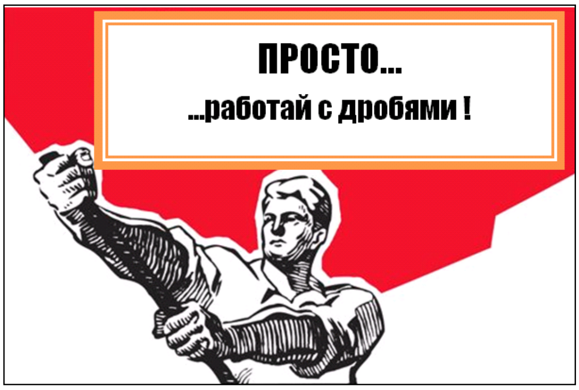
$\boldsymbol{a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)}$ **(5)**

Примечание.

Формулы $(a-b)^3$ и $(a+b)^3$ специально можно и не запоминать, если это трудно, а каждый раз вычислять по такой схеме: $(a \pm b)^3 = (a \pm b) \cdot (a \pm b) \cdot (a \pm b) = (a \pm b)^2 \cdot (a \pm b) = \cdots$

Следующая группа заданий продолжает начатую в прошлой главе серию по преобразованию выражений, только на этот раз потребуется умение складывать или вычитать дроби.

2.7. «УПРОСТИТЕ ВЫРАЖЕНИЕ – 2»



ЗАДАНИЕ 2.7.1. УПРОСТИТЕ ВЫРАЖЕНИЕ

$$\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}+2\right)\cdot\frac{1}{m+n}$$

1-Й ЭТАП: ПРЕОБРАЗОВАТЬ ИСХОДНОЕ ВЫРАЖЕНИЕ С ЦЕЛЬЮ СДЕЛАТЬ ЕГО ПРОЩЕ, КОРОЧЕ.

Предложенный в этом задании пример, вероятно, удобнее упрощать по действиям.

1-е действие.

$$\frac{m}{n}+\frac{n}{m}+2=\frac{m}{n}+\frac{n}{m}+\frac{2}{1}=\frac{m\cdot m}{n\cdot m}+\frac{n\cdot n}{m\cdot n}+\frac{2\cdot n\cdot m}{1\cdot n\cdot m}=\frac{m^2+n^2+2mn}{n\cdot m}=\frac{(m+n)^2}{n\cdot m}$$

Содержимое скобок мы привели к общему (одинаковому) знаменателю $n\cdot m$.

2-е действие.

$$\frac{(m+n)^2}{n\cdot m}\cdot\frac{1}{m+n}=\frac{m+n}{nm}$$

В этом действии мы сократили числитель и знаменатель на одно и то же выражение $m+n$.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

Способ 1. Пересчитать все заново.

Способ 2. Подставить и в исходное, и в окончательное выражения вместо чисел m и n какие-нибудь простые значения ($\neq 0$), например, $m=1$, $n=2$. После этого сравнить результаты.

При такой подстановке

$$\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}+2\right)\cdot\frac{1}{m+n}=\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{1}+2\right)\cdot\frac{1}{1+2}=\frac{3}{2}\quad\text{и}\quad\frac{m+n}{nm}=\frac{1+2}{2\cdot 1}=\frac{3}{2},$$

что говорит о правильности преобразования.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

$$\frac{m+n}{nm}$$

Или, в зависимости от требований к форме записи ответа, таким образом:

$$(m+n)/nm$$

ЗАДАНИЕ 2.7.2. НАЙДИТЕ СУММУ ДРОБЕЙ

$$\boldsymbol{\frac{x+5}{x-4}} \text{ И } \boldsymbol{\frac{1-x}{x+1}}$$

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЯ.

При выполнении этого задания очень важно сообразить, что требуется всего лишь заменить букву «и» на «+», и посчитать то, что получится ☺.

Вспоминаем: для сложения (или вычитания) дробей нужно привести их к общему знаменателю. В нашем случае это выглядит так:

$$\frac{x+5}{x-4}+\frac{1-x}{x+1}=\frac{(x+5)\cdot(x+1)}{(x-4)\cdot(x+1)}+\frac{(1-x)\cdot(x-4)}{(x+1)\cdot(x-4)}=\frac{(x+5)\cdot(x+1)+(1-x)\cdot(x-4)}{(x-4)\cdot(x+1)}=$$

$$=\frac{x^2+x+5x+5+x-4-x^2+4x}{(x-4)(x+1)}=\frac{11x+1}{(x-4)(x+1)}$$

Вот и все сложение дробей!

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

Способ 1. Пересчитать все заново.

Способ 2. Подставить и в исходное, и в окончательное выражения вместо x какое-нибудь простое значение ($\neq 0$), например, $x=5$. После этого сравнить результаты.

При такой подстановке

$$\frac{x+5}{x-4}+\frac{1-x}{x+1}=9\frac{1}{3} \quad \text{и} \quad \frac{11x+1}{(x-4)(x+1)}=9\frac{1}{3},$$

что говорит о правильности преобразования.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

$$\boxed{\frac{11x+1}{(x-4)(x+1)}}$$

Или, в зависимости от требований к форме записи ответа, таким образом:

$$\boxed{(11x+1)/[(x-4)(x+1)]}$$

ЗАДАНИЕ 2.7.3. НАЙДИТЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДРОБЕЙ

$$\boldsymbol{\frac{x+5}{x+1}} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\frac{1-x^2}{x^2+10x+25}}$$

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЯ.

А при выполнении этого задания нужно сообразить, что буква «и» заменяется умножением «×».

Вспоминаем: для умножения дробей нужно числитель умножить на числитель, а знаменатель на знаменатель. В нашем случае это выглядит так:

$$\frac{x+5}{x+1}\cdot\frac{1-x^2}{x^2+10x+25}$$

При напряженном и пристальном разглядывании ☺ 2-й дроби можно заметить, что и числитель, и знаменатель можно «обработать» с помощью формул сокращенного умножения (чтобы в дальнейшем сократить получившееся с 1-й дробью):

$$1-x^2=(1-x)(1+x) \text{ и}$$

$$x^2+10x+25=x^2+2\cdot5\cdot x+5^2=(x+5)^2$$

Итак, в итоге выходит следующее:

$$\frac{x+5}{x+1}\cdot\frac{(1-x)(1+x)}{(x+5)^2}=\frac{1-x}{x+5}$$

Это и будет ответом задания.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

Способ 1. Пересчитать все заново.

Способ 2. Подставить и в исходное, и в окончательное выражения вместо x какое-нибудь простое значение ($\neq 0$), например, $x=2$. После этого сравнить результаты.

При такой подстановке

$$\frac{x+5}{x+1}\cdot\frac{1-x^2}{x^2+10x+25}=-\frac{1}{7}, \text{ и } \frac{1-x}{x+5}=-\frac{1}{7},$$

что говорит о правильности преобразования.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

$$\boxed{\frac{1-x}{x+5}}$$

Или, в зависимости от требований к форме записи ответа, таким образом:

$$\boxed{(1-x)/(x+5)}$$

ЗАДАНИЕ 2.7.4. ПРЕДСТАВЬТЕ ВЫРАЖЕНИЕ $3a+\frac{4-2a^2}{a}$ В ВИДЕ ДРОБИ.

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Задание «представить в виде дроби» нужно понимать так: просто сложить два слагаемых, чтобы они оказались под одной дробной чертой.

$$3a+\frac{4-2a^2}{a}=\frac{3a}{1}+\frac{4-2a^2}{a}=\frac{3a\cdot a}{1\cdot a}+\frac{4-2a^2}{a}=\frac{3a^2+4-2a^2}{a}=\frac{a^2+4}{a}$$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

Способ 1. Пересчитать все заново.

Способ 2. Подставить и в исходное, и в окончательное выражения вместо a какое-нибудь простое значение ($\neq 0$). После этого сравнить результаты.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

$$\boxed{\frac{a^2+4}{a}}$$

Или, в зависимости от требований к форме записи ответа, таким образом:

$$\boxed{(a^2+4)/a}$$

ЗАДАНИЕ 2.7.5. ПРЕДСТАВЬТЕ ВЫРАЖЕНИЕ $\frac{3}{5}n^2+\frac{3n-5}{n}-3$ В ВИДЕ ДРОБИ.

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Подобно предыдущему заданию, складываем все слагаемые, чтобы они оказались под одной дробной чертой и образовали одну дробь.

$$\frac{3}{5}n^2+\frac{3n-5}{n}-3=\frac{3n^2}{5}+\frac{3n-5}{n}-\frac{3}{1}=\frac{3n^2\cdot n}{5\cdot n}+\frac{(3n-5)\cdot 5}{n\cdot 5}-\frac{3\cdot 5\cdot n}{1\cdot 5\cdot n}=$$

$$=\frac{3n^3+15n-25-15n}{5n}=\frac{3n^3-25}{5n}$$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

Способ 1. Пересчитать все заново.

Способ 2. Подставить и в исходное, и в окончательное выражения вместо n какое-нибудь простое значение ($\neq 0$), например, $n=1$. После этого сравнить результаты.

При такой подстановке

$$\frac{3}{5}n^2+\frac{3n-5}{n}-3=-4\frac{2}{5} \quad \text{и} \quad \frac{3n^3-25}{5n}=-4\frac{2}{5},$$

Значит преобразование сделано правильно.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

$$\boxed{\frac{3n^3-25}{5n}}$$

Или, в зависимости от требований к форме записи ответа, таким образом:

$$\boxed{(3n^3-25)/5n}$$

2.8. «РАЗЛОЖЕНИЕ КВАДРАТНЫХ ТРЕХЧЛЕНОВ»

В следующей группе заданий требуется из предложенных квадратных трехчленов найти тот, который можно (или нельзя) разложить на линейные множители.

Перед решением типовых заданий этой группы уместно будет пояснить, что же скрывается за множеством «умных слов» в первом абзаце.

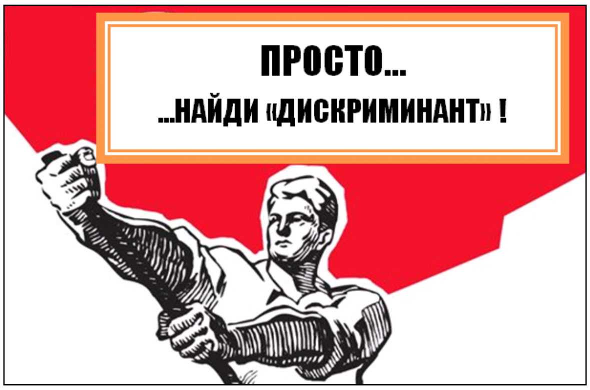
Квадратным трехчленом называется выражение вида ax^2+bx+c, где a,b,c – числа (причем, $a \neq 0$). Например, $2x^2+8x+1$; $3x^2-7x+5$; $-x^2-9x-1$ и так далее.

Важный момент: в разбираемых заданиях не требуется раскладывать эти самые квадратные трехчлены на линейные множители, то есть на «умножаемые куски», а всего лишь спрашивается – можно ли это сделать? А раз так, то (в рамках именно этих заданий) не нужно даже знать, что такое «линейные множители» и как именно на них раскладываются многочлены – ведь делать этого здесь все равно не придется!

А определить, можно ли это сделать разложение, довольно просто – ответ на этот вопрос содержится в числах a, b и c трехчлена:
если выражение $b^2-4ac \geq 0$, то ответ – «можно»;
если выражение $b^2-4ac < 0$, то ответ – «нельзя».
Вот и все решение вопроса!

Как возможно вы помните, упомянутое выражение называется в математике словом «дискриминант» и обозначается буквой D: $D=b^2-4ac$.

А теперь рассмотрим несколько примеров.



ЗАДАНИЕ 2.8.1. КАКОЙ ИЗ СЛЕДУЮЩИХ КВАДРАТНЫХ ТРЕХЧЛЕНОВ НЕЛЬЗЯ РАЗЛОЖИТЬ НА ЛИНЕЙНЫЕ МНОЖИТЕЛИ?

$$\mathbf{1)}\ \boldsymbol{x^2+15x+56}\quad \mathbf{2)}\ \boldsymbol{x^2-8x+16}\quad \mathbf{3)}\ \boldsymbol{x^2-4x+21}\quad \mathbf{4)}\ \boldsymbol{x^2-5x+11}$$

1-Й ЭТАП: ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАКА ДИСКРИМИНАНТА ДЛЯ КАЖДОГО ВАРИАНТА ОТВЕТА.

Вариант ответа 1). $x^2+15x+56$

$D=15^2-4\cdot 1\cdot 56=225-224>0$

Этот трехчлен можно разложить на линейные множители.

Вариант ответа 2). $x^2-8x+16$

$D=(-8)^2-4\cdot 1\cdot 16=64-64=0$

Этот трехчлен можно разложить на линейные множители.

Вариант ответа 3). $x^2-4x+21$

$D=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 21=16-81<0$

Этот трехчлен нельзя разложить на линейные множители.

Вариант ответа 4). $x^2-5x+11$

$D=(-5)^2-4\cdot 1\cdot (-11)=25+44>0$

Этот трехчлен можно разложить на линейные множители.

Таким образом, исходя из знака дискриминанта, выбираем ответ 3).

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

В подобных заданиях достаточно пересчитать все еще раз.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

3

ЗАДАНИЕ 2.8.2. КАКОЙ ИЗ СЛЕДУЮЩИХ КВАДРАТНЫХ ТРЕХЧЛЕНОВ МОЖНО РАЗЛОЖИТЬ НА ЛИНЕЙНЫЕ МНОЖИТЕЛИ?

$$\mathbf{1)\ 5x^2+4x+1 \quad 2)\ 2x^2-2x+1 \quad 3)\ 3x^2-5x+1 \quad 4)\ 7x^2+5x+1}$$

1-Й ЭТАП: ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАКА ДИСКРИМИНАНТА ДЛЯ КАЖДОГО ВАРИАНТА ОТВЕТА.

Вариант ответа 1). $5x^2+4x+1$

$D=4^2-4\cdot 5\cdot 1=16-20<0$

Этот трехчлен нельзя разложить на линейные множители.

Вариант ответа 2). $2x^2-2x+1$

$D=(-2)^2-4\cdot 2\cdot 1=4-8<0$

Этот трехчлен нельзя разложить на линейные множители.

Вариант ответа 3). $3x^2-5x+1$

$D=(-5)^2-4\cdot 3\cdot 1=25-12>0$

Этот трехчлен можно разложить на линейные множители.

Вариант ответа 4). $7x^2+5x+1$

$D=5^2-4\cdot 7\cdot 1=25-28<0$

Этот трехчлен нельзя разложить на линейные множители.

Таким образом, исходя из знака дискриминанта, выбираем ответ 3).

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

3

ЗАДАНИЕ 2.8.3. КАКОЙ ИЗ СЛЕДУЮЩИХ КВАДРАТНЫХ ТРЕХЧЛЕНОВ НЕЛЬЗЯ РАЗЛОЖИТЬ НА ЛИНЕЙНЫЕ МНОЖИТЕЛИ?

$$\mathbf{1)}\ -t^2-2t+1 \quad \mathbf{2)}\ -t^2-2t-1 \quad \mathbf{3)}\ -t^2-1 \quad \mathbf{4)}\ -t^2+1$$

В этом задании переменная вместо привычной «буковки» x обозначена непривычной «буковкой» t. Такая замена никак не влияет на наши действия, потому что значение дискриминанта определяется только значением чисел (коэффициентов) перед переменной.

1-Й ЭТАП: ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАКА ДИСКРИМИНАНТА ДЛЯ КАЖДОГО ВАРИАНТА ОТВЕТА.

Вариант ответа 1). $-t^2-2t+1$

$D=(-2)^2-4\cdot(-1)\cdot 1=4+4>0$

Этот трехчлен можно разложить на линейные множители.

Вариант ответа 2). $-t^2-2t-1$

$D=(-2)^2-4\cdot(-1)\cdot(-1)=4-4=0$

Этот трехчлен можно разложить на линейные множители.

Вариант ответа 3). $-t^2-1=-t^2+0\cdot t-1$

Многочлены в вариантах ответов 3) и 4)записаны в каком-то на первый взгляд странном, «усеченном» виде. Для удобства вычисления дискриминанта мы их рядом перезапишем в полном, «развернутом» виде, проставляя рядом с t значение $b=0$.

$D=0^2-4\cdot(-1)\cdot(-1)=0-4<0$

Этот трехчлен нельзя разложить на линейные множители.

Вариант ответа 4). $-t^2+1=-t^2+0\cdot t+1$

$D=0^2-4\cdot(-1)\cdot 1=0+4>0$

Этот трехчлен можно разложить на линейные множители.

Таким образом, исходя из знака дискриминанта, выбираем ответ 3).

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

3

ЗАДАНИЕ 2.8.4. КАКОЙ ИЗ СЛЕДУЮЩИХ КВАДРАТНЫХ ТРЕХЧЛЕНОВ МОЖНО РАЗЛОЖИТЬ НА ЛИНЕЙНЫЕ МНОЖИТЕЛИ?

$$\mathbf{1)}\ \boldsymbol{x^2-2x-1=0} \quad \mathbf{2)}\ \boldsymbol{x^2-4x+5=0} \quad \mathbf{3)}\ \boldsymbol{x^2-2x+9=0} \quad \mathbf{4)}\ \boldsymbol{x^2+2x+9=0}$$

В отличие от всех предыдущих трехчленов, сейчас мы видим перед собой уравнения: справа от всех трехчленов записано « $=0$ ». Не обращаем на это никакого внимания – на наших действиях это не отражается.

1-Й ЭТАП: ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАКА ДИСКРИМИНАНТА ДЛЯ КАЖДОГО ВАРИАНТА ОТВЕТА.

Вариант ответа 1). $x^2-2x-1=0$

$D=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-1)=4+4>0$

Этот трехчлен можно разложить на линейные множители.

Вариант ответа 2). $x^2-4x+5=0$

$D=(-4)^2-4\cdot1\cdot5=16-20<0$

Этот трехчлен нельзя разложить на линейные множители.

Вариант ответа 3). $x^2-2x+9=0$

$D=(-2)^2-4\cdot1\cdot9=4-36<0$

Этот трехчлен нельзя разложить на линейные множители.

Вариант ответа 4). $x^2+2x+9=0$

$D=2^2-4\cdot1\cdot9=4-36<0$

Этот трехчлен нельзя разложить на линейные множители.

Таким образом, исходя из знака дискриминанта, выбираем ответ 1).

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

1

ЗАПОМНИТЬ:

Можно или нельзя разложить квадратный трехчлен (или квадратное уравнение) на множители, определяется знаком «дискриминанта» $D=b^2-4ac$:
если $D=b^2-4ac\geq0$, то можно;
если $D=b^2-4ac<0$, то нельзя.

А теперь мы перейдем к так нелюбимым многими, но весьма простым текстовым задачам

3. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Довольно большая часть этих заданий, судя по всему, будет так или иначе связано с понятием процента числа. Хотя все необходимое для решения этого задания может быть понято при внимательном (!) разборе приведенных примеров, все же будет полезно прочитать специальное Тематическое Отступление. Эдакий маленький «кусочек теории» по поводу этих самых процентов.

ТЕМАТИЧЕСКОЕ ОТСТУПЛЕНИЕ: «ПРОЦЕНТЫ»

1) 1 процент (1%) какого-либо числа – это 1/100 часть этого числа.
   Чтобы найти 1% от числа, нужно это число просто разделить на 100 (напомню, что при делении на 100 десятичного числа запятая переносится влево на 2 позиции).
   Например:
   1% от 50 равен $\frac{50}{100} = 0{,}5$
   1% от 72 равен $\frac{72}{100} = 0{,}72$
   1% от 12,3 равен $\frac{12{,}3}{100} = 0{,}123$
2) Найти какое-либо количество процентов от числа можно похожим способом.
   Например:
   7% от 50 равно $\frac{7 \cdot 50}{100} = \frac{7 \cdot 5}{10} = \frac{35}{10} = 3{,}5$
   20% от 72 равно $\frac{20 \cdot 72}{100} = \frac{2 \cdot 72}{10} = \frac{144}{10} = 14{,}4$
   150% от 140 равно $\frac{150 \cdot 140}{100} = \frac{15 \cdot 14}{1} = 210$
   300% от 12,3 равно $\frac{300 \cdot 12{,}3}{100} = \frac{3 \cdot 12{,}3}{1} = 36{,}9$
3) Существует и более короткий способ вычисления процентов, назовем его «продвинутым» способом. Он достаточно прост, и к нему можно придти самостоятельно, внимательно просмотрев приведенные выше примеры. Покажем этот способ на тех же самых числах:
   7% от 50 равно $0{,}07 \cdot 50 = 3{,}5$
   20% от 72 равно $0{,}20 \cdot 72 = 14{,}4$
   150% от 140 равно $1{,}5 \cdot 140 = 210$
   300% от 12,3 равно $3 \cdot 12{,}3 = 36{,}9$
   Подытожим все сделанное в виде 2-х Правил, которые выглядят несколько «загрузочно», но по сути очень просты, как будет видно из примеров, приведенных в скобках.

Правило 1. Для вычисления процента $XX\%$ от числа A ($XX\% < 100$, например, 7%, 20%, 15,6%), нужно просто $0,XX$ умножить на это число ($0{,}07 \cdot A$; $0{,}20 \cdot A$; $0{,}156 \cdot A$).
Таким образом, $XX\%$ от числа A равен $0,XX \cdot A$.

Правило 2. Для вычисления процента $1XX\%$, $2XX\%$, $3XX\%$ … от числа A ($ZXX\% > 100$, например, 107%, 250%, 360%), нужно просто $1,XX$; $2,XX$; $3,XX$ … умножить на это число ($1{,}07 \cdot A$; $2{,}50 \cdot A$; $3{,}60 \cdot A$).
Таким образом, $ZXX\%$ от числа A равен $Z,XX \cdot A$.
В дальнейшем мы будем, как правило, использовать для вычислений именно «продвинутый» способ.

4) Во многих задачах упоминается, что некая величина увеличилась (↑) на $XX\%$ или уменьшилась (↓) на $XX\%$. И требуется узнать, какой эта величина оказалась в результате. Вычислять это мы всегда будем не в 2 действия (по этапам), как обычно принято в школе, а в 1 действие. Как именно – будет понятно из приведенных ниже примеров.

Итак, увеличение числа на $XX\%$.

Пример 1. 40 увеличили на 20%. Найти полученное число.
До увеличения число 40 составляло 100%, после увеличения $100 + 20 = 120\%$ от прежнего значения.
120% от 40 равно $1{,}20 \cdot 40 = 1{,}2 \cdot 40 = 48$.

Пример 2. 10 увеличили на 12,5%. Найти полученное число.
До увеличения число 10 составляло 100%, после увеличения $100 + 12{,}5 = 112{,}5\%$ от прежнего значения.
112,5% от 10 равно $1{,}125 \cdot 10 = 11{,}25$.

Пример 3. 140 увеличили на 250%. Найти полученное число.
До увеличения число 140 составляло 100%, после увеличения $100 + 250 = 350\%$ от прежнего значения.
350% от 140 равно $3{,}5 \cdot 140 = 35 \cdot 14 = 490$.

Таким образом, мы приходим к Правилу 3.

Правило 3.
Число A увеличено на $ZXX\%$. Получившееся число равно $(Z+1), XX \cdot A$.
$(1, XX \cdot A;\ \ 2, XX \cdot A;\ \ 3, XX \cdot A$ … если увеличение происходило на $0XX\%, 1XX\%,\ 2XX\%$ …).

Вычисление чисел, уменьшенных на $XX\%$ выполняется несколько иначе.

Пример 4. 40 уменьшили на 20%. Найти полученное число.
До уменьшения число 40 составляло 100%, после уменьшения $100 - 20 = 80\%$ от прежнего значения.
80% от 40 равно $0{,}8 \cdot 40 = 8 \cdot 4 = 32$.

Пример 5. 10 уменьшили на 12,5%. Найти полученное число.
До уменьшения число 10 составляло 100%, после уменьшения $100 - 12{,}5 = 87{,}5\%$ от прежнего значения.
87,5% от 10 равно $0{,}875 \cdot 10 = 8{,}75$.

Так мы приходим к Правилу 4.

Правило 4.
Число A уменьшено на $XX\%$. Получившееся число равно $0,(100 - XX) \cdot A$.
Таким образом, при ↓ числа целая часть всегда равна 0, а после запятой идут не сами проценты, указанные в условии, а их «количество, оставшееся до 100».

Вот, собственно и все, что нужно знать о процентах – не так уж и много!
На этом мы закончим это Тематическое Отступление, и перейдем к примерам.

3.1. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ «НА ПРОЦЕНТЫ»

ЗАДАНИЕ 3.1.1. В ОБУВНОМ МАГАЗИНЕ ПРОВОДИТСЯ АКЦИЯ. ПРИ ПОКУПКЕ ДВУХ ПАР ОБУВИ НА КАЖДУЮ ИЗ НИХ СКИДКА 20%. СКОЛЬКО НУЖНО БУДЕТ ЗАПЛАТИТЬ ПРИ ПОКУПКЕ ДВУХ ПАР ОБУВИ СТОИМОСТЬЮ 1350 РУБЛЕЙ И 2740 РУБЛЕЙ?

1-Й ЭТАП: СОСТАВИТЬ РИСУНОК (ГДЕ ВОЗМОЖНО), ВЫЧИСЛЕНИЯ.

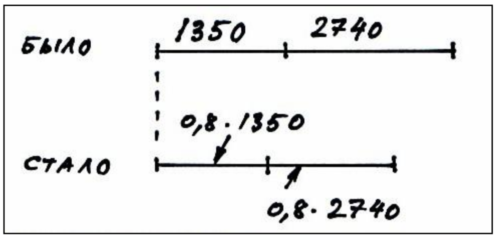


РИСУНОК 3.1.1

Допустим, рисунок будет таким – рис. 3.1.1.

Две пары обуви стоят $1350 + 2740 = 4090$ рублей. По условиям акции, их можно купить не за 100% (полная стоимость), а со скидкой 20%, то есть за $100 - 20 = 80\%$. Чтобы не делать лишних движений, не будем находить величину скидки, чтобы потом вычесть ее из полной стоимости. Вместо этого сразу найдем конечную цену с учетом скидки, то есть воспользуемся описанным выше «продвинутым способом» вычисления процентов:

$4090 \cdot 0{,}8 = 409 \cdot 8 = 3272$.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

2

ЗАДАНИЕ 3.1.2. В ПРОИЗВЕДЕНИИ ДВУХ СОМНОЖИТЕЛЕЙ ОДИН ИЗ НИХ УВЕЛИЧИЛИ НА 20%, А ДРУГОЙ УМЕНЬШИЛИ НА 20%. КАК ПРИ ЭТОМ ИЗМЕНИЛОСЬ ПРОИЗВЕДЕНИЕ?

1-Й ЭТАП: СОСТАВИТЬ РИСУНОК (ГДЕ ВОЗМОЖНО), ВЫЧИСЛЕНИЯ.

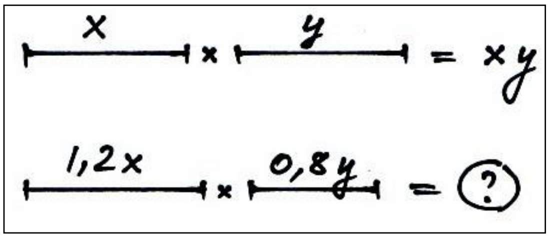


РИСУНОК 3.1.2

Допустим, рисунок будет таким – рис. 3.1.2.

Два сомножителя, упомянутые в условии, означают 2 числа, умноженные друг на друга.
Поскольку их величины неизвестны, можно записать их, например так: $x \cdot y$.
После того как первое число ↑ на 20%, оно стало равным $100 + 20 = 120\%$ от прежней величины, то есть $1{,}2x$.
Второе число после ↓ на 20% стало равным $100 - 20 = 80\%$ от прежней величины, то есть $0{,}8y$.
Их произведение стало равным не $x \cdot y$, а $1{,}2x \cdot 0{,}8y = 0{,}96xy$, то есть 96% от первоначального значения.
Таким образом, произведение этих чисел уменьшилось на 4%.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

4

ЗАДАНИЕ 3.1.3. **НА КЛУМБЕ РАСТУТ РОМАШКИ, ЛАНДЫШИ И РОЗЫ В ОТНОШЕНИИ 7:5:3. КАКОЙ ПРИМЕРНО ПРОЦЕНТ СОСТАВЛЯЮТ РОМАШКИ ОТ ВСЕХ ЦВЕТОВ НА КЛУМБЕ?**

1-Й ЭТАП: СОСТАВИТЬ РИСУНОК (ГДЕ ВОЗМОЖНО), ВЫЧИСЛЕНИЯ.

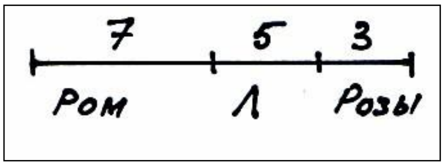


РИСУНОК 3.1.3

Для этой задачи рисунок может быть, например, таким (рис. 3.1.3).

Числа 7,5,3 – это не количество цветков в штуках, а именно их отношение в некоторых условных частях. Это нужно понимать так: из всех цветов 7 частей составляют ромашки, 5 частей ландыши и 3 части розы. Причем одна такая часть может содержать любое количества цветов (например, 5, 10 или даже 1 цветок, но это для решения задания и не важно).
Таким образом, общее количество таких частей равно $7 + 5 + 3 = 15$.
Чтобы найти процент числа ромашек от всех цветов, разделим количество ее частей на общее количество частей (именно так, а не наоборот – некоторые учащиеся почему-то всегда делят большее число на меньшее).

Итак,

$$\frac{7}{15} =< \text{вычисление "в столбик"} >\approx 0{,}466 \approx 0{,}47 = 47\%$$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

2

ЗАДАНИЕ 3.1.4. В КОМПОТ КЛАДУТ ЯБЛОКИ И ВИШНИ В ОТНОШЕНИИ 2:3. КАКОЙ ПРОЦЕНТ В ЭТОЙ СМЕСИ СОСТАВЛЯЮТ ЯБЛОКИ?

1-Й ЭТАП: СОСТАВИТЬ РИСУНОК (ГДЕ ВОЗМОЖНО), ВЫЧИСЛЕНИЯ.

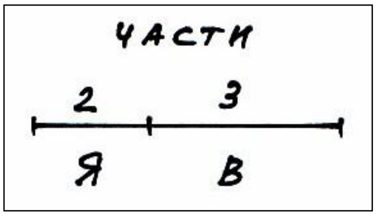


РИСУНОК 3.1.4

Условия задачи можно отобразить, например, так.

И опять: числа 2 и 3 – не количество яблок и вишен в штуках или граммах, а именно их отношение (или отношение их масс, или объемов). Таким образом, из смеси фруктов 2 части составляют яблоки, а 3 части – вишня. Чтобы найти % яблок в этой смеси, разделим количество частей яблок на общее количество частей:

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10} = 0{,}4 = 40\%.$$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

2

**ЗАДАНИЕ 3.1.5. ИЗ 60 ОДИННАДЦАТИКЛАССНИКОВ 20% УЧЕНИКОВ ВЫБРАЛИ ЕГЭ ПО ИНОСТРАННОМУ ЯЗЫКУ.
СКОЛЬКО ОДИННАДЦАТИКЛАССНИКОВ ВЫБРАЛИ ЕГЭ?**

1-Й ЭТАП: СОСТАВИТЬ РИСУНОК (ГДЕ ВОЗМОЖНО), ВЫЧИСЛЕНИЯ.

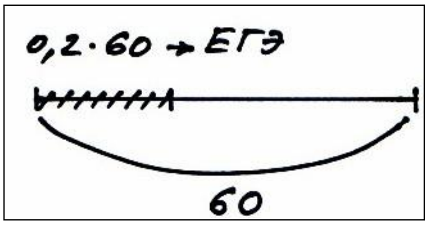


РИСУНОК 3.1.5

Изобразим условие задачи на рисунке (рис. 3.1.5).

Задачу можно решить, по крайней мере, двумя простыми способами.

Способ 1. Составим по условию задачи так называемую пропорцию:

60 чел. – 100%

x чел. – 20%

$x = \frac{60 \cdot 20}{100} = \frac{6 \cdot 2}{1} = 12$ (человек)

Способ 2. Просто найдем 20% от числа 60:

$0{,}2 \cdot 60 = 12$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

1

ЗАДАНИЕ 3.1.6. В ПРОДУКТОВОМ МАГАЗИНЕ ПРОВИДИТСЯ АКЦИЯ: КАЖДЫЙ СЛЕДУЮЩИЙ КИЛОГРАММ ЯБЛОК ПОСЛЕ ПЕРВОГО СТОИТ НА 10% ДЕШЕВЛЕ. КИЛОГРАММ ЯБЛОК СТОИТ 28 РУБЛЕЙ. СКОЛЬКО ПРИДЕТСЯ ЗАПЛАТИТЬ ЗА ДВА КИЛОГРАММА ЯБЛОК?

1-Й ЭТАП: СОСТАВИТЬ РИСУНОК (ГДЕ ВОЗМОЖНО), ВЫЧИСЛЕНИЯ.

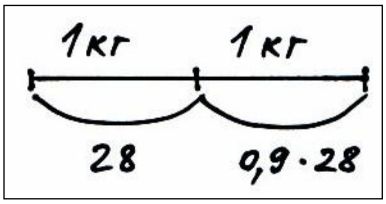


РИСУНОК 3.1.6

Отобразим это условие, например, рисунком 3.1.6.

Итак, за 1-й килограмм придется заплатить 28 рублей, 2-й будет стоить на 10% дешевле, то есть $100 - 10 = 90\%$ от 28 рублей. Его стоимость составит $0{,}9 \cdot 28$ руб.
Таким образом, два килограмма яблок будут стоить $28 + 0{,}9 \cdot 28 = 1{,}9 \cdot 28 = 53{,}2$ руб.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

2

Вот такие они, не особо и сложные, задачи «на проценты».

ЗАПОМНИТЬ:

1) Процент $\mathrm{XX}\%$ от числа A $(\mathrm{XX}\% < 100)$ равен $0,\mathrm{XX} \cdot \mathrm{A}$.

2) Процент $Z\mathrm{XX}\%$ от числа A $(Z\mathrm{XX}\% > 100)$ равен $Z,\mathrm{XX} \cdot \mathrm{A}$.

3) Число A увеличено на $Z\mathrm{XX}\%$. Получившееся число равно $(Z+1),\mathrm{XX} \cdot \mathrm{A}$.

4) Число A уменьшено на $\mathrm{XX}\%$. Получившееся число равно $0,(100 - \mathrm{XX}) \cdot \mathrm{A}$.

Оставшиеся текстовые задачи ГИА разделены на 2 группы заданий: текстовые задачи «на геометрию» и текстовые задачи «на движение». Поскольку они достаточно разнообразны и отличаются по схеме решения, трудно дать некие рецепты, пригодные абсолютно для каждой задачи. Но что-то ориентирующее и полезное все же можно предложить в виде набора советов:

- ✓ В задачах с отсутствующим рисунком необходимо составлять собственный (далее об этом написано подробнее);
- ✓ На собственном рисунке проставлять единицы измерения, как правило, не нужно. Исключение – если в тексте условия какая-либо величина указана в различных единицах (например, в Задании 3.3.1 скорость измеряется в $\mathrm{км/ч}$, а время движения дано в $\mathrm{минутах}$). Поскольку единицы измерения обязательно (!) нужно будет «выравнивать» (например, все расстояния – в километрах, все время – в часах), такое изначальное различие должно отражаться на рисунке;
- ✓ При составлении уравнений по условию задачи необходимо это делать исходя из некоторой простой разумной идеи (примеры этого приведены ниже). Собирать же уравнения наугад (как это делают некоторые) «из чисел и буковок», мелькающих в условии, практически бесполезно.
  Это приводит к тому, что ответ получается «хороший, но неправильный» ☺.

Все остальные моменты, не отраженные во вступлении к этой главе, содержатся в разбираемых ниже примерах типовых заданий.

Более подробную информацию по решению текстовых задач желающие могут найти в Задании B13 Пособия «ЕГЭ-2012 по математике для «чайников»: советы репетитора». Но для многих сдающих ГИА эта информация будет несколько избыточна.

3.2. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ «НА ГЕОМЕТРИЮ»

ЗАДАНИЕ 3.2.1. ПРОЧИТАЙТЕ ЗАДАЧУ:
«ДЛИНА ПЕРВОГО ЗЕМЕЛЬНОГО УЧАСТКА В 2 РАЗА БОЛЬШЕ ЕГО ШИРИНЫ, ДЛИНА ВТОРОГО – НА 20 МЕТРОВ БОЛЬШЕ ДЛИНЫ ПЕРВОГО, А ШИРИНА – НА 10 МЕТРОВ МЕНЬШЕ ШИРИНЫ ПЕРВОГО. ПЛОЩАДЬ ВТОРОГО УЧАСТКА $600\ \text{м}^2$, НАЙДИТЕ ДЛИНУ ПЕРВОГО УЧАСТКА». ПУСТЬ ДЛИНА ПЕРВОГО УЧАСТКА РАВНА x МЕТРОВ. КАКОЕ УРАВНЕНИЕ СООТВЕТСТВУЕТ УСЛОВИЮ ЗАДАЧИ?

1) $(x+20)(2x-10)=600$ 2) $(x+20)\left(\frac{x}{2}-10\right)=600$

3) $x+20+2x-10=600$ 4) $\frac{x+20}{2x-10}=600$

1-Й ЭТАП: СОСТАВИТЬ РИСУНОК ПО УСЛОВИЮ ЗАДАЧИ.

Именно так – рисовать! Я знаю все эти отговорки типа «нас не учили», «я не умею рисовать» и даже «нам запрещают делать рисунки» … Значит, пришло время научиться! Просто потому, что это необходимо сейчас, пригодится в будущем, да и совсем не сложно.

Действительно, многие не умеют делать красивые и правильные рисунки, да еще и с первого раза (я, например, еще не научился ☺). Но это и не требуется. Пусть рисунок поначалу будет корявым и неправильным, в следующий раз он окажется корявым и правильным – а этого уже достаточно! Причем, для набора хорошей формы не обязательно сделать сотни рисунков – скорее всего, достаточно будет и десятка.

Если 1-й вариант рисунка оказывается неправильным или каким-то недоделанным – это нормально. Тут же переделываем его при повторном прочтении условия.

И последний момент: я советую делать рисунки поэтапно, по мере прочтения условия.
Не составляя при этом никакого уродливого краткого условия, типа «Пусть x - это …, тогда …».
Для того и делается рисунок, чтобы «сгружать» на него всю информацию. И чтобы все было понятно при простом быстром просмотре.

Итак, рисунок к нашей текущей задаче может получиться, например, таким (рис. 3.2.1).

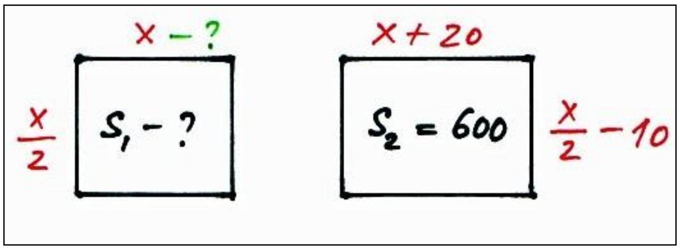


РИСУНОК 3.2.1

2-Й ЭТАП: БЕГЛЫЙ ПРОСМОТР ВОЗМОЖНЫХ ОТВЕТОВ С ЦЕЛЬЮ ПОНЯТЬ, КАКАЯ ИДЕЯ ЛЕЖИТ В ОСНОВЕ УРАВНЕНИЯ.

Не подглядывать слишком пристально в ответы – очень важно! Тем самым вы избегаете такого понятного соблазна поскорее выхватить что-нибудь, на ваш взгляд, наиболее правдоподобное. Пожалуй, это и есть основная причина ошибок в подобных задачах.

В условии нашей задачи речь идет о прямоугольниках и площади – видимо, нужно составить уравнение, связанное с площадью прямоугольника. Поскольку полными данными мы располагаем только относительно 2-го участка, уравнение будет связано именно с ним:

$$S_2 = 600 = (x + 20)\left(\frac{x}{2} - 10\right)$$

Таким образом, мы приходим к уравнению $(x + 20)\left(\frac{x}{2} - 10\right) = 600$, что соответствует ответу 2).

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

В нашем случае нужно еще раз внимательно прочитать условие и проверить правильность рисунка и уравнения. А именно – пройти весь путь заново, потому, что ошибка может случиться на любом этапе.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

2

ЗАДАНИЕ 3.2.2. ПРОЧИТАЙТЕ ЗАДАЧУ: «ШИРИНА ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА МЕНЬШЕ ДЛИНЫ НА 4 СМ, ДЛИНА МЕНЬШЕ ВЫСОТЫ НА 3 СМ, А ЕГО ОБЪЕМ РАВЕН 210 СМ^3. ЧЕМУ РАВНЫ СТОРОНЫ ЭТОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА?»
СОСТАВЬТЕ УРАВНЕНИЕ ЗАДАЧИ, ОБОЗНАЧИВ БУКВОЙ x ДЛИНУ МЕНЬШЕЙ СТОРОНЫ.

1-Й ЭТАП: СОСТАВИТЬ РИСУНОК ПО УСЛОВИЮ ЗАДАЧИ (РИС. 3.2.2).

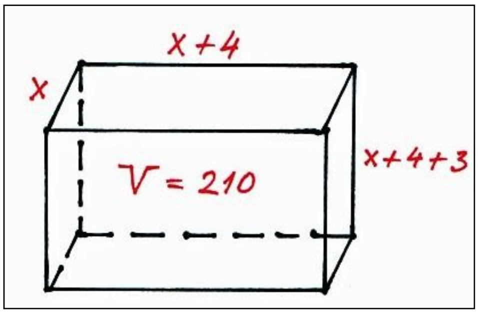


РИСУНОК 3.2.2

После нескольких прочтений условия становится понятно: высота здесь – самая большая, на 2-м месте длина, затем уже ширина (ее и обозначили x). То, что на рисунке самой большой оказалась длина – не важно, лишь бы надписи были правильными.

2-Й ЭТАП: СОСТАВИТЬ УРАВНЕНИЕ НА ОСНОВЕ СДЕЛАННОГО РИСУНКА.

Объем параллелепипеда равен

$V = 210 = x(x+4)(x+4+3)$

$210 = x(x+4)(x+7)$

$x(x+4)(x+7) = 210$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

$x(x+4)(x+7) = 210$

ЗАДАНИЕ 3.2.3. ПРОЧИТАЙТЕ ЗАДАЧУ: «ОДИН ИЗ КАТЕТОВ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА НА 5 СМ БОЛЬШЕ ДРУГОГО, А ЕГО ПЛОЩАДЬ РАВНА 88 СМ^2. ЧЕМУ РАВНЫ КАТЕТЫ ЭТОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА? СОСТАВЬТЕ УРАВНЕНИЕ ЗАДАЧИ, ОБОЗНАЧИВ БУКВОЙ x ДЛИНУ МЕНЬШЕЙ СТОРОНЫ.

1-Й ЭТАП: СОСТАВИТЬ РИСУНОК ПО УСЛОВИЮ ЗАДАЧИ.

Рисунок здесь предельно прост (рис. 3.2.3).

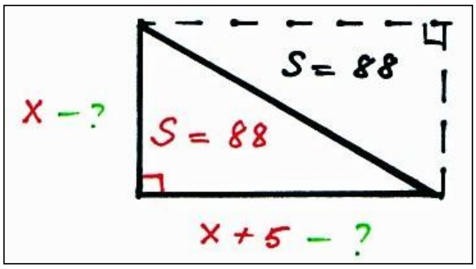


РИСУНОК 3.2.3

2-Й ЭТАП: СОСТАВИТЬ УРАВНЕНИЕ НА ОСНОВЕ СДЕЛАННОГО РИСУНКА.

Составить уравнение к этой (да и многим другим задачам) можно несколькими способами. Рассмотрим, в качестве примера, 2 способа решения этой задачи.

Способ 1.

Допустим, случилось так, что вы помните формулу площади треугольника ($S = \frac{1}{2}ah$) ☺.
В нашем случае она запишется так:

$$S_{\text{тр}} = \frac{1}{2}x(x+5) = 88$$

$$\frac{1}{2}x(x+5) = 88$$

Это и будет ответом.

Способ 2.

Допустим, что вы не помните (не знали, забыли) формулу площади треугольника. Это не страшно, решим и без нее! Подправим первоначальный рисунок, дорастив на нем треугольник до прямоугольника.

$$S_{\text{пр}} = x(x+5) = 88 \cdot 2$$

$$x(x+5) = 88 \cdot 2 \quad \text{или} \quad x(x+5) = 176$$

Это тоже будет правильным уравнением, только исходящим из другой идеи.

<u>Примечание.</u>

В сборниках задач по ГИА в качестве правильного приводится только ответ $\frac{1}{2}x(x+5)=88$. Таким образом, «совсем уж чайник», не сообразив, что речь идет об одном и том же, может решить, что где-то ошибся.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

$$\boxed{\frac{1}{2}x(x+5)=88}$$

А вот еще одна задача на тему треугольника.

ЗАДАНИЕ 3.2.4. ПРОЧИТАЙТЕ ЗАДАЧУ: «СТОРОНА ТРЕУГОЛЬНИКА НА 10 СМ БОЛЬШЕ ВЫСОТЫ, ОПУЩЕННОЙ НА НЕЕ, А ПЛОЩАДЬ РАВНА 40 СМ^2. НАЙДИТЕ ДЛИНУ ДАННОЙ ВЫСОТЫ». СОСТАВЬТЕ УРАВНЕНИЕ ПО УСЛОВИЮ ЗАДАЧИ, ОБОЗНАЧИВ ДЛИНУ ИСКОМОЙ ВЫСОТЫ ЗА x.

1-Й ЭТАП: СОСТАВИТЬ РИСУНОК ПО УСЛОВИЮ ЗАДАЧИ.

Поскольку в условии не сказано о том, какой именно это треугольник, будем считать его (и рисовать) произвольным (рис. 3.2.4).

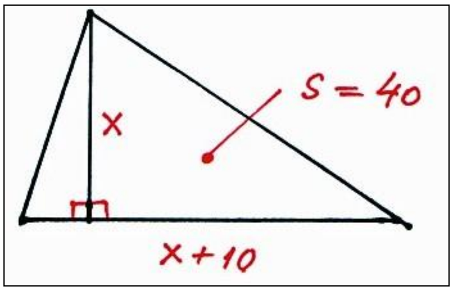


РИСУНОК 3.2.4

2-Й ЭТАП: СОСТАВИТЬ УРАВНЕНИЕ НА ОСНОВЕ СДЕЛАННОГО РИСУНКА.

Воспользуемся все той же самой, теперь уже запомненной формулой (а ее действительно нужно помнить!).

$$S_{\text{тр}} = \frac{1}{2}ah$$

$$S_{\text{тр}} = 40 = \frac{1}{2}x(x+10)$$

$$\frac{1}{2}x(x+10) = 40 \quad \text{или} \quad \frac{x(x+10)}{2} = 40$$

Это и будет ответом.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

$$\boxed{\frac{x(x+10)}{2} = 40}$$

ЗАДАНИЕ 3.2.5. ПРОЧИТАЙТЕ ЗАДАЧУ:

«ОТ КВАДРАТНОГО ЛИСТА ФАНЕРЫ ОТРЕЗАЛИ ПОЛОСУ ШИРИНОЙ 15 СМ. ПЛОЩАДЬ ОСТАВШЕГОСЯ КУСКА РАВНА 4500 СМ. НАЙДИТЕ ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЕ РАЗМЕРЫ КУСКА ФАНЕРЫ».

СОСТАВЬТЕ УРАВНЕНИЕ ПО УСЛОВИЮ ЗАДАЧИ, ОБОЗНАЧИВ ЗА x ДЛИНУ СТОРОНЫ ИМЕВШЕГОСЯ КУСКА ФАНЕРЫ.

1-Й ЭТАП: СОСТАВИТЬ РИСУНОК ПО УСЛОВИЮ ЗАДАЧИ (РИС. 3.2.5).

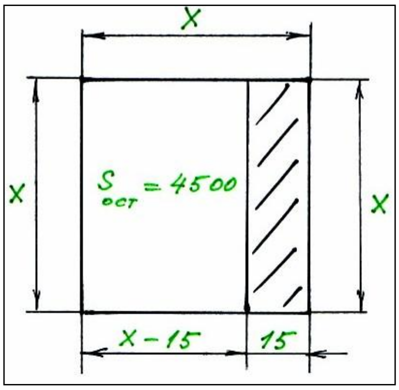


РИСУНОК 3.2.5

2-Й ЭТАП: СОСТАВИТЬ УРАВНЕНИЕ НА ОСНОВЕ СДЕЛАННОГО РИСУНКА.

Идея задачи связана в площадью и проста:
«то, что было $=$ тому, что осталось $+$ то, что отрезали».

$x \cdot x = 4500 + 15x$

$x^2 = 4500 + 15x$

В качестве ответа можно использовать либо эту запись, либо как-то ее подправить. Например, так:

$x^2 - 15x = 4500.$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

$x^2 = 4500 + 15x$

ЗАДАНИЕ 3.2.6. ПРОЧИТАЙТЕ ЗАДАЧУ: «ДЛЯ ОТДЕЛКИ ПОМЕЩЕНИЯ ИЗ КВАДРАТНОЙ ПЛИТКИ ВЫРЕЗАЛИ УГОЛЬНИК ПЛОЩАДЬЮ 160 см^2. ТОРЦЕВЫЕ СТОРОНЫ УГОЛЬНИКА РАВНЫ 8 СМ. ЧЕМУ РАВНА СТОРОНА КВАДРАТА, КОТОРЫЙ ОСТАЕТСЯ ПОСЛЕ ОБРЕЗКИ ПЛИТКИ?». ПУСТЬ СТОРОНА ИСКОМОГО КВАДРАТА РАВНА x. КАКОЕ УРАВНЕНИЕ СООТВЕТСТВУЕТ УСЛОВИЮ ЗАДАЧИ?

1) $(x+8)^2 = 160$ 2) $(x+8)^2 - x^2 = 160$

3) $x^2 + (x+8^2) = 160$ 4) $\dfrac{(x+8)^2}{x} = 160$

1-Й ЭТАП: СОСТАВИТЬ РИСУНОК ПО УСЛОВИЮ ЗАДАЧИ.

2-Й ЭТАП: БЕГЛЫЙ ПРОСМОТР ВОЗМОЖНЫХ ОТВЕТОВ С ЦЕЛЬЮ ПОНЯТЬ, КАКАЯ ИДЕЯ ЛЕЖИТ В ОСНОВЕ УРАВНЕНИЯ.

Рассмотрим для тренировки два способа решения этой задачи.

Способ 1.

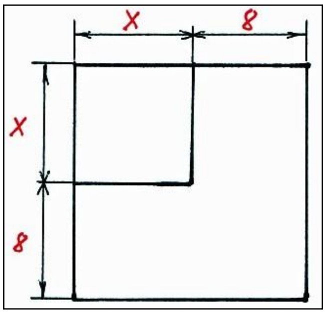


РИСУНОК 3.2.6а

Идея уравнения связана с площадью и звучит так:
«то, что было $=$ отрезанное $+$ оставшееся»:

$(x+8)(x+8) = 160 + x \cdot x$ $-$ см. рисунок (рис. 3.2.6а).

$(x+8)^2 - x^2 = 160$

Выбираем ответ 2).

Способ 2.

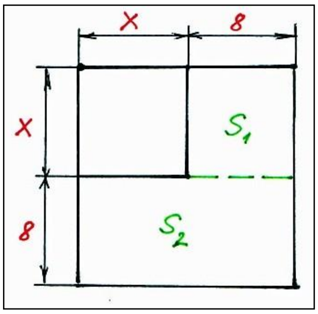


РИСУНОК 3.2.6б

Идея уравнения такова:
«площадь уголка $= S_1 + S_2$» (рис. 3.2.6б):

$$160 = 8x + 8(x + 8)$$

Это правильная идея и правильное уравнение, приводящее к правильному ответу – но его нет в вариантах ответов! Оказывается, бывает и так.
Поэтому в данном случае Способ 1 «правильнее!».

Именно в этом и заключается смысл 2-го этапа в подобных задачах – «прикинуть по-быстрому», с какой идеей нужно связывать будущее уравнение!

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

Для качественной проверки нужно еще раз внимательно прочитать условие и проверить правильность рисунка и уравнения.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

2

Примечание.
Способ 2 специально приведен в этой задаче, чтобы проиллюстрировать следующее:

- ✓ В основе будущего уравнения могут лежать разные правильные идеи;
- ✓ Если в задаче предложены варианты ответов, то не всякая правильная идея пригодна для этих ответов;
- ✓ Цель предварительного беглого просмотра ответов состоит как раз в том, чтобы выбрать «наиболее правильную» идею.

А теперь перейдем к 3-й группе текстовых задач – «на движение».

3.3. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ «НА ДВИЖЕНИЕ»

ЗАДАНИЕ 3.3.1. ПРОЧИТАЙТЕ ЗАДАЧУ:

«ВЕЛОСИПЕДИСТ НА ТРЕНИРОВКЕ ПРОЕХАЛ 5 КМ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ, А ПОТОМ ЕЩЕ 3 КМ СО СКОРОСТЬЮ НА 5 КМ/Ч МЕНЬШЕ. ВЕСЬ ПУТЬ ЗАНЯЛ 27 МИНУТ. КАКОВА ПЕРВОНАЧАЛЬНАЯ СКОРОСТЬ ВЕЛОСИПЕДИСТА?»

ПУСТЬ x КМ/Ч – ПЕРВОНАЧАЛЬНАЯ СКОРОСТЬ ВЕЛОСИПЕДИСТА.

КАКОЕ УРАВНЕНИЕ СООТВЕТСТВУЕТ УСЛОВИЮ ЗАДАЧИ?

1) $\frac{5}{x}+\frac{3}{x-5}=27$ 2) $\frac{5}{x+5}+\frac{3}{x}=0,45$

3) $\frac{5}{x}+\frac{3}{x-5}=0,45$ 4) $5x+3(x-5)=27$

1-Й ЭТАП: СОСТАВИТЬ РИСУНОК ПО УСЛОВИЮ ЗАДАЧИ (РИС. 3.3.1).

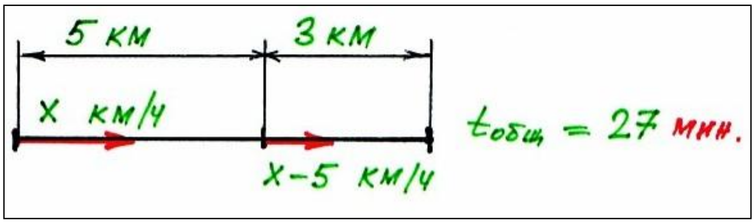


РИСУНОК 3.3.1

2-Й ЭТАП: БЕГЛЫЙ ПРОСМОТР ВОЗМОЖНЫХ ОТВЕТОВ С ЦЕЛЬЮ ПОНЯТЬ, КАКАЯ ИДЕЯ ЛЕЖИТ В ОСНОВЕ УРАВНЕНИЯ.

Во всех уравнениях так или иначе выражено общее время движения ($t_{\text{общ}}$).

Понятно, что

$t_{\text{общ}}=t_1+t_2$

С учетом того, что $t=\frac{s}{v}$ («скорость поделить на время»),

$t_{\text{общ}}=\frac{5}{x}+\frac{3}{x-5}$

Поскольку в условии задачи скорость x выражена в км/ч, все расстояния должны быть выражены в километрах, а время – в часах. Поэтому переведем $t_{\text{общ}}$ из минут в часы:

$t_{\text{общ}}=27\text{ мин}=\frac{27}{60}\text{ ч}$ («27 минут из 60»)

$\frac{27}{60}=\frac{27:3}{60:3}=\frac{9}{20}=\frac{4,5}{10}=0,45$

Таким образом, $t_{\text{общ}}=0,45$ ч.

После этого мы сразу приходим к ответу из варианта 3):

$$\frac{5}{x}+\frac{3}{x-5}=0{,}45$$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

3

Многие другие задачи «на движение» практически копируют только что разобранную. Или имеют минимальные отличия. Поэтому ограничимся решением только одной такой задачи.

ЗАПОМНИТЬ:

При составлении уравнений в подобных заданиях очень важно выполнять эти этапы:

1-й этап: составить рисунок по условию задачи.

2-й этап: составить уравнение на основе сделанного рисунка.

И вы будете непобедимы ☺! Во всяком случае – в текстовых задачах…

4. УРАВНЕНИЯ. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Все уравнения, которые здесь встречаются, условно можно разделить на «обычные» (линейные) и «квадратные». Решение и тех, и других уравнений, как правило, не представляет никакой сложности. Рассмотрим сначала три типовых задания на решение «обычных» уравнений.

4.1. «РЕШИТЕ ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ»

ЗАДАНИЕ 4.1.1. РЕШИТЕ УРАВНЕНИЕ $\mathbf{15 - 3(2x - 4) = 11 - x}$

По уже сложившейся традиции, всевозможную теорию заменим очень подробным решением.

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ КОРНЯ УРАВНЕНИЯ.

$15 - 3 \cdot (2x - 4) = 11 - x$

$15 - 3 \cdot 2x + 3 \cdot 4 = 11 - x$

$15 + 12 - 11 = -x + 6x$

$27 - 11 = 6x - x$

$16 = 5x$

$5x = 16$

$$\frac{5x}{5} = \frac{16}{5}$$

$$x = \frac{16}{5} = \frac{16 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{32}{10} = 3{,}2$$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

Подставим $x = 3{,}2$ в исходное уравнение и проверим равенство его левой и правой частей (они должны быть равны).

$15 - 3 \cdot (2 \cdot 3{,}2 - 4) = 11 - 3{,}2$

$15 - 3 \cdot (6{,}4 - 4) = 7{,}8$

$15 - 7{,}2 = 7{,}8$

$7{,}8 = 7{,}8$

Уравнение решено правильно.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

3,2

ЗАДАНИЕ 4.1.2. РЕШИТЕ УРАВНЕНИЕ $\mathbf{16 - 7(3 - 4x) = 27 + 20x}$

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ КОРНЯ УРАВНЕНИЯ.

$16 - 7 \cdot (3 - 4x) = 27 + 20x$

$16 - 7 \cdot 3 + 7 \cdot 4x = 27 + 20x$

$16 - 21 + 28x = 27 + 20x$

$28x - 20x = 27 - 16 + 21$

$8x = 32$

$\frac{8x}{8} = \frac{32}{8}$

$x = 4$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

Подставим $x = 4$ в исходное уравнение и проверим равенство его левой и правой частей (они должны быть равны).

$16 - 7 \cdot (3 - 4 \cdot 4) = 27 + 20 \cdot 4$

$16 - 7 \cdot (-13) = 27 + 80$

$16 + 91 = 107$

$107 = 107$

Уравнение решено правильно.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

4

ЗАДАНИЕ 4.1.3. РЕШИТЕ УРАВНЕНИЕ

$$\frac{x}{20}-\frac{x}{5}=\frac{3}{4}$$

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ КОРНЯ УРАВНЕНИЯ.

$$\frac{x}{20}-\frac{x}{5}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{x}{20}-\frac{x\cdot 4}{5\cdot 4}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 5}$$

$$\frac{x}{20}-\frac{4x}{20}=\frac{15}{20}$$

$$-\frac{3x}{20}=\frac{15}{20}$$

$$-3x=15$$

$$\frac{-3x}{-3}=\frac{15}{-3}$$

$$x=-5$$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

Подставим $x=-5$ в исходное уравнение и проверим равенство его левой и правой частей (они должны быть равны).

$$\frac{x}{20}-\frac{x}{5}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{-5}{20}-\frac{-5}{5}=-\frac{5}{20}+\frac{5}{5}=-\frac{5}{20}+\frac{5\cdot 4}{5\cdot 4}=-\frac{5}{20}+\frac{20}{20}=\frac{20}{20}-\frac{5}{20}=\frac{15}{20}=\frac{15:5}{20:5}=\frac{3}{4}$$

Уравнение решено правильно.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

-5

А теперь, после «обычных», перейдем к «квадратным» уравнениям.

4.2. «РЕШИТЕ КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ»

Квадратные уравнения могут иметь либо 2 корня, либо 1 корень, либо не иметь корней вообще. Узнать об этом можно по значению так называемого дискриминанта (о котором мы уже говорили в пункте 2.8).

А именно:

если $D = b^2 - 4ac > 0$, то уравнение имеет 2 корня;
если $D = b^2 - 4ac = 0$, то уравнение имеет 1 корень;
если $D = b^2 - 4ac < 0$, то уравнение не имеет корней.

Проверкой количества корней «через дискриминант» мы и будем заниматься на 1-м этапе каждого подобного задания.

ЗАДАНИЕ 4.2.1. РЕШИТЕ УРАВНЕНИЕ $\boldsymbol{x^2 + 13x + 30 = 0}$

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ДИСКРИМИНАНТА С ЦЕЛЬЮ ОПРЕДЕЛИТЬ КОЛИЧЕСТВО КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ.

$x^2 + 13x + 30 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 13^2 - 4 \cdot 1 \cdot 30 = 169 - 120 = 49 > 0\ -2$ корня.

2-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ.

Корни квадратного уравнения, как правило, вычисляются по следующей формуле:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\mathrm{D}}}{2a}$$

В действительности, эта формула является объединением 2-х формул для вычисления корней x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\mathrm{D}}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\mathrm{D}}}{2a}$$

В нашем примере

$$x_1 = \frac{-13 - \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-13 - 7}{2} = \frac{-20}{2} = -10$$

$$x_2 = \frac{-13 + 7}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

Найденные корни подставляем в исходное уравнение.

$(-10)^2 + 13(-10) + 30 = 100 - 130 + 30 = 0$ (правильно).

$(-3)^2 + 13(-3) + 30 = 9 - 39 + 30 = 0$ (правильно).

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

-10; -3

ЗАДАНИЕ 4.2.2. РЕШИТЕ УРАВНЕНИЕ $2x^2 - 5x = 7$

Прежде, чем решать это уравнение по предложенной выше схеме, приведем его к нужному виду:

$$2x^2 - 5x - 7 = 0$$

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ДИСКРИМИНАНТА С ЦЕЛЬЮ ОПРЕДЕЛИТЬ КОЛИЧЕСТВО КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ.

$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-7) = 25 + 56 = 81 > 0\ -2$ корня.

2-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\mathrm{D}}}{2a} = \frac{5 - \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \frac{5 - 9}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\mathrm{D}}}{2a} = \frac{5 + 9}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

Найденные корни подставляем в исходное уравнение.

$2(-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 7 = 2 \cdot 1 + 5 - 7 = 0$ (правильно)

$2 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 5 \cdot 3{,}5 - 7 = 2 \cdot \frac{49}{4} + 17{,}5 - 7 = 24{,}5 - 17{,}5 - 7 = 7 - 7 = 0$ (правильно)

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

-1; 3,5

ЗАДАНИЕ 4.2.3. РЕШИТЕ УРАВНЕНИЕ $\mathbf{3+(x+1)^2=2x+5}$

Это уравнение тоже нужно сначала привести в виду $ax^2+bx+c=0$, но перед этим разберемся со скобкой $(x+1)^2$. Сделать это можно двумя способами:

- ✓ Если вы помните формулы сокращенного умножения, то сразу запишете $(x+1)^2=x^2+2x+1$;
- ✓ Если это формула «ваще низнакома» или просто «не узнается», то можно сделать так:
$$(x+1)^2=(x+1)(x+1)=x^2+x+x+1=x^2+2x+1$$
(то же самое успешно можно делать для скобок $(x-1)^2$ и $(x\pm1)^3$).

Таким образом, наше исходное уравнение преобразовывается к виду:

$3+x^2+2x+1\ =2x+5$

$3+x^2+1\ =5$

$3+x^2+1-5=0$

$x^2-1=0$

Внимание! Полученное уравнение является «неполным» – в нем отсутствует одно слагаемое (в данном случае, содержащее x, что означает $b=0$).
Для решения «неполных» квадратных уравнений дискриминант вычислять не нужно, так как без него они решаются проще! Поэтому отказывается от сложившейся схемы решения «через дискриминант».

1-Й ЭТАП: РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ.

Решить же его можно, опять-таки, двумя способами.

Способ 1.

$x^2-1=0$

$x^2-1^2=0$

$(x+1)(x-1)=0$

$x+1=0$ или $x-1=0$

$x=-1$ или $x=1$

Таким образом, $x_1=-1$, $x_2=1$.

Способ 2.

$x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1$

$x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

Получаем те же корни: $x_1 = -1,\ \ x_2 = 1.$

Примечание.
Для решения подобных уравнений можете пользоваться наиболее комфортным для вас способом.
Однако, как показывает практика, в Способе 2 учащиеся регулярно забывают про знак «—», что приводит к потере корня (и здесь они получили бы единственный корень $x = 1$).
Способ 1 кажется более громоздким и искусственным, однако в нем невозможно потерять корень. Кроме того, он будет очень удобен и даже необходим в решении более сложных уравнений и особенно неравенств (которые решаются так называемым «методом интервалов»).
Я бы посоветовал «набивать руку» прежде всего на Способе 1.
Его некая неуклюжесть перекрывается (особенно в будущем) его преимуществами.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

Найденные корни подставляем в исходное уравнение.

Приведем его здесь еще раз: $3 + (x+1)^2 = 2x + 5.$

$3 + (-1+1)^2 = 2 \cdot (-1) + 5$

$3 + 0 = -2 + 5$

$3 = 3 \ \ (\text{правильно}).$

$3 + (1+1)^2 = 2 \cdot 1 + 5$

$3 + 4 = 2 + 5$

$7 = 7 \ \ (\text{правильно}).$

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

-1; 1

Примечание.
Если вам все же непременно хочется решать по стандартной схеме «через дискриминант» (просто удобнее автоматически делать одни и то есть же действия), то и это возможно!
Для последнего примера я приведу такой способ решения, на впредь использовать его не буду, так как мне он непривычен и неудобен.

Итак,

$x^2 - 1 = 0$

$x^2 + 0 \cdot x - 1 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 4$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\mathrm{D}}}{2a} = \frac{0 - \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{0 - 2}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\mathrm{D}}}{2a} = \frac{0 + 2}{2} = 1$$

И, в заключении, последнее задание этой главы.

ЗАДАНИЕ 4.2.4. РЕШИТЕ УРАВНЕНИЕ $2a^2 - 5a + 3 = 0$

У кого-то такое уравнение может вызвать недоумение: как решать «с иксом» – понятно, но здесь почему-то буква a! И что теперь делать?

А все то же самое!

1-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ ДИСКРИМИНАНТА С ЦЕЛЬЮ ОПРЕДЕЛИТЬ КОЛИЧЕСТВО КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ.

$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1 > 0\ - 2$ корня.

2-Й ЭТАП: ВЫЧИСЛЕНИЕ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\mathrm{D}}}{2a} = \frac{5 - \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{5 - 1}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\mathrm{D}}}{2a} = \frac{5 + 1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

Найденные корни подставляем в исходное уравнение.

$2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 3 = 2 - 5 + 3 = 0$ (правильно).

$2 \cdot 1{,}5^2 - 5 \cdot 1{,}5 + 3 = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{3}{2} + 3 = \frac{2 \cdot 9}{4} - \frac{5 \cdot 3}{2} + 3 = 4{,}5 - 7{,}5 + 3 = 0$ (правильно).

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

1; 1,5

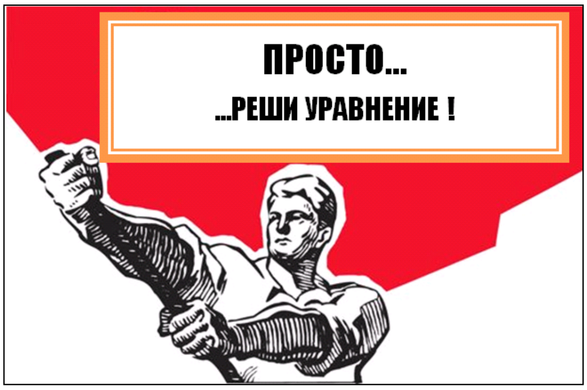
ЗАПОМНИТЬ:

Корни квадратного уравнения вычисляются по следующей формуле:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\mathrm{D}}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

А мы идем дальше, к следующему заданиям ГИА …

4.3. «ВЫРАЗИТЕ ИЗ ФОРМУЛЫ …»



ЗАДАНИЕ 4.3.1. **ВЫРАЗИТЕ ИЗ ФОРМУЛЫ ПЕРИМЕТРА ПРЯМОУГОЛЬНИКА $\boldsymbol{P = 2(a + b)}$ ДЛИНУ $\boldsymbol{b}$.**

1-Й ЭТАП: ВЫБОР СПОСОБА ВЫРАЖЕНИЯ ПЕРЕМЕННОЙ, ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Способ 1.

$$P = 2(a + b)$$
$$\frac{P}{2} = \frac{2(a + b)}{2}$$
$$\frac{P}{2} = a + b$$
$$a + b = \frac{P}{2}$$
$$b = \frac{P}{2} - a$$

Способ 2.

$$P = 2(a + b)$$
$$P = 2a + 2b$$
$$2a + 2b = P$$
$$2b = P - 2a$$
$$\frac{2b}{2} = \frac{P - 2a}{2}$$
$$b = \frac{P - 2a}{2} = (*) = \frac{P}{2} - \frac{2a}{a} = \frac{P}{2} - a$$

В принципе, выражение, полученное до $(*)$, тоже можно оставить в качестве окончательного ответа.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

Если подобные задания у вас получаются стабильно хорошо, достаточно просто заново решить пример. Если же вы в чем-то сомневаетесь, то в качестве проверки лучше решить задание другим способом, а затем сверить полученные ответы.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

$$\frac{P}{2} - a$$

Или, в зависимости от требований к форме записи ответа, таким образом:

$$P/2 - a$$

ЗАДАНИЕ 4.3.2. ВЫРАЗИТЕ ИЗ ФОРМУЛЫ СКОРОСТИ РАВНОУСКОРЕННОГО ДВИЖЕНИЯ $v = v_0 + at$ УСКОРЕНИЕ a.

1-Й ЭТАП: ВЫБОР СПОСОБА ВЫРАЖЕНИЯ ПЕРЕМЕННОЙ, ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Исходная формула слишком проста, чтобы выдумывать для нее разные способы преобразования. Просто решаем обычное уравнение с немного необычными «буковками».

$$v = v_0 + at$$

$$v - v_0 = at$$

$$at = v - v_0$$

$$\frac{at}{t} = \frac{v - v_0}{t}$$

$$a = \frac{v - v_0}{t}$$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

$$\frac{v - v_0}{t}$$

Или, в зависимости от требований к форме записи ответа, таким образом:

$$(v - v_0)/t$$

ЗАДАНИЕ 4.3.3. ВЫРАЗИТЕ ИЗ ФОРМУЛЫ ДЖОУЛЯ – ЛЕНЦА $Q = I^2Rt$ СИЛУ ТОКА I.

1-Й ЭТАП: ВЫБОР СПОСОБА ВЫРАЖЕНИЯ ПЕРЕМЕННОЙ, ВЫЧИСЛЕНИЯ.

$Q = I^2Rt$

$I^2Rt = Q$

$\frac{I^2Rt}{Rt} = \frac{Q}{Rt}$

$I^2 = \frac{Q}{Rt}$

$I = \sqrt{\frac{Q}{Rt}}$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

$\boxed{\sqrt{\frac{Q}{Rt}}}$

Или, в зависимости от требований к форме записи ответа, таким образом:

$\boxed{\sqrt{Q/(Rt)}}$

ЗАДАНИЕ 4.3.4. ВЫРАЗИТЕ ИЗ ФОРМУЛЫ ПЕРИОДА КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКА $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ДЛИНУ МАЯТНИКА l.

Это задание несколько сложнее предыдущих.
Но мы специально так и идем: от простого – к сложному.

1-Й ЭТАП: ВЫБОР СПОСОБА ВЫРАЖЕНИЯ ПЕРЕМЕННОЙ, ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Способ 1.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = T$$

$$\frac{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}{2\pi} = \frac{T}{2\pi}$$

$$\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{T}{2\pi}$$

$$\left(\sqrt{\frac{l}{g}}\right)^2 = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{T^2}{(2\pi)^2} = \frac{T^2}{4\pi^2}$$

$$\frac{l}{g} = \frac{T^2}{4\pi^2}$$

$$\frac{l \cdot g}{g} = \frac{T^2 \cdot g}{4\pi^2}$$

И, наконец, получаем долгожданный ответ:

$$l = \frac{T^2 \cdot g}{4\pi^2} = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

Способ 2.

Представим исходную формулу в виде так называемой пропорции, и воспользуемся правилами работы с ней.

Примечание: в пропорции (то есть равенстве вида $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$) выполняется условие $a \cdot b = c \cdot d$, что визуально напоминает некий «крестик».
Этот прием для «перевода равенства дробей в равенство произведений», то есть «вытягивание» пропорции в одну строчку, мы будем использовать в некоторых дальнейших вычислениях.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\frac{T}{1} = \frac{2\pi}{1} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{2\pi\sqrt{l}}{\sqrt{g}}$$

$$\frac{T}{1} = \frac{2\pi\sqrt{l}}{\sqrt{g}}$$

Воспользуемся правилом «крестика»:

$$T\sqrt{g} = 2\pi\sqrt{l} \cdot 1$$

$$T\sqrt{g} = 2\pi\sqrt{l} \qquad (*)$$

$$\frac{T\sqrt{g}}{2\pi} = \frac{2\pi\sqrt{l}}{2\pi}$$

$$\frac{T\sqrt{g}}{2\pi} = \sqrt{l}$$

$$\sqrt{l} = \frac{T\sqrt{g}}{2\pi}$$

$$\left(\sqrt{l}\right)^2 = \left(\frac{T\sqrt{g}}{2\pi}\right)^2$$

$$l = \left(\frac{T\sqrt{g}}{2\pi}\right)^2 = \frac{T^2\left(\sqrt{g}\right)^2}{(2\pi)^2} = \frac{T^2 g}{(2\pi)^2} = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

Итак, мы получили тот же самый ответ:

$$l = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

Разумеется, начиная практически с любого шага вычислений, можно было пойти по какому-нибудь другому пути. Например, начиная с $(*)$ сделать так:

$$T\sqrt{g} = 2\pi\sqrt{l}$$

$$\left(T\sqrt{g}\right)^2 = \left(2\pi\sqrt{l}\right)^2$$

$$T^2 g = 4\pi^2 l$$

$$\frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{4\pi^2 l}{4\pi^2}$$

$$\frac{T^2 g}{4\pi^2} = l$$

$$l = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

$$\boxed{\frac{gT^2}{4\pi^2}}$$

Или, в зависимости от требований к форме записи ответа, таким образом:

$$\boxed{gT^2/(4\pi^2)}$$

ЗАДАНИЕ 4.3.5. ВЫРАЗИТЕ ИЗ ФОРМУЛЫ $F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{R^2}$ РАССТОЯНИЕ R.

1-Й ЭТАП: ВЫБОР СПОСОБА ВЫРАЖЕНИЯ ПЕРЕМЕННОЙ, ВЫЧИСЛЕНИЯ.

Способ 1.

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{R^2}$$

$$\frac{F}{1} = \frac{G}{1} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{R^2} = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{1 \cdot R^2} = \frac{Gm_1m_2}{R^2}$$

Итак,

$$\frac{F}{1} = \frac{Gm_1m_2}{R^2}$$

Воспользуемся правилом «крестика»:

$$F \cdot R^2 = 1 \cdot Gm_1m_2$$

$$FR^2 = Gm_1m_2 \quad (**)$$

$$\frac{FR^2}{F} = \frac{Gm_1m_2}{F}$$

$$R^2 = \frac{Gm_1m_2}{F}$$

$$R = \sqrt{\frac{Gm_1m_2}{F}}$$

Способ 2.

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{R^2}$$

$$\frac{F}{G} = \frac{G}{G} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{R^2}$$

$$\frac{F}{G} = \frac{m_1 \cdot m_2}{R^2}$$

Воспользуемся правилом «крестика»:

$$FR^2 = Gm_1m_2$$

Мы пришли к $(**)$, и дальнейшие вычисления уже известны.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

$$\boxed{\sqrt{\frac{Gm_1m_2}{F}}}$$

Или, в зависимости от требований к форме записи ответа, таким образом:

$$\boxed{\sqrt{(Gm_1m_2)/F}}$$

Желаю вам непременно «срубить» такой не лишний балл на этом, на первый взгляд непростом задании «выразите из формулы…».
Но для этого предварительно все-таки надо потренироваться!

4.4. «СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ БЕЗ ГРАФИКА»

Следующие два пункта этой главы связаны с так называемыми «системами уравнений».

Система уравнений – это несколько уравнений, объединенных скобкой, означающей то, что их нужно для каких-либо целей рассматривать совместно. Если вы никогда не видели систем уравнений – посмотрите на примеры, рассмотренные ниже ☺.

Решить систему уравнений означает найти некие конкретные числа $x = \cdots$ и $y = \cdots$, при которых будут выполняться оба уравнения. То есть, после подстановки этих чисел в уравнения, их левые части будут равны правым. Если же таких чисел не существует вообще – считается, что система не имеет решений.

Поскольку каждое из уравнений системы может быть изображено на графике некоторой линией, то решение системы уравнений графически связано с точками пересечения этих линий.
А нахождение координат $(x; y)$ этих точек и означает решение системы уравнений.
Иными словами, решением системы уравнений будут значения координат $x = \cdots$ и $y = \cdots$ точек пересечения линий на графике.

Количество же решений системы определяется количеством точек пересечения линий.
Например, если линии пересекаются в 2-х точках, то система имеет 2 решения; если точек пересечения нет – то и система не имеет решений.

Все задания, связанные с «системами уравнений», можно условно разделить на 2 группы:

1) Задания, в которых дается система уравнений без графиков вообще. В них требуется вычислить («обойтись без рисования»), – имеет ли система решения и сколько их.
   В некоторых заданиях, кроме того, нужно найти конкретные значения $(x; y)$;
2) Задания, в которых дается система уравнений и график одной из входящих в нее функций. Здесь требуется каким-либо образом нарисовать (или мысленно представить) график второй функции и выяснить – имеются ли у функций точки пересечения («решения системы»), и если да, то сколько их.

А для скорейшего наполнения практическим смыслом всего сказанного, рассмотрим примеры обеих групп.

1-ю группу заданий проиллюстрируют задания 4.4.1, 4.4.2 и задание 4.5.5.
Причем разбирать последнее задание действительно лучше именно в конце работы с пунктом 4.5.

ЗАДАНИЕ 4.4.1. РЕШИТЕ СИСТЕМУ УРАВНЕНИЙ

$$\begin{cases} \mathbf{3x+2y=12} \\ \mathbf{4x+y=11} \end{cases}$$

Существует несколько методов решения подобных систем уравнений. Мы рассмотрим только один из них – так называемый «метод подстановки». Именно он наиболее знаком многим и уместен для решения систем уравнений, предлагаемых в Заданиях ГИА. Его название связано со следующей идеей: на начальном этапе решения системы нужно из какого-либо уравнения выразить одну переменную через другую (например, x через y), а затем подставить ее в другое уравнение.

Рассмотрим применение этого метода на нашем примере.

Итак,

$$\begin{cases} 3x+2y=12 & (1) \\ 4x+y=11 & (2) \end{cases}$$

1-Й ЭТАП: ВЫРАЖЕНИЕ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ЧЕРЕЗ ДРУГУЮ; ПОДСТАНОВКА; РЕШЕНИЕ ПОЛУЧЕННОГО УРАВНЕНИЯ.

Наиболее просто выразить одну переменную через другую можно из уравнения (2):

$$y=11-4x$$

Полученное значение y подставляем в уравнение (1):

$$3x+2(11-4x)=12$$

Теперь решаем обычное уравнение с одной переменной.

$$3x+2\cdot 11-2\cdot 4x=12$$

$$3x+22-8x=12$$

$$-5x+22=12$$

$$-5x=12-22=-10$$

$$5x=10$$

$$\frac{5x}{5}=\frac{10}{5}$$

$$x=2$$

2-Й ЭТАП: ПОДСТАВИТЬ НАЙДЕННОЕ НА 1-М ЭТАПЕ ЧИСЛО В ОДНО ИЗ ИСХОДНЫХ УРАВНЕНИЙ, РЕШИТЬ ПОЛУЧЕННОЕ УРАВНЕНИЕ.

Итак, подставляем $x=2$ в любое уравнение (удобнее – в более простое).
Цель этой операции – найти численное значение второй переменной (в данном случае y).

$4x + y = 11$

$4 \cdot 2 + y = 11$

$8 + y = 11$

$y = 11 - 8 = 3$

Итак, решением системы уравнений будут числа $x = 2$ и $y = 3$.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

Подставим найденные значения x и y в оба уравнения системы. В обоих уравнениях левые части должна быть равны правым. Если этого не происходит, то допущена ошибка – или на 1-м этапе, или в ходе самой проверки. И ее, естественно, нужно найти.

$3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 12$ - правильно

$4 \cdot 2 + 3 = 11$ - правильно

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

Полученное решение системы можно записать одним из общепринятых способов:

$\boxed{x = 2;\ \ y = 3}$

или

$\boxed{(2;\ 3)}$

ЗАДАНИЕ 4.4.2. РЕШИТЕ СИСТЕМУ УРАВНЕНИЙ

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y = 4} \\ \boldsymbol{2x + y = 2} \end{cases}$$

Это задание аналогично предыдущему. Пронумеруем уравнения:

$$\begin{cases} x + 2y = 4 & (1) \\ 2x + y = 2 & (2) \end{cases}$$

1-Й ЭТАП: ВЫРАЖЕНИЕ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ЧЕРЕЗ ДРУГУЮ; ПОДСТАНОВКА; РЕШЕНИЕ ПОЛУЧЕННОГО УРАВНЕНИЯ.

В этой системе одинаково удобно выражать либо x через y, либо y через x.

$x + 2y = 4 \quad (1)$

$x = 4 - 2y$

Полученное значение x подставляем в уравнение (2):

$2(4 - 2y) + y = 2$

$2 \cdot 4 - 2 \cdot 2y + y = 2$

$8 - 4y + y = 2$

$8 - 3y = 2$

$8 - 2 = 3y$

$6 = 3y$

$3y = 6$

$\frac{3y}{3} = \frac{6}{3}$

$y = 2$

2-Й ЭТАП: ПОДСТАВИТЬ НАЙДЕННОЕ НА 1-М ЭТАПЕ ЧИСЛО В ОДНО ИЗ ИСХОДНЫХ УРАВНЕНИЙ, РЕШИТЬ ПОЛУЧЕННОЕ УРАВНЕНИЕ.

В нашем примере значение $y = 2$ немного проще подставлять в уравнение (2).

$2x + y = 2$

$2x + 2 = 2$

$2x = 2 - 2 = 0$

$2x = 0$

$x = 0$

Итак, решением системы уравнений будут числа $x = 0$ и $y = 2$.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

$0 + 2 \cdot 2 = 4$ - правильно

$2 \cdot 0 + 2 = 2$ - правильно

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

Полученное решение системы можно записать одним из общепринятых способов:

$\boxed{x = 0;\ \ y = 2}$

или

$\boxed{(0;\ 2)}$

Следующая разновидность заданий «без графика» предлагает выбрать для систем уравнений правильные ответы из числа уже «выданных».

ЗАДАНИЕ 4.4.3. УСТАНОВИТЕ СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ СИСТЕМАМИ УРАВНЕНИЙ И МНОЖЕСТВОМ ИХ РЕШЕНИЙ.

А) $\begin{cases} -x + 3y + 1 = 0 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ 1) $x = -2;\ \ y = 0$

Б) $\begin{cases} -x - 3y + 4 = 0 \\ y - x = 2 \end{cases}$ 2) $x = 1;\ \ y = 0$

В) $\begin{cases} -x - 5y - 2 = 0 \\ y - x = 2 \end{cases}$ 3) $x = -0,5;\ \ y = 1,5$

Суть задания можно выразить более просто: требуется выяснить, какой именно из ответов 1) – 3) подходит для каждой из систем А, Б, В.

1-Й ЭТАП: ПОДСТАВИТЬ ОТВЕТЫ 1) – 3) В КАЖДУЮ ИЗ СИСТЕМ А) – В).

В результате этого системы и ответы обязательно «найдут друг друга».

Вариант ответа 1). $x = -2;\ \ y = 0$

Подставляем x и y в систему А):

$-(-2) + 3 \cdot 0 + 1 = 2 + 3 + 1 \neq 0$ - ответ 1) к системе А) уже не подходит.

Подставляем x и y в систему Б):

$-(-2) - 3 \cdot 0 + 4 = 2 - 3 + 4 \neq 0$ - ответ 1) к системе Б) уже не подходит.

Подставляем x и y в систему В):

$-(-2) - 5 \cdot 0 - 2 = 2 - 0 - 2 = 0$ – правильно;

$0 - (-2) = 2$ – правильно.

Итак, ответу 1) соответствует система В).

Вариант ответа 2). $x = 1;\ \ y = 0.$

Подставляем x и y в систему А):

$-1 + 3 \cdot 0 + 1 = 0$ – правильно;

$1 - 2 \cdot 0 = 1$ – правильно.

Ответу 2) соответствует система А).

Хотя и понятно, что ответ 3) должен соответствовать системе Б), убедимся в этом.

Вариант ответа 3). $x = -0{,}5;\ \ y = 1{,}5.$

Подставляем x и y в систему Б):

$-(-0{,}5) - 3 \cdot 1{,}5 + 4 = 0{,}5 - 4{,}5 + 4 = 0$ – правильно;

$1{,}5 - (-0{,}5) = 1{,}5 + 0{,}5 = 2$ – правильно.

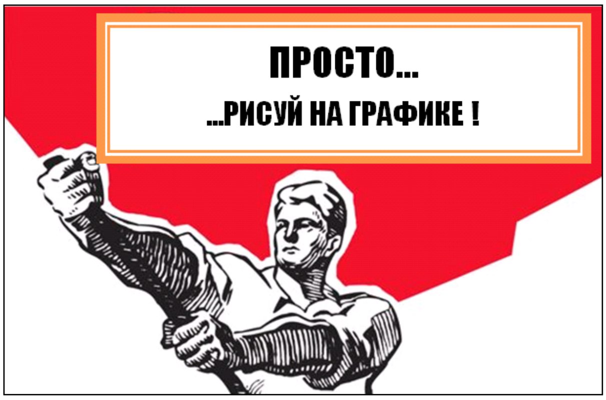
2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

Проверить сделанные вычисления или пересчитать все заново.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

А	Б	В
2	3	1

4.5. «СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ С ГРАФИКОМ»



ЗАДАНИ 4.5.1. НА РИСУНКЕ 4.5.1. ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ФУНКЦИИ. СООТНЕСИТЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ С КОЛИЧЕСТВОМ АБСЦИСС, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ЕМУ.

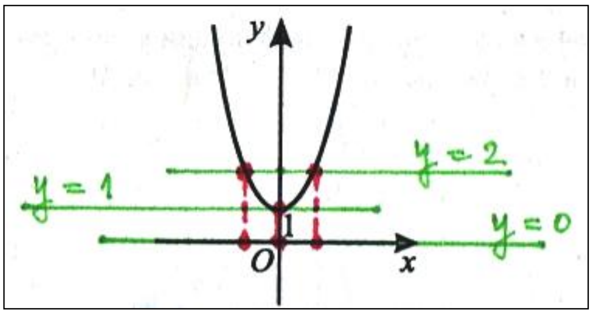


РИСУНОК 2.5.1

А) $y = 0$	1) ИМЕЕТ **2** АБСЦИССЫ
Б) $y = 1$	2) ИМЕЕТ **1** АБСЦИССУ
В) $y = 2$	3) НЕ ИМЕЕТ АБСЦИСС

Суть задания такова: нам дан график параболы и три функции А, Б, В, которые мы сами должны нарисовать на графике. Эти функции – горизонтальные прямые, пересекающие ось ОУ в точках 0; 1; 2. Требуется ответить, сколько точек пересечения с параболой у каждой из этих прямых.

1-Й ЭТАП: НАРИСОВАТЬ (ПРЕДСТАВИТЬ) НА ГРАФИКЕ НЕДОСТАЮЩИЕ ЛИНИИ ИЗ КАЖДОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ, СДЕЛАТЬ ВЫВОДЫ.

На рисунке видно:

- Прямая $y = 2$ (В) пересекает параболу в 2-х точках, имеющих разные значения абсцисс (то есть «иксов»).
- Прямая линия $y = 1$ (Б) пересекает параболу в 1-й точке, имеющей, естественно, только одно значение абсциссы.
- Прямая линия $y = 0$ (А) совпадает с осью ОХ и точек пересечения с параболой не имеет (а значит «не имеет абсцисс»).

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

А	Б	В
3	2	1

ЗАДАНИЕ 4.5.2. НА РИСУНКЕ 4.5.2 ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = -|x|$. ИСПОЛЬЗУЯ ЭТОТ РИСУНОК, ОПРЕДЕЛИТЕ, КАКАЯ ИЗ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ НЕ ИМЕЕТ РЕШЕНИЙ.

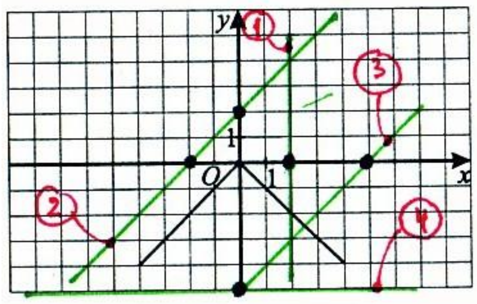


РИСУНОК 4.5.2

1) $\begin{cases} y = -|x| \\ x = 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = -|x| \\ y = x + 2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = -|x| \\ y = x - 5 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = -|x| \\ y = -5 \end{cases}$

И снова работа с графиком. На этот раз на нем изображена ломаная линия $y = -|x|$.

Во всех вариантах ответов 1) - 4) этой ломаной соответствуют первые уравнения. Вторые уравнения – это как раз те линии (все они – прямые), которые нам нужно дорисовать самим.

Одна из этих дорисованных линий по условию вообще не будет пересекать ломаную.
Ее мы и ищем.

1-Й ЭТАП: НАРИСОВАТЬ (ПРЕДСТАВИТЬ) НА ГРАФИКЕ НЕДОСТАЮЩИЕ ЛИНИИ ИЗ КАЖДОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ, СДЕЛАТЬ ВЫВОДЫ.

Итак, пойдем по порядку предложенных ответов.

Вариант ответа 1). $x = 2$

Вертикальная прямая $x = 2$ пересекает ломаную в 1-й точке.

Вариант ответа 2). $y = x + 2$

Построим эту прямую для каких-либо двух значений x (то есть по двум точкам).

x	0	-2
y	2	0

Мы получили прямую, параллельную «левому куску» ломаной. У них нет общих точек – это и есть ответ нашего задания. Но, все же, разберем и оставшиеся варианты ответов.

Вариант ответа 3). $y = x - 5$

x	5	0
y	0	-5

Эта прямая явно пересекает ломаную.

Вариант ответа 4). $y = -5$

Это – горизонтальная прямая, пересекающая ось ОУ в точке $y = -5$.
Очевидно, что она пересекает ломаную в 2-х точках.

Как мы и предполагали, ответом будет вариант 2).

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

2

Примечание к Заданиям 11.4 – 11.5:

- ✓ Если вы достаточно ориентируетесь в расположении графиков прямых по виду их формулы, то можете придти к правильному ответу и без построения прямых «по точкам». Здесь же предложен самый простой вариант – «для чайников», в соответствии с названием Пособия;
- ✓ Если для вас не очевидно, что линии $x = 2$, $y = x - 5$ и так далее, являются прямыми (и вы не хотите вникать в этот вопрос), то нужно все линии строить не по 2-м точка, а по 3-м, 4-м и более. Тогда вам станет понятно, как именно они выглядят на графике. Тем более что в некоторых заданиях дорисовывать приходится не прямые линии, а, например, параболы;
- ✓ Если же вы хотите распознавать прямую линию по формуле, то это сделать очень просто. Все прямые «вписываются» в шаблон $y = ax + b$, где a и b – какие-либо числа (в том числе, и нуль).
  Частными случаями могут быть горизонтальная или вертикальная прямые.
  Горизонтальные прямые описываются формулой $y = \text{число}$, вертикальные прямые – формулой $x = \text{число}$.
  Если $b = 0$, то прямая всегда проходит через начало координат $(0; 0)$.

Следующие несколько заданий также подразумевают работу с графиками функций.
Но теперь данная нам на графике линия является окружностью.

ЗАДАНИЕ 4.5.3. ОКРУЖНОСТЬ, ИЗОБРАЖЕННАЯ НА РИСУНКЕ 4.5.3 ЗАДАЕТСЯ УРАВНЕНИЕМ $(x-1)^2+y^2=16$. ИСПОЛЬЗУЯ ЭТОТ РИСУНОК, ОПРЕДЕЛИТЕ, КАКАЯ ИЗ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ НЕ ИМЕЕТ РЕШЕНИЙ.

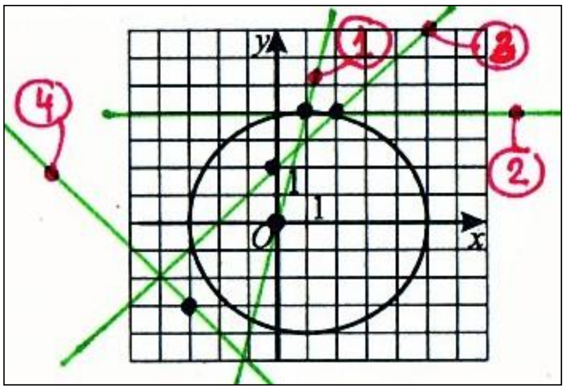


РИСУНОК 4.5.3

1) $\begin{cases}(x-1)^2+y^2=16\\ y=4x\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(x-1)^2+y^2=16\\ y=4\end{cases}$ 3) $\begin{cases}(x-1)^2+y^2=16\\ y=x+2\end{cases}$ 4) $\begin{cases}(x-1)^2+y^2=16\\ y=-x-6\end{cases}$

В этом задании нужно установить, какая из систем содержит две непересекающиеся линии (именно это и означают слова «не имеет решений»).

Итак, ситуация повторяется: в каждой системе 1-е уравнение относится к окружности,
2-е уравнение – к линии, которую нужно построить.

1-Й ЭТАП: НАРИСОВАТЬ (ПРЕДСТАВИТЬ) НА ГРАФИКЕ НЕДОСТАЮЩИЕ ЛИНИИ ИЗ КАЖДОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ, СДЕЛАТЬ ВЫВОДЫ.

Вариант ответа 1). $y=4x$

x	0	1
y	0	4

Прямая пересекает окружность в 2-х точках.

Вариант ответа 2). $y=4$

Эта горизонтальная прямая пересекает окружность в 1-й точке.

Вариант ответа 3). $y=x+2$

x	0	2
y	2	4

Прямая пересекает окружность в 2-х точках.

Вариант ответа 4). $y = -x - 6$

x	0	-3
y	-6	-3

Эта прямая вообще не пересекает окружность (система не имеет решений).

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

4

В отличие от 3-х предыдущих заданий, связанных с дорисовкой линий на графике, в следующем примере рисовать придется не прямые, а параболы. То, что это именно параболы, видно из формул вариантов ответов – все они являются выражениями вида $y = ax^2 + bx + c$ (причем здесь во всех формулах $b = 0$).

Как же построить эти графики?

- ✓ Если для построения графика параболы брать точки наугад, какие попало, то их может понадобиться слишком много, да это и неудобно.
- ✓ Можно строить графики более осмысленно – тогда для этого понадобится всего лишь 3 точки.
  Как правило, в подобных заданиях «хорошими» являются точки $x = 0$ и что-нибудь вроде $x = \pm 1$, $x = \pm 2$. Это связано с тем, что во всех параболах $y = ax^2 + c$ вершина как раз соответствует точке $x = 0$, а точек $x = \pm 1$ или $x = \pm 2$ достаточно для оценки примерного вида графика. Более понятно все это станет при рассмотрении примеров.
- ✓ И, наконец, третий вариант – еще более «продвинутый».
  Если вы хорошо понимаете, как выглядит парабола $y = x^2$, а также ориентируетесь в сдвигах графиков по вертикали $(y = x^2 \pm a)$ и направлении ветвей этой параболы $(y = \pm x^2)$, то никакие точки для построения графиков вам вообще не нужны.
  Понимая все это, легко представить положение параболы без всяких построений.
  Это – оптимальная ситуация: вы знаете немного больше, но это избавляет вас от нудной черновой работы.

ЗАДАНИЕ 4.5.4. ИЗ ДАННЫХ УРАВНЕНИЙ ПОДБЕРИТЕ ВТОРОЕ УРАВНЕНИЕ СИСТЕМЫ

$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ \dots\dots\dots \end{cases}$ **ТАК, ЧТОБЫ ОНА ИМЕЛА ДВА РЕШЕНИЯ.**

(ИСПОЛЬЗУЙТЕ ГРАФИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ: ОКРУЖНОСТЬ, ЗАДАННАЯ УРАВНЕНИЕМ $x^2+y^2=25$, ИЗОБРАЖЕНА НА РИСУНКЕ 4.5.4).

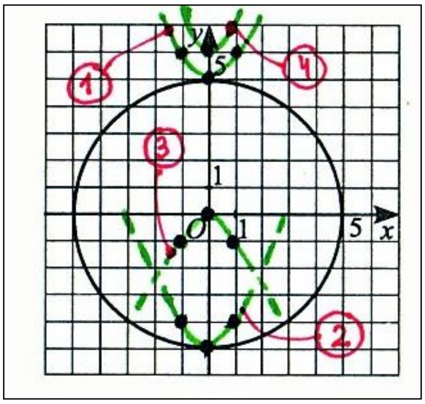


РИСУНОК 4.5.4

$$1)\ \ y=x^2+5 \quad 2)\ \ y=x^2-5 \quad 3)\ \ y=-x^2 \quad 4)\ \ y=x^2+6$$

1-Й ЭТАП: НАРИСОВАТЬ (ПРЕДСТАВИТЬ) НА ГРАФИКЕ НЕДОСТАЮЩИЕ ЛИНИИ ИЗ КАЖДОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ, СДЕЛАТЬ ВЫВОДЫ.

Вариант ответа 1). $y=x^2+5$

Найдем для параболы «хорошие точки»:

x	0	1	-1
y	5	6	6

Окружность и парабола имеют 1 общую точку. К такому же выводу можно придти, перенеся параболу $y=x^2$ на $+5$ единиц вверх.

Вариант ответа 2). $y=x^2-5$

Найдем для параболы «хорошие точки»:

x	0	1	-1
y	-5	-4	-4

Окружность и парабола имеют 3 общие точки. К такому же выводу можно придти, перенеся параболу $y = x^2$ на -5 единиц вниз.

Вариант ответа 3). $y = -x^2$

Найдем для параболы «хорошие точки»:

x	0	1	-1
y	0	-1	1

Окружность и парабола имеют 2 общие точки. К такому же выводу можно придти, перевернув параболу $y = x^2$ вервями вниз $(y = -x^2)$. Видимо, это и есть ответ задания, но смотрим и оставшийся вариант.

Вариант ответа 4). $y = x^2 + 6$

Найдем для параболы «хорошие точки»:

x	0	1	-1
y	6	7	7

У окружности и параболы нет общих точек. К такому же выводу можно придти, перенеся параболу $y = x^2$ на $+6$ единиц вверх. Таким образом, выбираем ответ 3).

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

3

И завершает Задания 4.5, как уже было сказано, опять задание, относящееся к группе 4.4 – «система уравнений без графиков».

ЗАДАНИЕ 4.5.5. ДЛЯ КАЖДОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ УКАЖИТЕ СООТВЕТСТВУЮЩЕЕ ЕЙ УТВЕРЖДЕНИЕ.

А) $\begin{cases} \frac{1}{x+1} - y = 0 \\ x = -1 \end{cases}$ 1) СИСТЕМА НЕ ИМЕЕТ РЕШЕНИЙ

Б) $\begin{cases} \frac{1}{x+1} - y = 0 \\ x = y \end{cases}$ 2) СИСТЕМА ИМЕЕТ 1 РЕШЕНИЕ

В) $\begin{cases} \frac{1}{x+1} - y = 0 \\ x = 5 \end{cases}$ 3) СИСТЕМА ИМЕЕТ 2 РЕШЕНИЯ

Это задание похоже на предыдущее, но в нем отсутствует график (группа Заданий 4.4).
Это намекает на то, что решать его нужно «как-то без рисования», то есть с помощью вычислений. Можно, конечно, нарисовать все линии по точкам, и решить задачу таким образом, но это явно будет худшим, более трудным вариантом (для тех, кто понимает: первое уравнение систем описывает гиперболу $y = \frac{1}{x}$, смещенную влево на 1 единицу – а ее еще надо суметь хорошо построить!).

Итак, будем «просто решать» эти системы, используя уже знакомый по Заданиям 4.1 метод подстановки, но перед этим первое уравнение систем запишем в более привычном и удобном виде: $y = \frac{1}{x+1}$.

1-Й ЭТАП: В КАЖДОЙ СИСТЕМЕ ПОДСТАВИМ ЗНАЧЕНИЯ x В ПЕРВОЕ УРАВНЕНИЕ И ОПРЕДЕЛИМ КОЛИЧЕСТВО КОРНЕЙ В НЕМ.

Система А): $\begin{cases} y = \frac{1}{x+1} & (1) \\ x = -1 & (2) \end{cases}$

Подставим $x = -1$ в уравнение (1):

$$y = \frac{1}{x+1} = \frac{1}{-1+1} = \frac{1}{0} = (?)$$

Мы получили в знаменателе 0 (вспомните правило «на нуль делить нельзя»), значит произошло нарушение математического правила и дальше решать уравнение нельзя.
Иными словами, мы не можем найти такое значение y, которое соответствовало бы значению $x = -1$. Это означает, что 1-е уравнение, а значит и система в целом, не имеют решения – вариант ответа 1).

Система Б): $\begin{cases} y = \frac{1}{x+1} & (1) \\ x = y & (2) \end{cases}$

Подставим $x = y$ в уравнение (1):

$$x = \frac{1}{x+1}$$

$$x - \frac{1}{x+1} = 0$$

$$\frac{x \cdot (x+1)}{x+1} - \frac{1}{x+1} = 0$$

$$\frac{x \cdot (x+1) - 1}{x+1} = 0$$

Дробь равна нулю, если ее числитель $= 0$ (обычно после этого заученно, на всякий случай, добавляют: «и знаменатель $\neq 0$», не зная, что же с этими добавленными словами нужно делать ☺. Это правильные слова, хотя в этом, и вообще во многих других заданиях ГИА они совершенно лишние, потому что ни к чему не обязывают в смысле дополнительных вычислений).

Итак, числитель дроби равен нулю:

$$x \cdot (x+1) - 1 = 0$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5 > 0$$

$D > 0$, значит уравнение имеет 2 корня: x_1 и x_2, которым будут соответствовать два значения y_1 и y_2.
Система Б), таким образом, имеет 2 решения: $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, но находить их конкретные значения не нужно. Это говорит в пользу варианта 3).

Система В): $\begin{cases} y = \frac{1}{x+1} & (1) \\ x = 5 & (2) \end{cases}$

Подставим $x = 5$ в уравнение (1):

$$y = \frac{1}{5+1} = \frac{1}{6}$$

Мы получаем одно решение этой системы: $x = 5$ и $y = \frac{1}{6}$, что приводит нас к ожидаемому ответу 2).

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

А	Б	В
1	3	2

Нужно признать: пожалуй, это самое «хлопотное» задание из всех пока встречавшихся.
Если же оно вам показалось «вполне так себе» или даже легким – это здорово!
Значит вы – настоящие монстры математики ☺!

5. НЕРАВЕНСТВА

Последняя глава в этом Пособии посвящена неравенствам.

Сначала рассмотрено решение неравенств, заданных только формулой.
Эти неравенства, в свою очередь, разделяются на линейные и квадратные (или квадратичные).

Затем будет рассматриваться решение неравенств с помощью данных в условии графиков функций.

Можно сказать, что в 1-м случае мы ответ вычисляем, а во 2-м случае – находим, глядя на график.

5.1. «РЕШИТЕ ЛИНЕЙНОЕ НЕРАВЕНСТВО»

Как обычно, разбор примеров начнем с самого простого – с линейных неравенств
(в которых x содержится в 1-й степени, то есть «просто x»).

ЗАДАНИЕ 5.1.1. РЕШИТЕ НЕРАВЕНСТВО $\mathbf{30+2(x-4)>3x+2}$

1-Й ЭТАП: РЕШИТЬ НЕРАВЕНСТВО, ОТОБРАЗИТЬ ШТРИХОВКОЙ ОТВЕТ НА ЧИСЛОВОЙ ОСИ.

$30+2(x-4)>3x+2$

$30+2\cdot x-2\cdot 4>3x+2$

$30+2x-8>3x+2$

$30-8-2>3x-2x$

Не обязательно переносить x влево.
В данном случае, перенесенный влево он был бы со знаком " $-$ ", что менее удобно.

$20>x$

$x<20$

Полученный ответ изобразим в виде интервала на числовой оси (рис. 13.1).

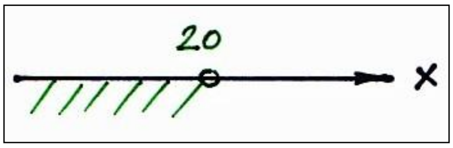


РИСУНОК 3.1.1

Делать рисунок именно в этом задании по условию не требуется. Однако это обязательно понадобится во многих последующих заданиях. Поэтому мы начинаем тренироваться заранее.

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

$x < 20$

или, в другой форме записи

$x \in (-\infty; 20)$

Примечание.

1) Если в неравенстве получен ответ вида $x > a$ или $x < a$ (то есть, само число a не включается в ответ), то на числовой оси a изображается в виде «пустого, выколотого» кружочка. Для таких чисел используются квадратные скобки "[" и "]".
2) Если в неравенстве получен ответ вида $x \geq a$ или $x \leq a$ (то есть, само число a включается в ответ), то на числовой оси a изображается в виде «закрашенного» кружочка. Для таких чисел используются круглые скобки "(" и ")".
3) Если интервал ответа уходит до конца вправо или до конца влево числовой оси, в так называемые «плюс бесконечность $+\infty$» или «минус бесконечность $-\infty$», а ответ оформляется в виде $x \in \cdots$, то эти бесконечности записываются только с круглыми скобками. То есть "$(-\infty;$" и "$;+\infty)$".

ЗАДАНИЕ 5.1.2. РЕШИТЕ НЕРАВЕНСТВО $\mathbf{0,2(2x-1,5)-3,5x \le 13-5x}$

1-Й ЭТАП: РЕШИТЬ НЕРАВЕНСТВО, ОТОБРАЗИТЬ ШТРИХОВКОЙ ОТВЕТ НА ЧИСЛОВОЙ ОСИ.

$0{,}2(2x-1{,}5)-3{,}5x \le 13-5x$

$0{,}2\cdot 2x-0{,}2\cdot 1{,}5-3{,}5x \le 13-5x$

$0{,}4x-0{,}3-3{,}5x \le 13-5x$

$-3{,}1x-0{,}3 \le 13-5x$

$-3{,}1x+5x \le 13+0{,}3$

$1{,}9x \le 13{,}3;\quad 19x \le 133;\quad x \le 7$

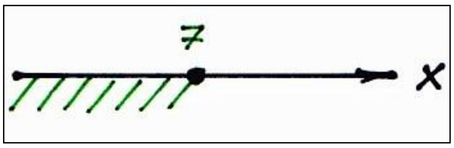


РИСУНОК 5.1.2

Полученный ответ изобразим в виде интервала на числовой оси (рис. 5.1.2).

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

$x \le 7$

или, в другой форме записи

$x \in (-\infty; 7]$

ЗАДАНИЕ 5.1.3. РЕШИТЕ НЕРАВЕНСТВО

$$\frac{1}{3}(2x-6)+\frac{x}{2}>\frac{1}{6}-x$$

Это задание, по сути, ничем не отличается от предыдущих, но в нем появляются «неудобные» для многих простые дроби (число сверху, число снизу, между ними горизонтальная черточка ☺).

1-Й ЭТАП: РЕШИТЬ НЕРАВЕНСТВО, ОТОБРАЗИТЬ ШТРИХОВКОЙ ОТВЕТ НА ЧИСЛОВОЙ ОСИ.

Такие, да и многие другие задания («упрощения», уравнения и так далее), как уже неоднократно говорилось, можно решать довольно разными путями.
В качестве примера, рассмотрим 2 варианта вывода ответа в этом неравенстве.

Способ 1.

$$\frac{1}{3}(2x-6)+\frac{x}{2}>\frac{1}{6}-x$$

$$\frac{2x-6}{3}+\frac{x}{2}>\frac{1}{6}-x$$

$$\frac{2x}{3}-\frac{6}{3}+\frac{x}{2}>\frac{1}{6}-x$$

Переносим «все иксы» влево, а числа вправо:

$$\frac{2x}{3}+\frac{x}{2}+x>\frac{1}{6}+\frac{6}{3}$$

Приводим все к общему знаменателю:

$$\frac{2x\cdot 2}{3\cdot 2}+\frac{x\cdot 3}{2\cdot 3}+\frac{6x}{6}>\frac{1}{6}+\frac{6\cdot 2}{3\cdot 2}$$

$$\frac{4x+3x+6x}{6}>\frac{1+12}{6}$$

$$\frac{13x}{6}>\frac{13}{6}$$

$$13x>13$$

$$x>1$$

Способ 2.

$$\frac{1}{3}(2x-6)+\frac{x}{2}>\frac{1}{6}-x$$

$$\frac{2x-6}{3}+\frac{x}{2}>\frac{1}{6}-\frac{x}{1}$$

$$\frac{(2x-6)\cdot 2}{3\cdot 2}+\frac{x\cdot 3}{2\cdot 3}>\frac{1}{6}-\frac{x\cdot 6}{1\cdot 6}$$

$$\frac{2(2x-6)}{6}+\frac{3x}{6}>\frac{1}{6}-\frac{6x}{6}$$

$$2(2x-6)+3x>1-6x$$

$$4x-12+3x>1-6x$$

$$4x+3x+6x>1+12$$

$$13x>13$$

$$x>1$$

В 1-м варианте мы сначала «рассортировали» x и числа в разные стороны, а затем стали обе части уравнения приводить к общему знаменателю. Во 2-м варианте поступили наоборот. Естественно, можно придумать еще какой-нибудь вариант преобразования или как-то скомбинировать два уже приведенных. Делайте так, как вам проще и удобнее!

Полученный ответ изобразим в виде интервала на числовой оси (рис. 5.1.3).

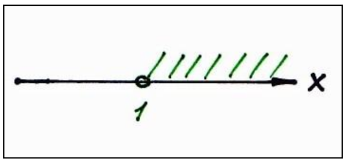


РИСУНОК 5.1.3

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

$x>1$

или, в другой форме записи

$x\in[1;+\infty)$

ЗАДАНИЕ 5.1.4. РЕШИТЕ НЕРАВЕНСТВО

$$\frac{x-4}{3}-\frac{x-3}{5}<2$$

Пример, аналогичный предыдущему, только в нем отсутствуют отдельно стоящие «неудобные» дроби – они уже «встроены» в знаменатели левой части уравнения. Если их «вытащить» обратно, то получится такая запись:

$$\frac{1}{3}(x-4)-\frac{1}{5}(x-3)<2$$

1-Й ЭТАП: РЕШИТЬ НЕРАВЕНСТВО, ОТОБРАЗИТЬ ШТРИХОВКОЙ ОТВЕТ НА ЧИСЛОВОЙ ОСИ.

$$\frac{x-4}{3}-\frac{x-3}{5}<2$$

$$\frac{(x-4)\cdot 5}{3\cdot 5}-\frac{(x-3)\cdot 3}{5\cdot 3}<\frac{2\cdot 15}{15}$$

$$\frac{5(x-4)-3(x-3)}{15}<\frac{30}{15}$$

$$5(x-4)-3(x-3)<30$$

$$5x-20-3x+9<30$$

$$2x-11<30$$

$$2x<41; \qquad x<20{,}5$$

Полученный ответ изобразим в виде интервала на числовой оси (рис. 5.1.4).

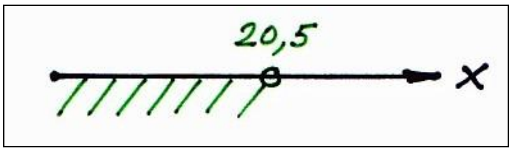


РИСУНОК 5.1.4

2-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

3-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

$$x<20{,}5$$

или, в другой форме записи

$$x\in(-\infty;20{,}5)$$

Примечание.

В неравенствах, где x находится со знаком $"-"$, есть особенность, связанная с обязательной сменой знака неравенства на противоположный при делении обеих частей неравенства на отрицательное число. Об этом нужно помнить!

Например:

$$-13x > 13$$

$$\frac{-13x}{-13} > \frac{13}{-13}$$

$$x < -1$$

Именно в этом состоит смысл «перегона» x вправо, чтобы там он оказался со знаком $"+"$.
В этом случае менять знак не придется!

А теперь, после линейных неравенств, перейдем к квадратным неравенствам, в которых кроме x появляется слагаемое, содержащее x^2.

5.2. «РЕШИТЕ КВАДРАТНОЕ НЕРАВЕНСТВО»

ЗАДАНИЕ 5.2.1. ПРИ КАКИХ ЗНАЧЕНИЯХ x ВЕРНО НЕРАВЕНСТВО $-2x^2+4x-2 \geq 0$?

В этом задании, по сути, опять предлагается всего лишь решить неравенство.

Решение квадратных неравенств на начальном этапе совпадает с решением квадратных уравнений. А именно: сначала нужно неравенство «сделать» уравнением и найти его корни.

На примере этого задания рассмотрим полную схему решения всех квадратных неравенств. Сначала их решение может показаться вам слишком сложным, но это ощущение пройдет после самостоятельного решения 3-4 неравенств.

1-Й ЭТАП: ПРИВЕСТИ ИСХОДНОЕ НЕРАВЕНСТВО К ВИДУ $ax^2+bx+c>0$ $(<,\ \geq,\ \leq)$.

Наше неравенство уже записано в нужном виде.

2-Й ЭТАП: «ПЕРЕДЕЛАТЬ» НЕРАВЕНСТВО В УРАВНЕНИЕ И НАЙТИ ЕГО КОРНИ.

$-2x^2+4x-2=0$

В этом уравнении коэффициент при x^2 отрицательный (-2).
Перед тем, как находить дискриминант, для удобства вычислений я обычно меняю в уравнении все знаки на противоположные (это называется умножить обе части уравнения на -1).
Хотя делать это не обязательно.

$2x^2-4x+2=0$

$D=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot 2\cdot 2=16-16=0$

$D=0$, значит уравнение имеет 1 корень.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\mathrm{D}}}{2a}=\frac{4}{4}=1$$

3-Й ЭТАП: НАНЕСТИ КОРНИ УРАВНЕНИЯ НА ЧИСЛОВУЮ ОСЬ И ЗАКРАСИТЬ ИХ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЗНАКА ИСХОДНОГО НЕРАВЕНСТВА $(<,\ >,\ \leq,\ \geq)$.

В нашем случае корень всего один, и он делит числовую ось на 2 интервала: слева от 1 и справа от 1.

4-Й ЭТАП: ОТМЕТИТЬ НА ВСЕХ ПОЛУЧЕННЫХ ИНТЕРВАЛАХ ЗНАКИ ФУНКЦИИ. ОТВЕТ ЗАДАНИЯ ПОКАЗАТЬ ШТРИХОВКОЙ.

Найти знак функции $(+\ \text{или}\ -)$ можно разными способами. Рассмотрим их.

Способ 1.

Его можно назвать способом «подстановки числа». Именно он наиболее знаком многим.
В нашем примере его использование выглядит так:

$y(x) = -2x^2 + 4x - 2$

$x = 2; \quad y(2) = -2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 2 = -8 + 8 - 2 < 0$

$x = -2; \quad y(-2) = -2 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) - 2 = -8 - 8 - 2 < 0$

Получается, что знак функции отрицателен на обоих интервалах, и только при $x = 1$ он равен нулю (рис. 5.2.1а).

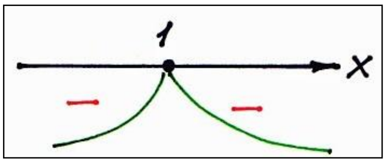


РИСУНОК 5.2.1а

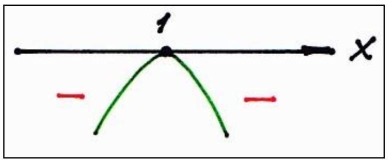


РИСУНОК 5.2.1б

На вопрос задания «При каких значениях x верно неравенство $-2x^2 + 4x - 2 \geq 0$?», мы выбираем ответ $x = 1$. Именно так – потому что функция $y(x)$ положительной никогда не бывает, а $y(x) = 0$ при $x = 1$.

Способ 2.

При решении именно квадратных неравенств его использовать гораздо проще, чем Способ 1. По крайней мере – мне. Суть его такова:

- ✓ На 1-м этапе мы нанесли единственный корень $x = 1$
  (корень – это точка пересечения параболой оси OX);
- ✓ Левая часть исходного неравенства $-2x^2 + 4x - 2$ - это парабола, ветви которой направлены вниз (отрицательный коэффициент при x^2);
- ✓ Наносим на ось OX примерный рисунок этой параболы (рис. 5.2.1б).
  По рисунку видим, что ветви параболы находятся «ниже горизонта» на интервалах $x < 1$ и $x > 1$ (и, значит, знак функции на них отрицательный).

Полученный рисунок 5.2.1б имеет тот же смысл, что и рисунок 5.2.1б.

5-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

6-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

$x = 1$

ЗАДАНИЕ 5.2.2. РЕШИТЕ НЕРАВЕНСТВО $4x^2 \geq 64$

Этот пример является своего рода заданием – провокацией. Как показывает практика, слишком многие учащиеся время от времени попадаются на эту «наживку».

Глядя на этот пример, обычно делают примерно так:

$4x^2 \geq 64$

$x^2 \geq 16$

$x \geq 4$

Или что-то похожее…
И, как вы уже догадались – это неправильно! А теперь посмотрим на правильные действия. Решим исходное неравенство по схеме, предложенной в Задании 5.2.1.

1-Й ЭТАП: ПРИВЕСТИ ИСХОДНОЕ НЕРАВЕНСТВО К ВИДУ $ax^2 + bx + c > 0$ ($<$, $\geq$, $\leq$).

$4x^2 - 64 \geq 0 \quad (*)$

2-Й ЭТАП: «ПЕРЕДЕЛАТЬ» НЕРАВЕНСТВО В УРАВНЕНИЕ И НАЙТИ ЕГО КОРНИ.

$4x^2 - 64 = 0$

Это уравнение является неполным квадратным. Как уже говорилось ранее, такие уравнения решаются «без дискриминанта», причем сделать это можно двумя способами (см. Задание 4.2.3). Воспользуемся одним из них:

$4x^2 - 64 = 0$

$4(x^2 - 16) = 0$

$4(x^2 - 4^2) = 0$

$4(x - 2)(x + 2) = 0$

$x_1 = -2; \quad x_2 = 2$

3-Й ЭТАП: НАНЕСТИ КОРНИ УРАВНЕНИЯ НА ЧИСЛОВУЮ ОСЬ И ЗАКРАСИТЬ ИХ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЗНАКА ИСХОДНОГО НЕРАВЕНСТВА ($<$, $>$, $\leq$, $\geq$).

Нанесем оба корня на числовую ось (рис. 5.2.2).

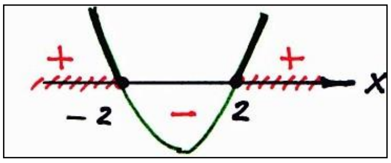


РИСУНОК 5.2.2

4-Й ЭТАП: ОТМЕТИТЬ НА ВСЕХ ПОЛУЧЕННЫХ ИНТЕРВАЛАХ ЗНАКИ ФУНКЦИИ. ОТВЕТ ЗАДАНИЯ ПОКАЗАТЬ ШТРИХОВКОЙ.

- ✓ Левая часть неравенства $(*)$ - это парабола, ветви которой направлены вверх (положительный коэффициент при x^2), она проходит через корни ± 2;
- ✓ Наносим на ось OX примерный рисунок этой параболы. По рисунку видим, что ветви параболы «выше либо равны горизонту» на интервалах $x \leq -2$ и $x \geq 2$.

5-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

6-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

$x \leq -2; \;\; x \geq 2$

или в другой форме записи

$x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$

И еще одна такая же задача «до кучи», – для закрепления навыков.

ЗАДАНИЕ 5.2.3. РЕШИТЕ НЕРАВЕНСТВО $3x^2 < 27$

1-Й ЭТАП: ПРИВЕСТИ ИСХОДНОЕ НЕРАВЕНСТВО К ВИДУ $ax^2 + bx + c > 0$ ($<$, $\geq$, $\leq$).

$3x^2 - 27 < 0 \quad (*)$

2-Й ЭТАП: «ПЕРЕДЕЛАТЬ» НЕРАВЕНСТВО В УРАВНЕНИЕ И НАЙТИ ЕГО КОРНИ.

$3x^2 - 27 = 0$

Найдем корни уравнения на этот раз другим способом (но тогда преобразование 2-го этапа будет лишним):

$3x^2 = 27$

$x^2 = 9; \qquad x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

$x_1 = -3; \quad x_2 = 3$

3-Й ЭТАП: НАНЕСТИ КОРНИ УРАВНЕНИЯ НА ЧИСЛОВУЮ ОСЬ И ЗАКРАСИТЬ ИХ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЗНАКА ИСХОДНОГО НЕРАВЕНСТВА ($<$, $>$, $\leq$, $\geq$).

Нанесем оба корня на числовую ось (рис. 5.2.3).

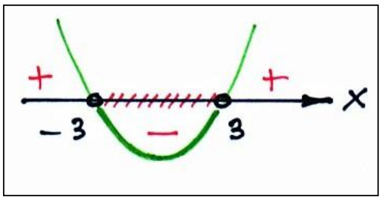


РИСУНОК 5.2.3

4-Й ЭТАП: ОТМЕТИТЬ НА ВСЕХ ПОЛУЧЕННЫХ ИНТЕРВАЛАХ ЗНАКИ ФУНКЦИИ. ОТВЕТ ЗАДАНИЯ ПОКАЗАТЬ ШТРИХОВКОЙ.

- ✓ Левая часть неравенства $(*)$ - это парабола, ветви которой направлены вверх (положительный коэффициент при x^2), она проходит через корни ± 2;
- ✓ Наносим на ось ОХ примерный рисунок этой параболы. По рисунку видим, что ветви параболы ниже «горизонта» на интервале $-3 < x < 3$.

5-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

6-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

$\boxed{-3 < x < 3}$

или в другой форме записи

$\boxed{x \in (-3; 3)}$

Вот и все!

Как можно легко увидеть – решение всех неравенств «вырастает» из решения подобных им уравнений. Если вы хорошо решаете уравнения, то большая часть работы с неравенствами вам знакома. Если же с уравнениями есть еще трудности – вернитесь к соответствующим заданиям.

Оставшиеся пункты (5.3 и 5.4), как и многие другие, «нарезаны» достаточно условно.

Они включают две группы заданий, связанных с неравенствами:

1) «Графические неравенства», то есть неравенства, которые нужно решить, используя «выданный» в условии график;
2) Задания, требующие «сортировки» предложенных формул неравенств на верные и неверные (точнее говоря, требующие найти неверные, то есть «неправильные» неравенства).

5.3. «РЕШИТЕ НЕРАВЕНСТВО С ПОМОЩЬЮ ГРАФИКА»

ЗАДАНИЕ 5.3.1. **НА РИСУНКЕ 5.3.1 ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = (x-1)^2 - 4$. ИСПОЛЬЗУЯ ГРАФИК, РЕШИТЕ НЕРАВЕНСТВО $(x-1)^2 - 4 \leq 0$.**

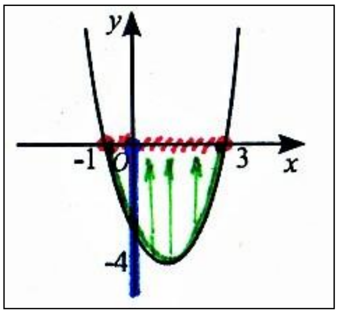


РИСУНОК 5.3.1

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ЗАДАННОГО ВОПРОСА.

Обратимся к координатным осям: значениям $y \leq 0$ соответствует нижняя вертикальная полуось, включая точку $(0;\ 0)$. На рисунке она выделена синим цветом.
Иными словами, в зоне значений $y \leq 0$ находится все, расположенное «на горизонте» и ниже его («горизонтом» здесь называется горизонтальная ось OX).

2-Й ЭТАП: РАБОТА С ГРАФИКОМ.

Выделим зеленым цветом часть графика, лежащую в этой зоне. На рисунке видно, что ей соответствует интервал $-1 \leq x \leq 3$ (отмечен красной штриховкой). Это и будет ответом задания.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

$-1 \leq x \leq 3$

или, в другой форме записи

$x \in [-1; 3]$

ЗАДАНИЕ 5.3.2. НА РИСУНКЕ 5.3.2 ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = -x^2 + 5x$. ИСПОЛЬЗУЯ ГРАФИК, РЕШИТЕ НЕРАВЕНСТВО $x^2 \le 5x$.

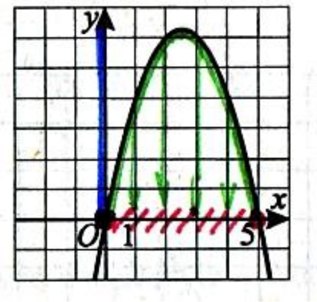


РИСУНОК 5.3.2

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ЗАДАННОГО ВОПРОСА.

Здесь нам дано уравнение $y = -x^2 + 5x$, а вопрос задан по неравенству $x^2 \le 5x$ (в предыдущем задании такого отличия не было). Перед тем, как перейти к анализу графика, вид неравенства нужно «переделать». А именно: перенести x^2 в правую часть неравенства:

$0 \le 5x - x^2$

$5x - x^2 \ge 0$

$-x^2 + 5x \ge 0$

Левая часть неравенства теперь в точности соответствует исходной функции $y = -x^2 + 5x$.

Итак, вопрос задания теперь более понятен: «при каких значениях x функция $y = -x^2 + 5x$ больше или равна функции $y = 0$ (то есть находится на горизонте или выше его)?».

2-Й ЭТАП: РАБОТА С ГРАФИКОМ.

На графике нужно сделать следующее:

- ✓ На оси ОУ выделим зону $y \ge 0$;
- ✓ Выделим участок графика, лежащего в этой зоне;
- ✓ Обозначим штриховкой значения x, соответствующие этому участку: $0 \le x \le 5$. Это и есть ответ задания.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

$\boxed{0 \le x \le 5}$

или, в другой форме записи

$\boxed{x \in [0; 5]}$

ЗАДАНИЕ 5.3.3. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = -x^2 + 4x - 3$. ИСПОЛЬЗУЯ ГРАФИК, РЕШИТЕ НЕРАВЕНСТВО $x^2 < 4x - 3$.

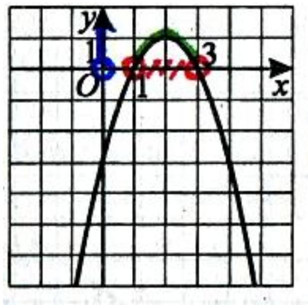


РИСУНОК 5.3.3

Это задание аналогично предыдущему. Теперь, когда смысл совершаемых действий уже подробно объяснен, решим задание по более компактной и четкой схеме.

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ЗАДАННОГО ВОПРОСА.

Приведем вид неравенства «из вопроса задания» к виду исходной функции:

$x^2 < 4x - 3$

$0 < 4x - 3 - x^2$

$0 < -x^2 + 4x - 3$

$-x^2 + 4x - 3 > 0$

Первоначальный вопрос задания теперь звучит так: «при каких значениях x функция $y = -x^2 + 4x - 3$ находится выше горизонта?».

2-Й ЭТАП: РАБОТА С ГРАФИКОМ.

Повторяем на графике уже знакомые операции:

- ✓ На оси ОУ выделим зону $y > 0$;
- ✓ Выделим участок графика, лежащего в этой зоне;
- ✓ Обозначим штриховкой значения x, соответствующие этому участку: $1 < x < 3$. Это и есть ответ задания.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

$1 < x < 3$

или, в другой форме записи

$x \in (1; 3)$

А теперь немного усложним задачу.

ЗАДАНИЕ 5.3.4. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = -x^2 + 6x - 6$. ИСПОЛЬЗУЯ ГРАФИК, РЕШИТЕ НЕРАВЕНСТВО $-x^2 + 6x - 6 \geq -x + 4$.

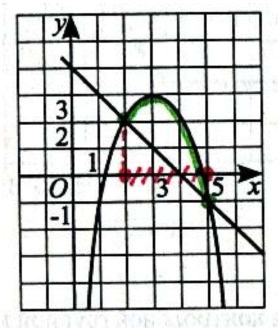


РИСУНОК 5.3.4

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ЗАДАННОГО ВОПРОСА.

В этом задании в правой части неравенства, которое нужно решить, находится не 0, а функция $-x + 4$. Если бы, как в предыдущих заданиях, справа был 0, то мы бы на графике опять искали участок, где функция $y = -x^2 + 6x - 6$ (парабола) находится выше прямой $y = 0$ или пересекает ее.

Теперь же вопрос нужно понимать по-другому: «при каких значениях x парабола $y = -x^2 + 4x - 3$ находится выше прямой $y = -x + 4$ или пересекается с ней?».

2-Й ЭТАП: РАБОТА С ГРАФИКОМ.

Ответ на этот вопрос найдем на графике:

- ✓ Выделим точки пересечения линий, где функции равны;
- ✓ Выделим участок параболы, который находится выше прямой;
- ✓ Обозначим штриховкой ответ задания: $2 \leq x \leq 5$.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

$2 \leq x \leq 5$

или, в другой форме записи

$x \in [2; 5]$

И опять немного усложним задачу, чтобы не заскучать ☺.

ЗАДАНИЕ 5.3.5. НА РИСУНКЕ ИЗОБРАЖЕН ГРАФИК ФУНКЦИЙ

$$y = x^2 - 2x - 2 \quad \text{И} \quad y = \frac{4}{x+1}.$$

ИСПОЛЬЗУЯ ГРАФИК, РЕШИТЕ НЕРАВЕНСТВО $x^2 - 2x - 2 \geq \frac{4}{x+1}$.

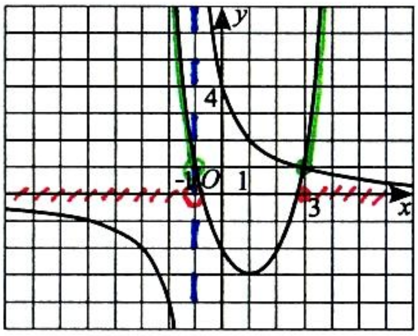


РИСУНОК 5.3.5

1-Й ЭТАП: АНАЛИЗ ЗАДАННОГО ВОПРОСА.

В этом примере на графике даны уже две функции: уже знакомая парабола $(y = x^2 - 2x - 2)$ и гипербола $\left(y = \frac{4}{x+1}\right)$.

Если вы не знаете, что она называется гиперболой – это не страшно. Это не имеет значения. Можете для себя назвать ее «другая линия» или «ваще нипанятная линия» или как-нибудь еще ☺. Вопрос задания теперь нужно понимать так: «при каких значениях x парабола $y = x^2 - 2x - 2$ находится выше «другой линии» $y = \frac{4}{x+1}$ или пересекается с ней?».

2-Й ЭТАП: РАБОТА С ГРАФИКОМ.

Ответ на этот вопрос найдем на графике:

- ✓ Выделим точку пересечения линий, где функции равны;

Эта точка одна, второй точки пересечения нет: при рассмотрении графика гиперболы видно, что ее верхняя и нижняя части приближаются, но не пересекают вертикальную прямую $x = -1$ (таким образом, верхняя часть гиперболы не уйдет левее вертикали $x = -1$). Левая же верхняя часть параболы по мере уменьшения x будет все дальше отклоняться влево от вертикали.

- ✓ Выделим участки параболы, которые находится выше гиперболы;
- ✓ Обозначим штриховкой ответ задания: $x < -1$ и $x \geq 3$.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

$x < -1;\ x \geq 3$

или, в другой форме записи

$x \in (-\infty; -1) \cup [3; +\infty)$

Вот, собственно, и все, что нужно знать по этой группе заданий.

А теперь займемся заданиями по «сортировке» неравенств.

5.4. «НЕРАВЕНСТВА: НАЙДИТЕ НЕВЕРНОЕ»

Из нескольких предложенных неравенств требуется найти неверное (то есть «неправильное», не выполняющееся при некоторых конкретных значениях входящих в ее переменных).

Решать задания этой группы можно, используя довольно простой подход. Его суть состоит в серии последовательных преобразований неравенства, основанных на определенных Правилах.

А именно: если обе части неравенства положительны (например, $a > b$, где $a = 10$, $b = 9$), то тогда по этим Правилам можно выполнять следующие действия:

1) Прибавлять (или вычитать) к обеим частям любые числа.

Например: если $10 > 9$, то $10 + 2 > 9 + 2$; $10 - 99 > 9 - 99$ и так далее.
В общем виде это правило можно записать так: если $a > b$, то $a \pm k > b \pm k$.

2) Умножать (или делить) их на любые положительные числа.

Например: если $10 > 9$, то $10 \cdot 5 > 9 \cdot 5$; $10 \cdot 0{,}22 > 9 \cdot 0{,}22$; $\frac{10}{4} > \frac{9}{4}$ и так далее.
В общем виде это правило можно записать так: если $a > b$, то $a \cdot k > b \cdot k$ или $\frac{a}{k} > \frac{b}{k}$.

3) Умножать (или делить) их на любые отрицательные числа, меняя при этом знак (!) неравенства.

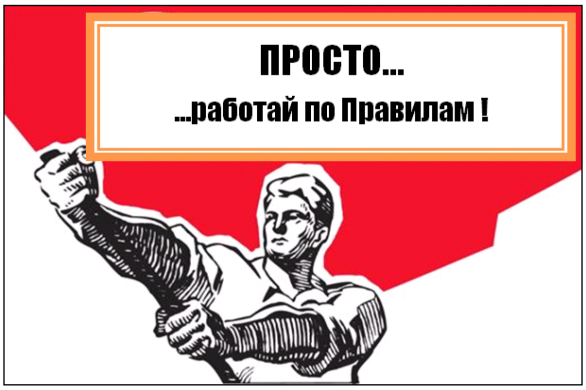
Например: если $10 > 9$, то $10 \cdot (-3) < 9 \cdot (-3)$; $-\frac{10}{4} < -\frac{9}{4}$; $\frac{10}{-2} < \frac{9}{-2}$ и так далее.
В общем виде это правило можно записать так: если $a > b$, то $a \cdot k < b \cdot k$ или $\frac{a}{k} < \frac{b}{k}$.

Далее: все рассмотренные ниже задания по «сортировке» неравенств, в свою очередь, тоже делятся на 2 подгруппы:

a) Задания, в которых знак входящих в него «буковок» $(> 0;\ < 0)$ дан в условии;
b) Задания, в которых знак входящих в него «буковок» в условии не дан.

В их решении, как будет видно далее, могут быть определенные отличия.

Итак, перейдем к примерам, разобрав для начала один пример подгруппы a).



ЗАДАНИЕ 5.4.1. О ЧИСЛАХ a И b ИЗВЕСТНО, ЧТО $a > 0$, $b > 0$, $a > 4b$. КАКОЕ ИЗ СЛЕДУЮЩИХ НЕРАВЕНСТВ НЕВЕРНО?

$$1)\ \frac{a}{4} > b - 2 \qquad 2)\ 2a > 8b \qquad 3)\ a - 2a > -3b \qquad 4)\ a + 3 > b + 1$$

1-Й ЭТАП: СДЕЛАТЬ «ПОЛЕЗНЫЙ» РИСУНОК (ПО ВОЗМОЖНОСТИ).

В нашем случае он может получиться, например, таким (рис. 5.4.1).

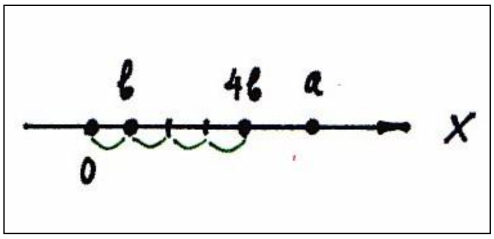


РИСУНОК 5.4.1

2-Й ЭТАП: АНАЛИЗ КАЖДОГО ВАРИАНТА ОТВЕТА; ПОПЫТКА «ПОДОГНАТЬ» ЕГО ПОД ИСХОДНОЕ НЕРАВЕНСТВО (ЛИБО ОБРАЗОВАННОЕ ИЗ НЕГО).

Вариант ответа 1). $\frac{a}{4} > b - 2$

$\frac{a}{4} > b - 2$

$a > 4(b - 2)$ (Правило 2: умножение обеих частей на +4)

$a > 4b - 8$

Если $a > 4b$, то a явно больше, чем $4b - 8$. Неравенство верное.

Вариант ответа 2). $2a > 8b$

$2a > 8b$

$a > 4b$ (Правило 2: деление обеих частей на +2)

Мы в точности получили исходное неравенство.

Вариант ответа 3). $a - 2a > -3b$

$a - 2a > -3b$

$-a > -3b$

$a < 3b$ (Правило 3: умножение обеих частей на -1)

А это неравенство неверное: если $a > 4b$, то не может быть $a < 3b$ (см. рис. 5.4.1).

Вариант ответа 4). $a + 3 > b + 1$

$a + 3 > b + 1$

$a > b + 1 - 3$ (Правило 1: вычитание из обеих частей числа 3)

$a > b - 2$

Неравенство верное (см. рис. 5.4.1).

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

3

Внимание!
Поскольку знаки a и b известны заранее, задание можно решить и гораздо проще, подставив вместо них какие-нибудь положительные числа, связанные условием $a > 4b$.
Например, $b = 1$ и $a = 8$. Тогда перебор вариантов дает следующее.

Вариант ответа 1). $\frac{a}{4} > b - 2$

$\frac{8}{4} > 1 - 2$
$2 > -1$

Вариант ответа 2). $2a > 8b$

$2 \cdot 8 > 8 \cdot 1$

$16 > 8$

Вариант ответа 3). $a - 2a > -3b$

$8 - 16 > -3 \cdot 1$

$-8 > -3$

Вариант ответа 4). $a + 3 > b + 1$

$8 + 3 > 1 + 1$

$11 > 2$

Естественно, что мы приходим к тому же ответу 3).
Но, повторю: подстановку чисел можно выполнять только в том случае, если знаки всех «буковок» даны в условии!

Теперь перейдем к подгруппе заданий b), в которой знак «буковок» в условии не дан, а поэтому он может быть как $+$, так и $-$.
В этом случае фокус с подстановкой чисел не проходит, и нужно работать только по перечисленным выше Правилам. Что, конечно, сложнее ☹.

ЗАДАНИЕ 5.4.2. О ЧИСЛАХ c И d ИЗВЕСТНО, ЧТО $c < d$.
КАКОЕ ИЗ СЛЕДУЮЩИХ НЕРАВЕНСТВ НЕВЕРНО?

$$1)\ 5c < 5d + 10 \qquad 2)\ -3c < -3d \qquad 3)\ \frac{d}{7} > \frac{c}{7} \qquad 4)\ c - 8 < d - 8$$

Запишем исходное неравенство $c < d$ еще и в виде $c - d < 0$ (перенос d в левую часть). Возможно, такая запись тоже пригодится.

1-Й ЭТАП: СДЕЛАТЬ «ПОЛЕЗНЫЙ» РИСУНОК (ПО ВОЗМОЖНОСТИ).

В этом случае он может получиться, например, таким примитивным (рис. 5.4.2).
Но даже это – лучше, чем совсем ничего.

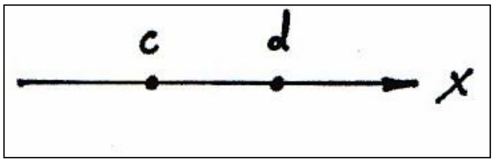


РИСУНОК 5.4.2

2-Й ЭТАП: АНАЛИЗ КАЖДОГО ВАРИАНТА ОТВЕТА; ПОПЫТКА «ПОДОГНАТЬ» ЕГО ПОД ИСХОДНОЕ НЕРАВЕНСТВО (ЛИБО ОБРАЗОВАННОЕ ИЗ НЕГО).

Вариант ответа 1). $5c < 5d + 10$

$5c - 5d < 10$

$5(c - d) < 10$

$c - d < 2$ (Правило 2: деление обеих частей на +5)

По условию $c - d < 0$. Конечно же, $c - d < 2$ – верное неравенство.

Вариант ответа 2). $-3c < -3d$

$-3c < -3d$

$3c > 3d$ (Правило 3: умножение обеих частей на -1)

$c > d$ (Правило 2: деление обеих частей на +3)

Это неравенство неверное, так как противоречит условию. Видимо, 2) и будет ответом задания.

Вариант ответа 3). $\frac{d}{7} > \frac{c}{7}$

$$\frac{d}{7} > \frac{c}{7}$$

$d > c$ (Правило 2: умножение обеих частей на +7)

Это неравенство в точности соответствует исходному.

Вариант ответа 4). $c - 8 < d - 8$

$c - 8 < d - 8$

$c < d$ (Правило 1: прибавление к обеим частям числа 8)

Это неравенство верное.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

2

ЗАДАНИЕ 5.4.3. О ЧИСЛАХ m И n ИЗВЕСТНО, ЧТО $m < n$. КАКОЕ ИЗ СЛЕДУЮЩИХ НЕРАВЕНСТВ НЕВЕРНО?

$$1)\ 2m < n + m \qquad 2)\ \frac{m}{10} < \frac{n}{10} \qquad 3)\ 5 - m < 5 - n \qquad 4)\ m + 6 < 2n + 7$$

Запишем исходное неравенство $m < n$ еще и в таком виде: $m - n < 0$.

1-Й ЭТАП: СДЕЛАТЬ «ПОЛЕЗНЫЙ» РИСУНОК (ПО ВОЗМОЖНОСТИ).

И опять делаем какой-нибудь простой рисунок (рис. 5.4.3).

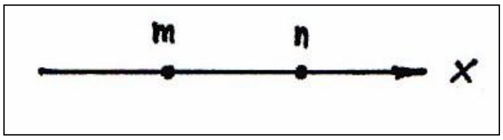


РИСУНОК 5.4.3

2-Й ЭТАП: АНАЛИЗ КАЖДОГО ВАРИАНТА ОТВЕТА; ПОПЫТКА «ПОДОГНАТЬ» ЕГО ПОД ИСХОДНОЕ НЕРАВЕНСТВО (ЛИБО ОБРАЗОВАННОЕ ИЗ НЕГО).

Вариант ответа 1). $2m < n + m$

$2m < n + m$

$2m - m < n + m - m$ (Правило 1: вычитание m)

$m < n$ – верное неравенство.

Вариант ответа 2). $\frac{m}{10} < \frac{n}{10}$

$$\frac{m}{10} < \frac{n}{10}$$

$m < n$ (Правило 2: умножение на +10)

Это верное неравенство.

Вариант ответа 3). $5 - m < 5 - n$

$5 - m < 5 - n$ (Правило 1: вычитание числа 5)

$-m < -n$

$m > n$ (Правило 3: умножение обеих частей на -1)

Это неравенство противоречит исходному. Именно оно – кандидат в ответы.

Вариант ответа 4). $m + 6 < 2n + 7$

$m + 6 < 2n + 7$

$m < 2n + 1$

Это неравенство как-то неудобно дальше преобразовывать по Правилам, но это и не нужно. Видно, что правая часть исходного неравенства, будучи большей по условию, была еще больше увеличена:

$m < n \color{red}{+ n + 1}$

Это неравенство верное.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

3

И еще один, последний пример, завершающий Задания 5.4.

ЗАДАНИЕ 5.4.4. О ЧИСЛАХ p И q ИЗВЕСТНО, ЧТО $p+q>1$. КАКОЕ ИЗ СЛЕДУЮЩИХ НЕРАВЕНСТВ НЕВЕРНО?

1) $3q>1-3p$ 2) $5p-1<4-5q$ 3) $3-p<2+q$ 4) $-2p-2q<-2$

Вид исходного неравенства в этом примере «какой-то другой», отличающийся от всех предыдущих. Оставим его пока без изменений, так как не ясно, нужно ли его преобразовывать.

1-Й ЭТАП: СДЕЛАТЬ «ПОЛЕЗНЫЙ» РИСУНОК (ПО ВОЗМОЖНОСТИ).

Допустим, рисунок будет таким (рис. 5.4.4).

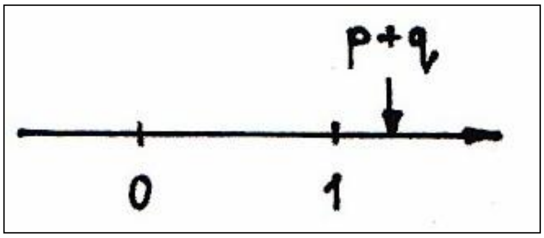


РИСУНОК 5.4.4

2-Й ЭТАП: АНАЛИЗ КАЖДОГО ВАРИАНТА ОТВЕТА; ПОПЫТКА «ПОДОГНАТЬ» ЕГО ПОД ИСХОДНОЕ НЕРАВЕНСТВО (ЛИБО ОБРАЗОВАННОЕ ИЗ НЕГО).

Вариант ответа 1). $3q>1-3p$

$3q>1-3p$

$3q+3p>1$

$3(p+q)>1$

$p+q>\frac{1}{3}$

По условию $p+q>1$, значит неравенство $p+q>\frac{1}{3}$ верное (см. рис. 5.4.4).

Вариант ответа 2). $5p-1<4-5q$

$5p-1<4-5q$

$5p+5q<4+1$

$5(p+q)<5$

$p+q<1$

Это не так – потому, что противоречит условию.

Вариант ответа 3). $3 - p < 2 + q$

$3 - p < 2 + q$

$3 < 2 + q + p$

$3 - 2 < p + q$

$p + q > 1$

Это неравенство в точности повторяет исходное.

Вариант ответа 4). $-2p - 2q < -2$

$-2p - 2q < -2$

$-2(p + q) < -2$

$2(p + q) > 2$

$p + q > 1$

Неравенство в точности повторяет исходное.

3-Й ЭТАП: ПРОВЕРИТЬ ПОЛУЧЕННЫЙ РЕЗУЛЬТАТ.

4-Й ЭТАП: ВНИМАТЕЛЬНО (!) ЗАПИСАТЬ ОТВЕТ.

2

Ну что сказать?...
Если просто просматривать задания этой главы по-быстрому, то остается впечатление чего-то «математически тошнотворного» и тяжелого. Особенно от последних примеров.

Возможно, что это первичное ощущение как-то изменится при медленном одновременном прописывании и обдумывании того, что вы видите перед собой? Мне, например, такое иногда помогает…

Но просто глядеть на задания этой главы, ничего больше не делая, мне кажется практически бесполезным.

Итак, совет: «Просто … уделите им время!».

ЛЕГКОЙ ВАМ ПОДГОТОВКИ К ГИА-2012!
НАСКОЛЬКО ЭТО ВООБЩЕ ВОЗМОЖНО ☺…