Агентство образования администрации Красноярского края

Красноярский государственный университет

Заочная естественно-научная школа при КрасГУ

МАТЕМАТИКА

Сечения многогранников

Модуль № 5 для 11 класса

Учебно-методическая часть

Красноярск 2006

Математика: Модуль №5 для 11 класса. Учебно-методическая часть./ Сост.: Е.К.Лейнартас, д-р физ.-мат. наук, доцент кафедры теории функций, КрасГУ. – Красноярск, 2006 — 25 с.

ISBN 5-7638-0705-7

Печатается по решению Дирекции

Краевого государственного учреждения дополнительного образования

Заочная естественно-научная школа

при Красноярском государственном университете

ISBN 5-7638-0705-7

© Красноярский государственный университет, 2006

Программа модуля

1. Прямые и плоскости в пространстве.
2. Угол и расстояние между скрещивающимися прямыми.
3. Многогранники различного вида.
4. Способы построения сечений многогранников.

Примеры построения сечений.

Сечения многогранников используются; при решении, многих задач стереометрии. При этом стоит отметить, что, говоря о построениях в пространстве, обычно имеют в виду не столько реальные построения, сколько утверждении о существовании объектов. Например, фраза "проведем плоскость через течки *A, B, C*" означает "фиксируем, что существует плоскость, проходящая через точки *A, B, C*". Аналогичный смысл имеет "проведение" прямых в пространстве.

При таком подходе построение фигуры в пространстве (сечения, в частности) фактически означает доказательство ее существования, основанное на аксиомах.

Рассмотрим некоторые примеры построения сечений многогранников, основанные на следующих следствиях аксиом стереометрии:

1.*Если две плоскости имеют две общие точки, то прямая, проведенная через эти точки, является прямой пересечения данных плоскостей.* (Примеры 1 – 3).

2.*Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то прямые пересечения параллельны.* (Примеры 4 - 6)

3.Для построения сечений, перпендикулярных прямой или плоскости, используются *теоремы о перпендикулярности прямых и плоскостей.* (Примеры 7-8).

Пример 1. Через ребро *AB* и точку *M* ребра *CD* тетраэдра *ABCD* провести сечение (рис. 1а).

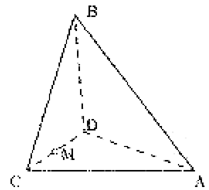


Рис. 1а

Решение. Через точку *M* и прямую *AB всегда можно провести плоскость* (обозначим ее *a) и притом только одну.* Наша задача состоит в том, чтобы указать, как эта плоскость пересекается с элементами тетраэдра *ABCD* (с гранями и ребрами).

Так как точки *M* и *A* являются общими для плоскостей *a* и пл. *ADC,* то прямая *AM* является прямой пересечения этих плоскостей. (На рис. 1b соединим точки *M* и *A* отрезком).

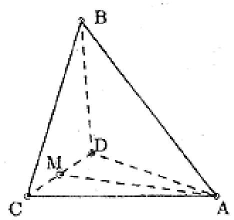


Рис. 1b

Так как точки *M* и *B* являются общими для плоскостей *a* и пл. *CDB,* то прямая *BM* являются прямой пересечения этих плоскостей. (На рис. 1с соединим точки *M* и *B* отрезком).

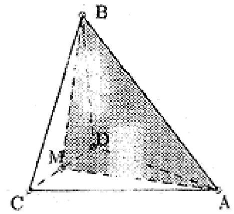


Рис. 1с

Искомое сечение — *AMBA.*

Пример 2. Построить сечение, проходящее через вершину D и точки M и N, лежащие на ребрах AB и BC тетраэдра $ABCD$ (рис. 2а).

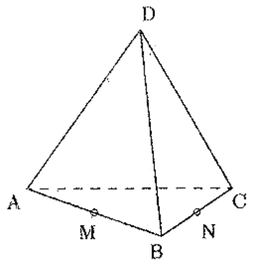


Рис. 2а

Решение. Через три точки M, N, D *всегда можно провести плоскость* (обозначим ее α) *и притом только одну.* Укажем, как эта плоскость пересекается с элементами (гранями и ребрами) тетраэдра $ABCD$. Так как точки M и N являются общими для плоскостей α и пл. ABC, то прямая MN является прямой пересечения этих плоскостей (На рис. 2b соединим точки M и N отрезком). Подобными же рассуждениями обосновывается возможность соединить точки M и D (рис. 2с) и точки N и D (рис. 2d).

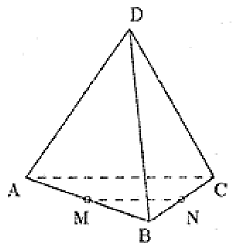


Рис. 2b

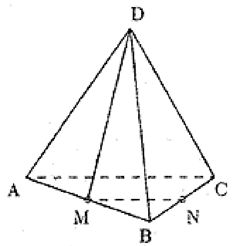


Рис. 2c

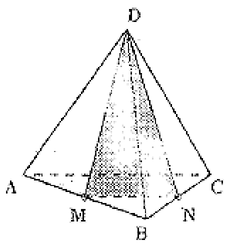


Рис. 2d

Искомое сечение — ΔMDN (рис. 2d).

Пример 3. Построить сечение, проходящее через вершину C и точки M и N , лежащие в гранях ADC и ABC тетраэдра $ABCD$.

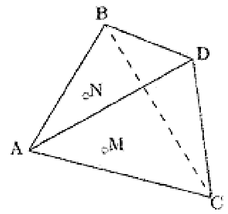


Рис. 3а

Решение. Через три точки M, N и C *можно провести плоскость* (обозначим ее а) *и притом только одну.* Укажем, как эта плоскость пересекается с гранями и ребрами тетраэдра.

Так как точки M и C являются общими для плоскостей a и пл. ADC, то прямая CM является прямой пересечения этих плоскостей. Продолжим ее до пересечения с прямой AD. Точку их пересечении обозначим P (рис. 3b)

Аналогичным образом обосновывается построение прямой CQ (рис. 3с). Точки P и Q принадлежат плоскости a и плоскости ABD, тогда прямая PQ является прямой пересечения этих плоскостей (рис. 3d).

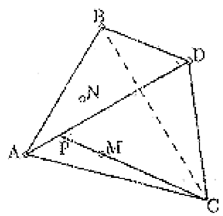


Рис. 3b

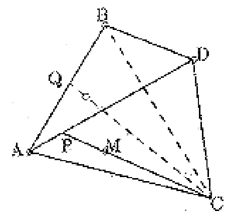


Рис. 3c

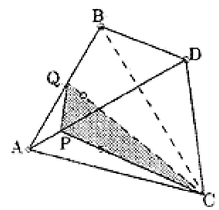


Рис. 3d

Искомое сечение — ΔPQC.

Пример 4. Построить сечение тетраэдра $ABCD$ плоскостью, проходящей через точку M ребра AB параллельно грани ACD.

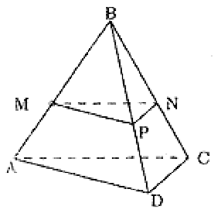


Рис. 4

Решение. *Через точку M, лежащую вне плоскости ADC, можно провести плоскость* (обозначим ее *a*) *и притом только одну.* Так как плоскости *a* и ADC параллельны, то плоскость ABD пересекает их по параллельным прямым. Проведем через точку M прямую, параллельную прямой AD, и обозначим P точку ее пересечения с ребром BD. Аналогичным образом строим отрезок MN, $MN||AC$, затем соединим точки P и M, $PM||DC$. Искомое сечение — треугольник MNP.

Пример 5. Построить сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через ребро AA_1 и точку M ребра CD.

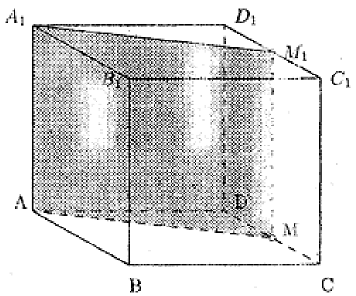


Рис. 5

Решение. *Через точку M и прямую AA_1 можно провести плоскость* (обозначим ее *a*) *и притом только одну.* Найдем, как эта плоскость пересекается с гранями и ребрами параллелепипеда.

1) Так как точки A и M являются общими для плоскостей *a* и $ABCD$, то прямая AM является прямой пересечения этих плоскостей. Соединим точки A

и M отрезком.

2).Так как плоскости ABB_1A_1 и DCC_1D_1 параллельны, то плоскость и пересекает их по параллельным прямым. Через точку M параллельно ребру CC_1 проведем прямую MM_1 (M_1 — точка пересечения с ребром C_1D_1).

3) Так как точки A_1 и M_1 являются общими для плоскостей *a* и $A_1B_1C_1D_1$, то прямая A_1M_1 является прямой пересечении этих плоскостей. Соединим точки A_1M_1.

Искомое сечение четырехугольник AMM_1A_1.

Пример 6. Построить сечение тетраэдра $ABCD$ плоскостью, проходящей через точки M, N, P, лежащие, соответственно, на ребрах AD, DC и CB тетраэдра. Причем M и N заданы так, что прямые MN и AC не параллельны.

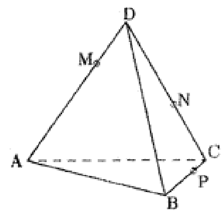


Рис. 6a

Решение. *Через три точки M, N, P можно провести плоскость* (обозначим ее *a*) *и притом только одну.*

1) Нетрудно обосновать, что эта плоскость пересекается с гранями ADC и DCB по отрезкам MN и NP соответственно (рис. 6b).

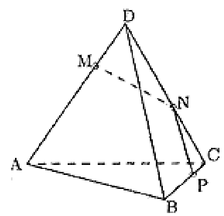


Рис. 6b

2) Так как прямые MN и AC не параллельны, то, продолжив их, найдем точку их пересечения Q (рис. 6c).

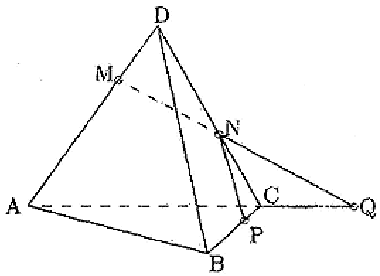


Рис. 6c

3) Так как точки Q и P являются общими для плоскостей a и $ABC,$ то прямая QP является прямой пересечения этих плоскостей. Соединим точки Q и P и продолжим отрезок QP до пересечения с прямой $AB.$ Точку пересечения обозначим S (рис. 6d).

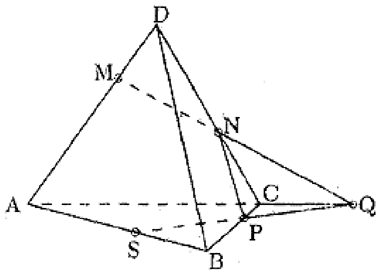


Рис. 6d

4) Так как точки S и M являются общими для плоскостей a и $ADB,$ то прямая SD является прямой пересечения этих плоскостей. Соединим точки S и M отрезком (рис. 6e).

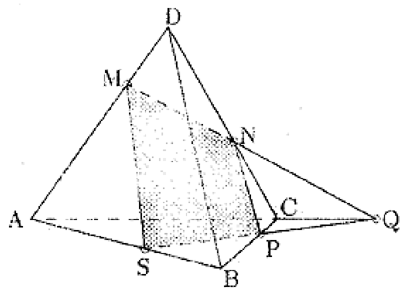
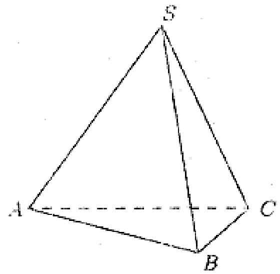


Рис. 6e

Искомое сечение — четырехугольник $SMNP.$

Для того чтобы изобразить на рисунке перпендикуляр, проведенный в пространстве из данной точки на данную плоскость, определяют положение его основания относительно заданных на рисунке точек этой плоскости.

Пример 7. Построить высоту SO правильной треугольной пирамиды $SABC$ (рис. 7a).



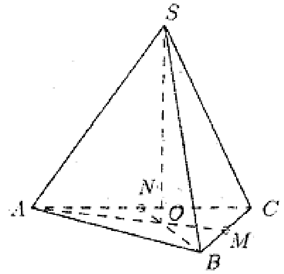


Рис. 7a Рис. 7b

Решение. Основанием высоты правильной треугольной пирамиды является центр правильного треугольника $ABC.$ Проводим медианы AM и BN треугольника ABC и соединим точку O с точкой S (рис. 7b).

Пример 8. Построить сечение правильной треугольной пирамиды $SABC$ плоскостью, проходящей через точку M ребра SA перпендикулярно высоте CN основания пирамиды (рис. 8a).

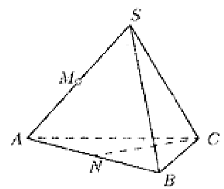


Рис. 8a

Решение. *Через точку можно провести плоскость, перпендикулярную прямой CN, и притом только одну.* Обозначим ее a. Укажем, как эта плоскость пересекается с гранями и ребрами пирамиды.

1) Строим высоту пирамиды (см. пример 7) SO и проводим из точки M прямую, параллельную SO (рис. 8 b).

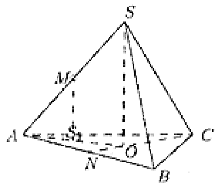


Рис. 8b

2) Плоскость *a* перпендикулярна *CN,* поэтому ее пересечение с плоскостью *ABC* параллельно ребру *AB*. Через точку *S*, параллельно *AB* проводим прямую, точки пересечения со сторонами *AC* и *BC* обозначим *P* и *Q* соответственно (рис. 8c).

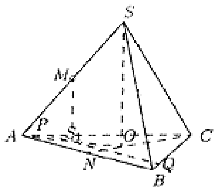


Рис. 8c

3) Так как *PQ*||*AB,* то и линия пересечения плоскостей *a* и *ASB* будет параллельна *AB*. Через точку *M* параллельно прямой *AB* проводим прямую. Точку ее пересечения с *SB* обозначим *R* (рис. 8d).

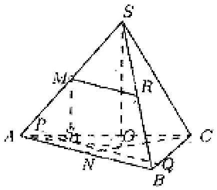


Рис. 8d

4) Соединим точки *P, M* и точки *Q, R* (это требует обоснований).

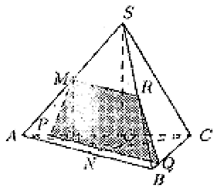


Рис. 8e

Искомое сечение — трапеция *PMRQ*.

Завершая примеры построения сечений, отметим следующее. Как только плоскость сечения задана (тремя точками; двумя точками и параллельной сечению прямой и т. д.), так расположение вершин сечения на ребрах данного многогранника, линии пересечения с гранями определяются однозначно. Появиться на рисунке они должны в результате *обоснованного построения.* Размещение их "наугад", "интуитивно" может привести к самым удивительным результатам. Ниже приведены (рис. 9, 10, 11) примеры "невозможных" сечений.

Контрольный вопрос.

Почему сечения, изображенные на рисунках 9,10, 11, "невозможны"?

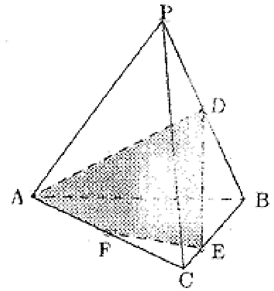


Рис. 9

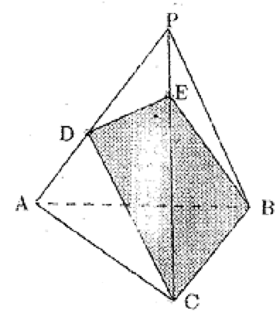


Рис. 10

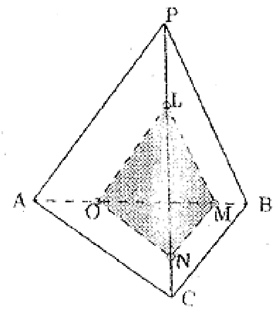


Рис. 11

Задачи на сечении многогранников

В приведенных ниже задачах 1 – 7 важным элементом решения является не столько вычисление тех или иных величин, связанных с сечением, сколько обоснованное построение сечения. Именно этой части решения задачи обычно школьники уделяют мало внимания или пропускают вообще. С другой стороны, слишком подробное обоснование правильности построения сечения делает решение даже простой задачи очень громоздким. Поэтому в задачах 1 - 7, в отличие от примеров 1 – 8, некоторые моменты построения только намечены (например, ссылки на аксиомы и теоремы стереометрии).

Задача 1. В треугольной пирамиде *MABC* все ребра равны 6 см. Найдите периметр сечения, проведенного параллельно *BC* и проходящего через точки *A* и *K*, где *K* — середина *BM*.

Решение. Построим искомое сечение пирамиды *MABC* (рис. 12a).

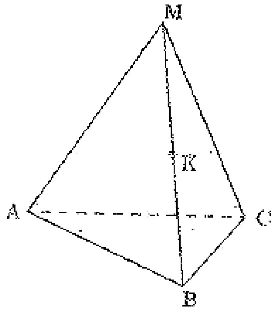


Рис. 12a

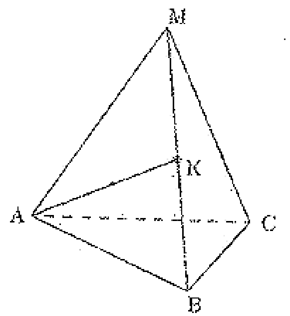


Рис. 12b

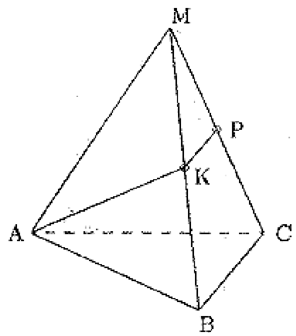


Рис. 12 c

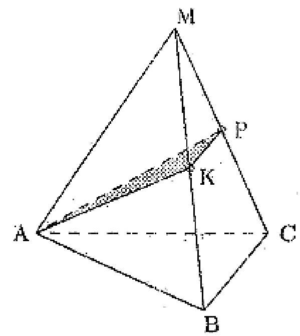


Рис. 12 d

Если α — плоскость, в которой лежит сечение, и точки *A* и *K* являются общими для плоскостей a и *AMB,* то прямая *AK* (рис. 12b) является прямой пересечения этих плоскостей.

Пересечение плоскости a с плоскостью *BMC* параллельно *BC,* поэтому через точку *K* параллельно *BC* проведем прямую и обозначим *P* — ее пересечение с *MC* (рис. 12 c).

Точки *A* и *P* являются общими для плоскостей a и *AMC,* тогда прямая *AP* является прямой пересечения этих плоскостей (рис. 12d).

Искомое сечение — треугольник *AKP.*

Из построения следует, что *KP* — средняя линия *ABMC,* поэтому $KP = \frac{1}{2}BC = 3$.

Нетрудно убедиться, что *AK* и *AP* — медианы одинаковых равносторонних треугольников *AMB* и *AMC* соответственно, поэтому $AK = AP = 3\sqrt{3}$.

Периметр треугольника *AKP* равен $3(2\sqrt{3}+1)$ см.

Задача 2. *KABCD* — правильная четырехугольная пирамида. Точки *M* и *N* — середины ребер *KB* и *KC.* Найти периметр сечения пирамиды плоскостью параллельной грани *AKD* и проходящей через точки *M* и *N,* если сторона основания пирамиды 16 см, а высота пирамиды 4 см.

Решение. Построим сечение пирамиды *KABCD* (рис. 13a).

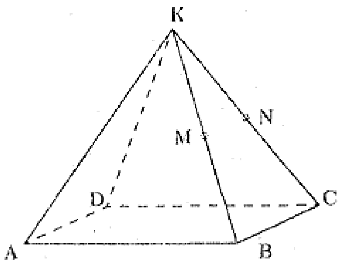


Рис. 13a

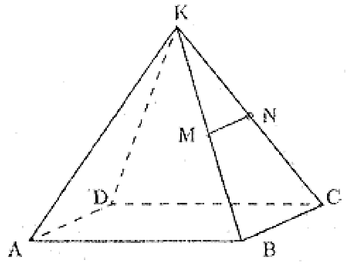


Рис. 13b

Пусть *a* — плоскость, в которой лежит искомое сечение. Так как точки *M* и *N* являются общими для плоскостей *a* и *KBC,* то прямая *MN* является прямой пересечения этих плоскостей (рис. 13b).

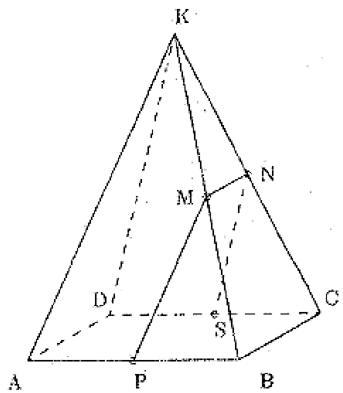


Рис. 13 c

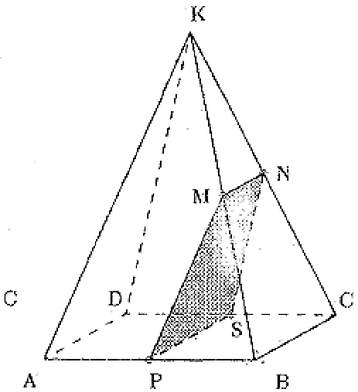


Рис. 13 d

При этом легко убедиться, что *MN* параллельна плоскости *KAD* (например, *MN*||*BC*||*AD*).

Так как плоскость *a* и плоскость *KAD* параллельны, то параллельны и прямые, полученные в результате их пересечения с плоскостью *KAB* (*KDC*). Через точку *M(N)* параллельно *AK (KD)* проведем прямую и обозначим *P(S)* точку ее пересечения с *AB (DC)* (рис. 13c).

Так как точки *P* и *S* — общие для плоскостей *a* и *ABCD,* то *PS* — прямая, по которой они пересекаются (рис. 13d).

Искомое решение — четырехугольник *PMNS.*

Из построения легко следует, что $PM = \frac{1}{2}AK;\;\; NS = \frac{1}{2}KD;\;\; MN = \frac{1}{2}BC = 8,\;\; PS = BC = 8.$

Найдем боковое ребро пирамиды (рис. 13e):

$AC = 16\sqrt{2},\;\; AO = 8\sqrt{2},\;\; AK = \sqrt{128+16} = 12,\;\; PM = NC = 6.$

Периметр равен 36 см.

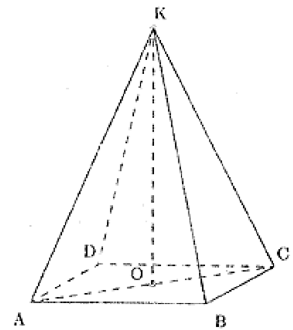


Рис. 13e

Задача 3. В правильной треугольной пирамиде через сторону основания, равную 1 см, проведена плоскость, перпендикулярная боковому ребру. Определить площадь получившегося сечения, если сторона основания $a = 1$ и высота пирамиды $h = 4$ (рис. 14a, $AB = a$).

Решение. Обозначим *a* — плоскость, в которой лежит искомое сечение. По условию прямая *AB* лежит в *a,* и нам остается найти точку пересечения плоскости *a* и ребра *SC.*

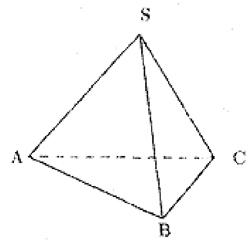
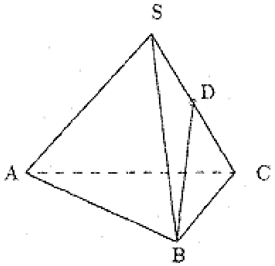


Рис.14 a

Воспользуемся следующим утверждением: если прямая перпендикулярна двум непараллельным прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна самой плоскости.

Из точки B опустим перпендикуляр на прямую SC, обозначим D — основание этого перпендикуляра (рис. 14b)



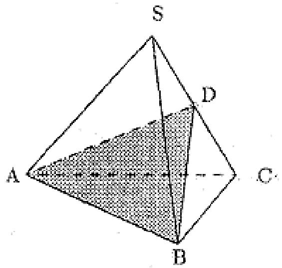


Рис. 14 b . Рис. 14 c

Соединив точки A и D, нужно доказать, что AD перпендикулярна SC (рис. 14c). Эта легко следует из равенства треугольников BSC и ASC. Таким образом, искомое сечение — треугольник ADB. Сторона AB = 1, найдем другие стороны $AD = BD$ (рис. 14d).

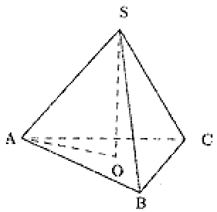


Рис. 14 d

Треугольник ABC — правильный и AO — радиус описанной окружности $AO = \dfrac{AB\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Из треугольника ASO найдем $AS = \sqrt{\dfrac{1}{3} + 4^2} = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$.

Для отыскания S_{ABD} вычислим объем пирамиды V двумя способами.

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 1^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$V = \frac{1}{3} S_{ABD}(SD + DC) = \frac{1}{3} S_{ABD} \cdot SC = \frac{7\sqrt{3}}{9} \cdot S_{ABD} \text{ (рис. 14c)}$$

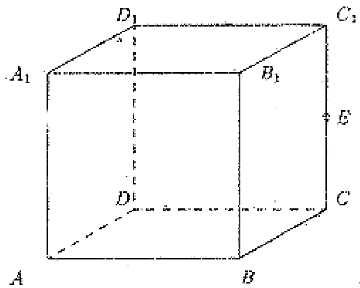
Приравняем два выражения для объема и найдем $S_{ABD} = \dfrac{7}{3}$.

Задача 4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, E — середина CC_1. Определите число сторон сечения плоскостью, которая проходит через точки A_1, B_1, E (рис. 15a).

Решение.

Обозначим через a плоскость, содержащую искомое сечение. Очевидно, что a пересекается с гранями AA_1B_1B и BB_1C_1C по прямым AB_1 и B_1E соответственно (рис. 15b).

Грани AA_1B_1B и DD_1C_1C куба параллельны, поэтому прямые, по которым плоскость a пересекается с ними, также будут параллельны. Одна из этих прямых — AB_1. Построить параллельную ей прямую в плоскости DD_1C_1C можно следующим образом: через точку E проведем прямую, параллельную диагонали C_1D. Легко убедиться в том, что точка пересечения K этой прямой с ребром DC делит его пополам.



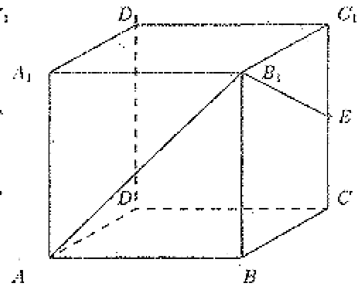


Рис. 15a Рис. 15b

Итак, для построения линии пересечения плоскости a и грани DD_1C_1C делим отрезок DC пополам и соединяем точки K и E (рис. 15c).

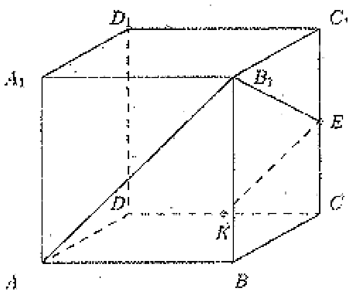


Рис. 15c

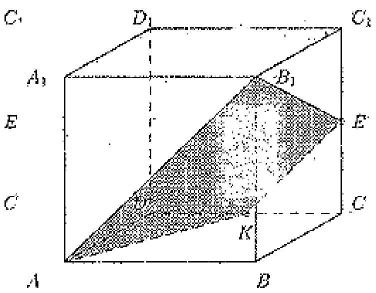


Рис. 15d

Так как точки *A* и *K* являются общими для плоскостей *a* и *ABCD,* то прямая *AK* является прямой пересечения этих плоскостей. Соединим точки *A* и *K*. Искомое сечение — четырехугольник AB_1EK (рис. 15d)

Задача 5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. *K* — середина *AD. M* — середина *CD.* В каком отношении, считая от точки *A,* делит ребро AA_1 плоскость, проходящая через точки B_1, *K* и *M* (рис. 16a)?

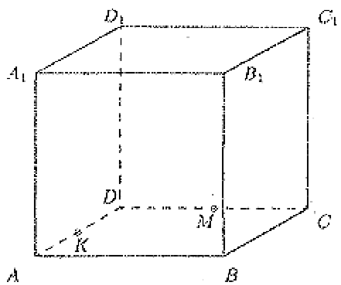


Рис. 16a

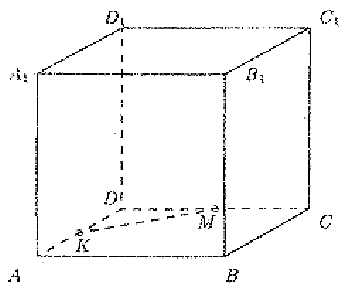


Рис. 16b

Решение.

Обозначим через *a* плоскость, проходящую через точки *K, M* и B_1. Построим сечение куба этой плоскости.

Точки *K* и *M* являются общими для плоскости *a* и плоскости *ABCD,* поэтому прямая *KM* является прямой пересечения этих плоскостей (рис. 16b).

Продолжим прямую *KM* до пересечения с ребрами *AB* и *BC* (рис. 16c).

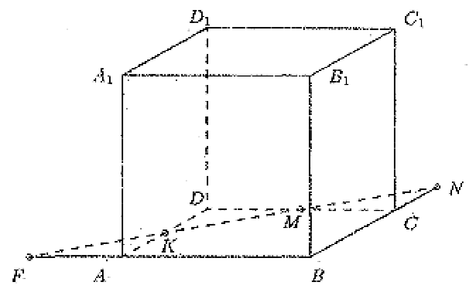


Рис. 16c

Точки B_1 и *N* являются общими для плоскостей *a* и BB_1C_1C, поэтому прямая B_1N — это линия пересечения этих плоскостей. Обозначим *S* —точку пересечения прямых B_1N и C_1C (рис. 16d).

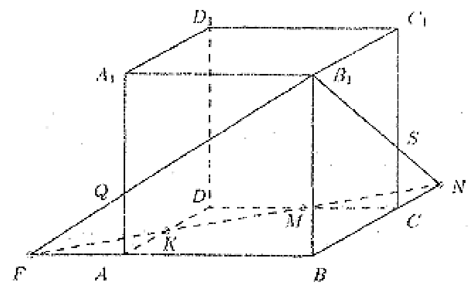


Рис. 16d

Аналогично строится точка *Q* (пересечение B_1F и AA_1).

Точки *S* и *M* являются общими для плоскостей *a* и DD_1C_1C, поэтому прямая *SM* — это прямая пересечения этих плоскостей.

Искомое сечение — пятиугольник B_1SMKQ (рис. 16e).

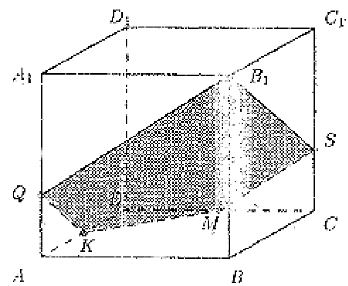


Рис. 16e

Для отыскания отношения $AQ : QA_1$ воспользуемся рис. 16d.

Из построения ясно, что ΔFKA равен треугольнику KDM, следовательно, $AF = \frac{1}{2}a$, где a — ребро куба. Из подобия треугольников AQF и A_1QB_1 находим $AQ : QA_1 = 1 : 2$.

Задача 6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Найдите угол между AB_1 и BC_1 (рис. 17a).

Решение

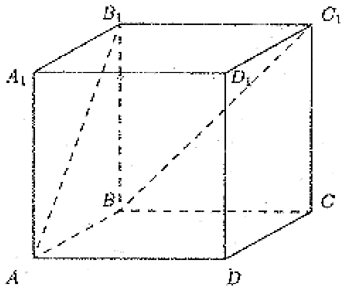


Рис 17a

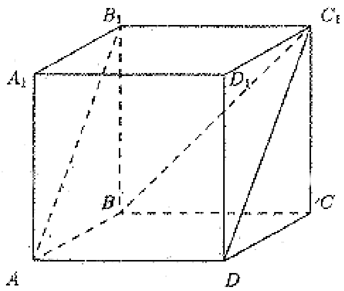


Рис. 17b

Через прямую BC_1 проведем плоскость, параллельную прямой AB_1, точнее говоря, построим сечение куба этой плоскостью. Обозначим a — искомую плоскость. Диагональ C_1D грани DD_1C_1C параллельна диагонали B_1A, противоположной грани куба, а так как точка A принадлежит a, то и вся прямая C_1D принадлежит a, следовательно, она является линией пересечения пл. a с гранью DD_1C_1C (рис. 17b**).** Так как точки B и D являются общими для плоскостей a и $ABCD$, то эти плоскости пересекаются по прямой BD (рис. 17c).

Искомое сечение — это треугольник BC_1D. Угол между скрещивающимися прямыми AB_1 и BC_1 равен углу DC_1B, так как прямые AB_1и DC_1 параллельны. Треугольник BC_1D – равносторонний, поэтому искомый угол равен 60°.

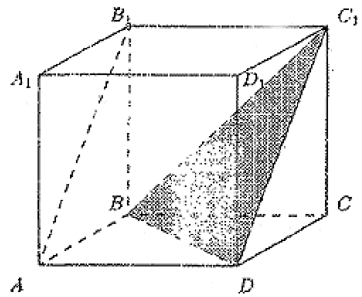


Рис. 17c

Задача 7. Основание прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — квадрат со стороной $\sqrt{5}$ см, длина ребра $AA_1 = 2\sqrt{5}$. Найдите площадь сечения, проведенного через точки C, P и M, где P — середина AD и M — середина BB_1 (рис. 18a).

Решение.

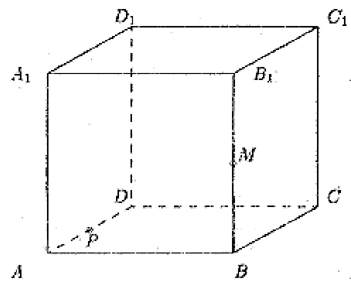


Рис. 18a

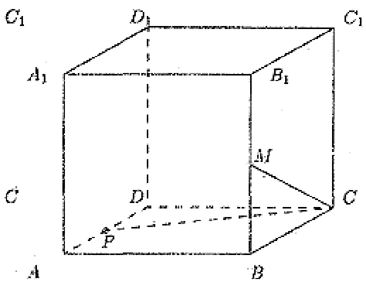


рис. 18b

Построим искомое сечение параллелепипеда. Пусть a — плоскость, в которой лежит это сечение. Очевидным образом прямые MC и CP являются прямыми, по которым плоскость a пересекается с гранями BB_1C_1C и Л BCD соответственно (рис. 18 b).

Продолжим прямые PC и AB и обозначим Q — точку их пересечения (рис. 18c).

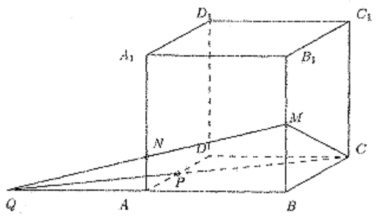


Рис. 18c

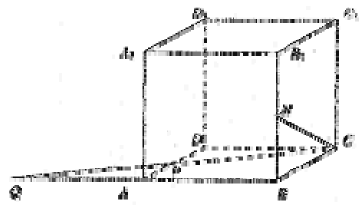


Рис. 18d

Точки Q и M являются общими для плоскости а и плоскости ABB_1A_1, поэтому прямая QM является примой, по которой эти плоскости пересекаются. Обозначим N — точку пересечения прямых QM и AA_1 (рис. I8d). Точки N и P являются общими для плоскостей a и AA_1D_1D, поэтому их пересечением является прямая NP (рис. 18e).

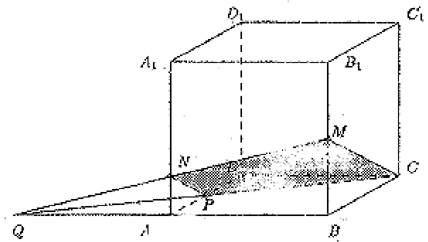


Рис. 18e

Искомое сечение — четырехугольник $MNPC$. Длины сторон этого четырехугольника вычисляются легко:

$$MC = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{10}\,,$$

$$PC = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{5}{2},$$

$$PN = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2},$$

$$NM = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}.$$

Таким образом, сечение — равнобокая трапеция (рис. 19)

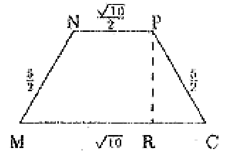


Рис. 19

Ее высота равна

$$PR = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)} = \sqrt{\frac{90}{16}} = \frac{3\sqrt{10}}{4}\,.$$

Искомая площадь сечения равна

$$\frac{\frac{\sqrt{10}}{2} + \sqrt{10}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{10}}{4} = \frac{48}{5}\,.$$

Учебное издание

Математика: Сечения многогранников

Модуль № 5 для 11 класса

Учебно-методическая часть

Составитель: Евгений Константинович Лейнартас

Редактор: О.Ф.Александрова

Корректура автора

Подписано в печать 25.12.2006. Формат 60x84/16.

Бумага газетная. Печать ризографическая.

Усл. печ. л. 1,5.

Тиражируется на электронных носителях

Адрес в Internet: zensh.ru/resourses

Отдел информационных ресурсов управления информатизации КрасГУ

660041 г. Красноярск, пр. Свободный, 79, ауд. 22-05, e-mail: info@lan.krasu.ru

Издательский центр Красноярского государственного университета

660041 г. Красноярск, пр. Свободный, 79, e-mail: rio@lan.krasu.ru