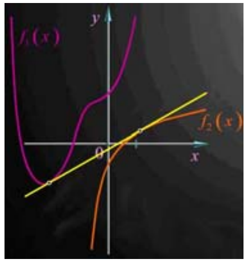
Общая касательная для графиков двух функций

Алгоритм решения:



1. Составляем уравнения касательных к графику функции y= f(x) в точке m и к графику функции y= g(x) в точке n.
2. Для выполнения условия задачи касательные должны совпадать, отсюда следует: $\begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$ Решив полученную систему, находим абсциссы m и n.
3. Подставляя любое из них в соответствующее уравнение, находим искомую касательную.

<u>Пример:</u> Найти общую касательную к графикам функций y= x^2+5x+4 и y= x^2-x+1.

Решение.

1. f(m)=m^2+5x+4; f'(m)=2m+5;
y_1= (2m+5)x-m^2+4;
g(n)=n^2-n+1; g'(n)=2n-1,
y_2=(2n-1)x-n^2+1
2. $$\begin{cases} 2m+5=2n-1 \\ -m^2+4=-n^2+1 \end{cases} = \begin{cases} m=-2 \\ n=1 \end{cases}$$
3. При n=1 y=x– искомая касательная.

Дополнительные формулы

Условие параллельности прямых:

$k_1=k_2$

Условие перпендикулярности прямых:

$k_1*k_k= -1$

Угол между прямыми:

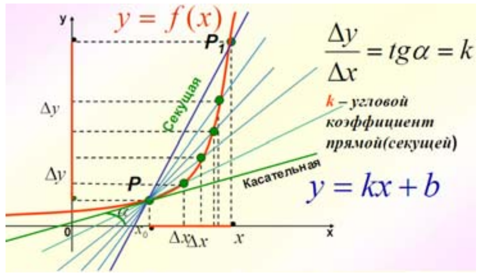
$$tg\,\alpha = \frac{|k_1 - k_2|}{1 + k_1 k_2}$$

где k_1, k_2– угловые коэффициенты прямых.

Ресурсы:
1. Говоров В. М. и др. Сборник конкурсных задач для поступающих в ВУЗы.
2. «1С:Репетитор. Математика (часть 1)".
3. Цыпкин А. Г., Пинский А. И. Справочное пособие по математике с методами решения задач для поступающих в ВУЗы.

Мичуринский
лицей-интернат

Геометрические приложения производной. Задачи на касательную.



При Δx→0 секущая стремится занять положение касательной. То есть **касательная** есть предельное положение секущей.

Уравнение касательной к графику функции f(x) в точке a

Геометрический смысл производной

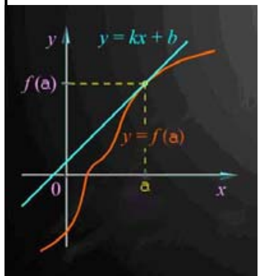
$$f'(x) = tg\alpha = k$$

k— угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции y=f(x) в точке с абсциссой x=a.

Уравнение касательной к графику f(x) в точке a:

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Алгоритм составления уравнения касательной.

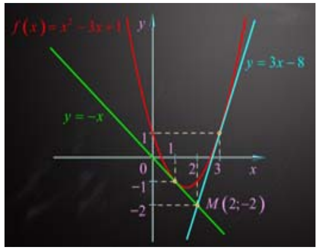


1. Находим значение функции в точке a.
2. Находим производную функции f'(x).
3. Находим значение производной функции f'(x) в точке a.
4. Подставляем все полученные значения в уравнение касательной.
Получаем искомое уравнение касательной.

Касательная к графику функции f(x), проходящая через точку М, не принадлежащую графику f(x)

Алгоритм решения:

1. Составляем уравнение касательной к графику y=f(x) в точке с абсциссой a в общем виде(*)
2. Подставляем в него координаты точки М и находим абсциссу точки касания a.



3. Подставляем найденное значение a в общий вид уравнения касательной(*), получаем искомое уравнение касательной.

<u>Пример.</u> Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^2-3x+1$, проходящей через точку М(2,-2).

1) $f(a)=a^2-3a+1$; $f'(x)=2x-3$; $f'(a)=2a-3$

$y= a^2-3a+1+(2a-3)(x-a)$ - общий вид касательных для графика f(x).

2) Подставляем x=2, y= -2 в уравнение получим, что a=1 или a=3, т.е. будем иметь две касательные проходящие через т. М.

3) Если a=1, то y= -x;

Если a=3, то y=3x-8

Касание двух графиков.

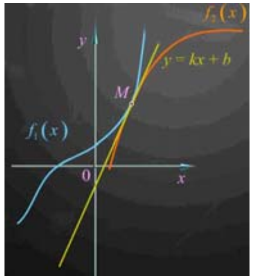
1. Условие касания графика и прямой

$$\begin{cases} f(x) = kx+b \\ f'(x) = k \end{cases}$$

2. Условие касания двух графиков

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$

Алгоритм решения:



1. Составляем систему, в которой приравниваем функции и производные.
2. Решаем данную систему.
3. Получаем координаты точки касания.

<u>Пример:</u> Найдем точку касания графиков: $y=2x^2-x-6$ и $y=3x^2-5x-2$

Решение.

$$\begin{cases} 2x^2 - x - 6 = 3x^2 - 5x - 2 \\ 4x - 1 = 6x - 5 \end{cases} \Rightarrow x = 2$$

Тогда y=0.
Значит M(2,0) - искомая точка