Урок обобщающего повторения по теме "Производная. Геометрический смысл производной. Задачи с использованием графика производной" (11-й класс, 2 часа)

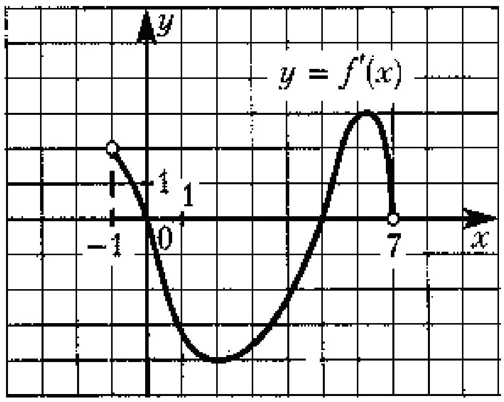
Мусин Хасан Эльдарович, учитель математики Школа «Ретро».
Персональная карточка №212-234-309

1. Найдите длину промежутка возрастания – убывания функции:

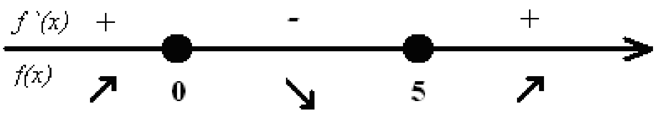
<Пример 1>

Пример 1.

Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-1; 7)$. На рисунке изображен график ее производной. Исследуйте функцию $y = f(x)$ на монотонность и запишите в ответе максимальную длину промежутка убывания.



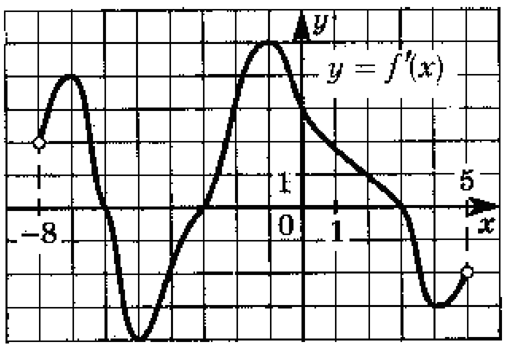
Решение:



Функция убывает на отрезке [0;5].
Длина отрезка убывания 5 – 0 = 5
***Ответ:* 5.**

Задания для самостоятельного решения:
<Рисунок 1>

1. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-8; 5)$. График ее производной изображен на рисунке. Найдите промежутки возрастания функции $y = f(x)$. В ответе укажите наибольшую из длин этих промежутков.

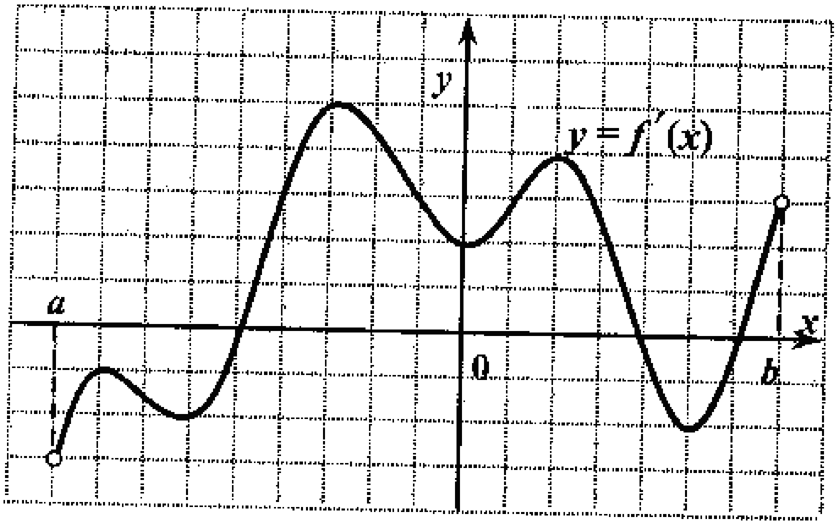


2. Найдите число точек экстремума:

<Пример 2>

Пример 2.

Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(a;\ b)$. На рисунке изображен график ее производной. Определите, сколько точек максимума имеет функция $y = f(x)$ на промежутке $(a;\ b)$.



Решение:

Функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке, где её производная $y = f\,`(x)$ положительна, т.е. график производной расположен выше оси абсцисс и убывает, если её производная отрицательна, т.е. график лежит ниже оси абсцисс.

Точка x_0 является точкой максимума, если её производная равна нулю, слева от x_0 положительна, а справа отрицательна.

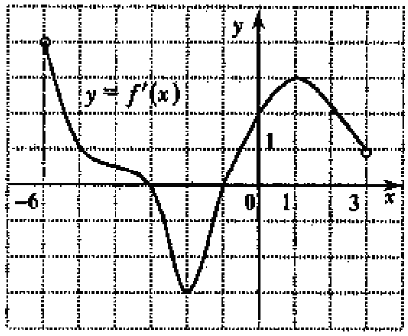
На заданном рисунке таких точек **только одна**

Ответ: 1.

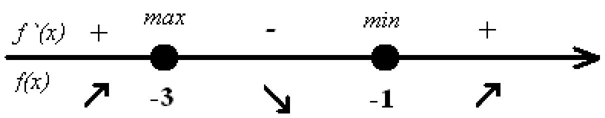
<Пример 3>

Пример 3.

Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6;\ 3)$. На рисунке изображен график ее производной. Укажите точку максимума функции $y = f(x)$ на промежутке $(-6;\ 3)$.



Решение:



На промежутках от [–6; –3) и (–1; 3] *f `(x)*>0 (функция *y* = *f(x)* возрастает на этом промежутке), на промежутке (–3; –1) *f `(x)*<0 (функция *y* = *f(x)* убывает на этом промежутке)

Точка x_0 является точкой максимума, если её производная равна нулю, слева от x_0 положительна, а справа отрицательна.

На заданном рисунке таких точек **только одна**

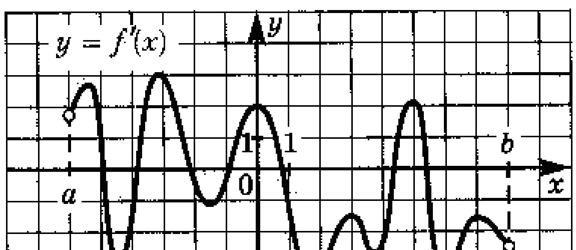
($x_0 = -3$).

Ответ: –3.

<Пример 4>

Пример 4.

Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(a;\ b)$. На рисунке изображен график ее производной. Укажите число точек минимума функции $y = f(x)$ на промежутке $(a;\ b)$.



Решение:

Функция *y* = *f(x)* возрастает на промежутке, где её производная *y* = *f `(x)* положительна, т.е. график производной расположен выше оси абсцисс и убывает, если её производная отрицательна, т.е. график лежит ниже оси абсцисс.

Точка x_0 является точкой минимума, если её производная равна нулю, справа от x_0 отрицательна, а справа положительна.

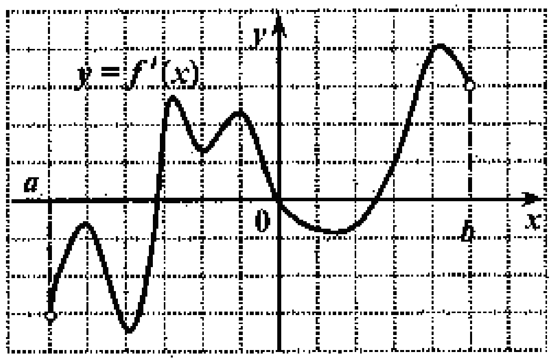
На заданном рисунке таких точек **три**

Ответ: 3.

Задания для самостоятельного решения:

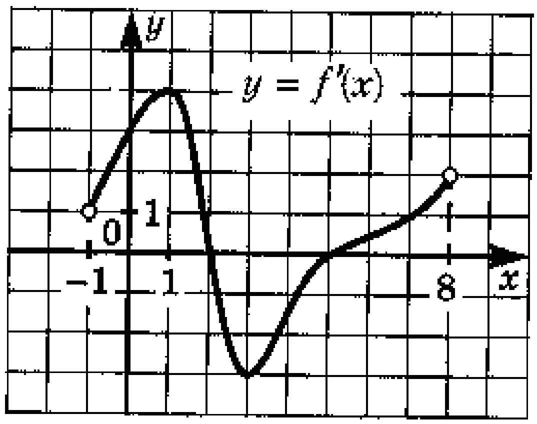
<Рисунок 2>

2. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(a;\ b)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите число точек минимума функции $y = f(x)$ на промежутке $(a;\ b)$.



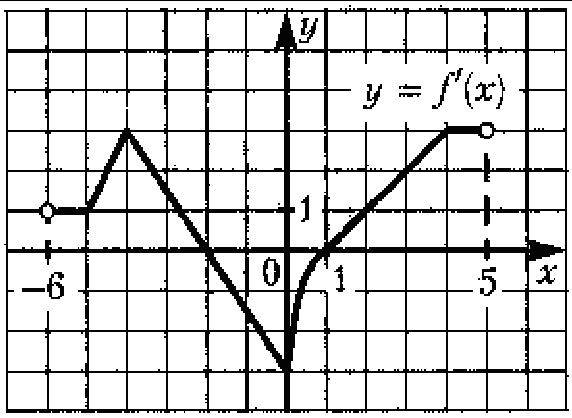
<Рисунок 3>

3. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-1;\ 8)$. На рисунке изображен график ее производной. Укажите точку минимума функции $y = f(x)$ на промежутке $(-1;\ 8)$.



<Рисунок 4>

4. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6;\ 5)$. На рисунке изображен график ее производной. Укажите точку максимума функции $y = f(x)$ на промежутке $(-6;\ 5)$.

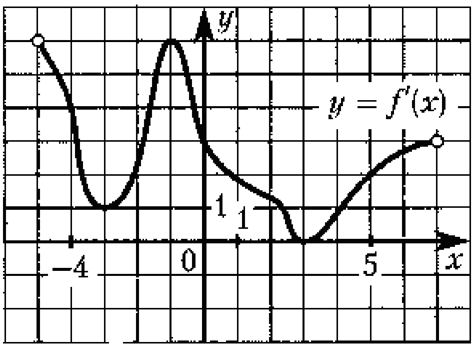


3. Найдите наибольшее – наименьшее значение функции на промежутке:

<Пример 5>

Пример 5.

Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5;\ 7)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите точку x_0, в которой функция $y = f(x)$ принимает наибольшее значение на отрезке $[-4;\ 5]$.



Решение:

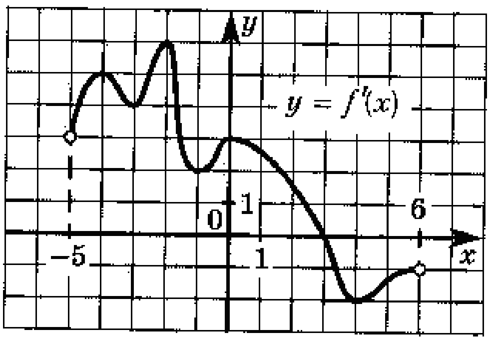
Функция *y* = *f(x)* возрастает на промежутке, где её производная *y* = *f `(x)* положительна. На интервале [–4;1) и (1: 5] производная принимает положительное значение, значит функция на отрезке [–4; 5] только возрастает. Следовательно, наибольшего своего значения она достигает в правом конце этого отрезка при x_0 =5.

Ответ: 5.

<Пример 6>

Пример 6.

Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5;\ 6)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите точку x_0, в которой функция $y = f(x)$ принимает наибольшее значение.



Решение:

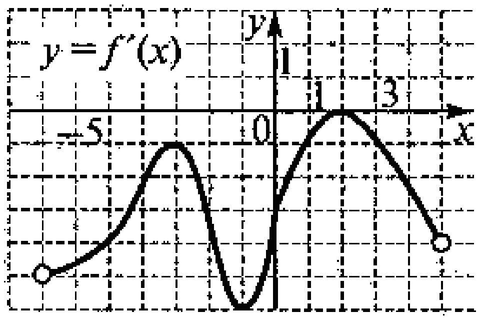
Функция *y* = *f(x)* на промежутке (–5;3) возрастает, т.к. её производная *y* = *f `(x)* положительна.

На интервале (3;6) производная принимает отрицательное значение, значит, функция убывает. Следовательно, x_0 =3 – точка максимума, поэтому на заданном промежутке функция принимает наибольшее значение при x_0 =3.

Ответ: 3.

Задания для самостоятельного решения:
<Рисунок 5>

5. **Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-7;\ 5)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите точку x_0, в которой функция $y = f(x)$ принимает наибольшее значение на отрезке $[-5;\ 3]$.**

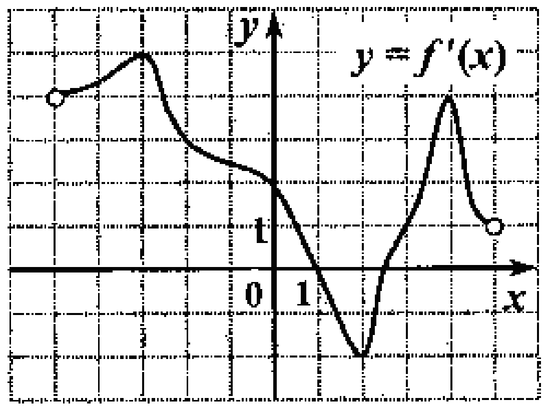


4.1. Найдите угловой коэффициент касательной, значение производной в точке касания:

<Пример 7>

Пример 7.

К графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$ проведена касательная. Найдите ее угловой коэффициент, если на рисунке изображен график производной этой функции.



Решение:

В точке $x_0 = -2$ $f`(-2) = -2$, поэтому $k = -2$.

Ответ: –2.

<Пример 8>

Пример 8.

Прямая, проходящая через начало координат, касается графика функции $y = h(x)$ в точке $N(4; -6)$. Найдите $h'(4)$.

Решение:

Поскольку $h`(a) = k$, то необходимо составить уравнение прямой $y = kx + b$, являющейся касательной, и проходящей через две точки:
$N(4;–6)$ и $O(0;0)$.
Составим систему из двух уравнений

$$\begin{cases} 4k + b = -6; \\ 0k + b = 0. \end{cases}$$

Решением системы служит пара чисел

$$\begin{cases} k = -1{,}5; \\ b = 0. \end{cases}$$

Поэтому $f`(a) = –1{,}5$.

Ответ: –1,5.

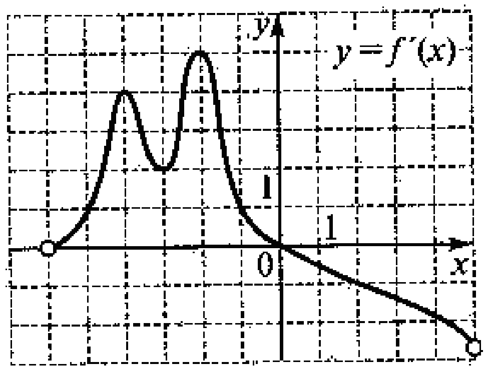
Задания для самостоятельного решения:

<Рисунок 6>

6. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика функции $y = g(x)$ в точке $F(2; 3)$. Найдите $g'(2)$.

<Рисунок 7>

7. К графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$ проведена касательная. Найдите ее угловой коэффициент, если на рисунке изображен график производной этой функции.

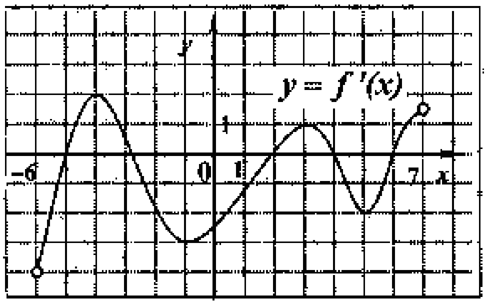


4.2. Найдите наибольшее – наименьшее значение углового коэффициента касательной:

<Пример 9>

Пример 9.

Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6; 7)$. На рисунке изображен график производной этой функции. Укажите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ имеет наибольший угловой коэффициент.



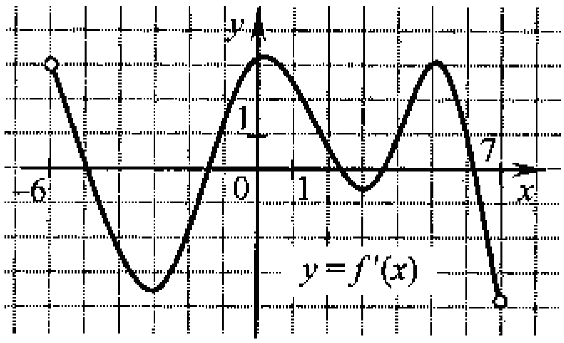
Решение:
Согласно графику производной на заданном промежутке наибольшее значение производная принимает в точке $x_0 = -4$ и $f\,`(-4)=2$,
поэтому $k = 2$
Ответ: **2.**

4.3. Касательные параллельны некоторой прямой, найдите количество точек касания:

<Пример 10>

Пример 10.

Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6; 7)$. На рисунке изображен график производной этой функции. К графику функции провели все касательные параллельные прямой $y = 6 - x$ (или совпадающие с ней). Найдите количество точек графика функции, в которых проведены эти касательные.

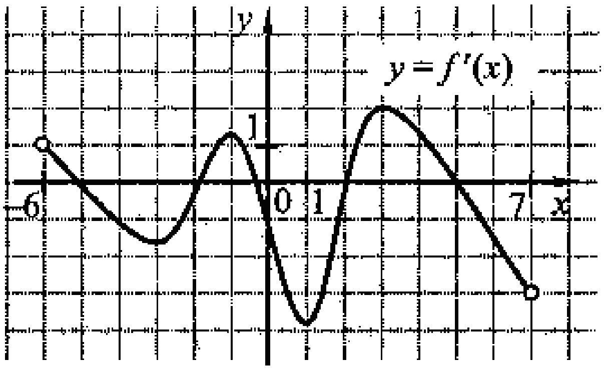


Решение:
Если касательные параллельны прямой $y = 6 - x$, то угловые коэффициенты этих прямых равны, т.е. $k = -1$. Следовательно, $f\,`(x) = -1$. По графику производной видно, что данное уравнение имеет ровно три решения. (Прямая у = –1 пересекается с графиком производной в трёх точках).
Ответ: 3.

Задания для самостоятельного решения:

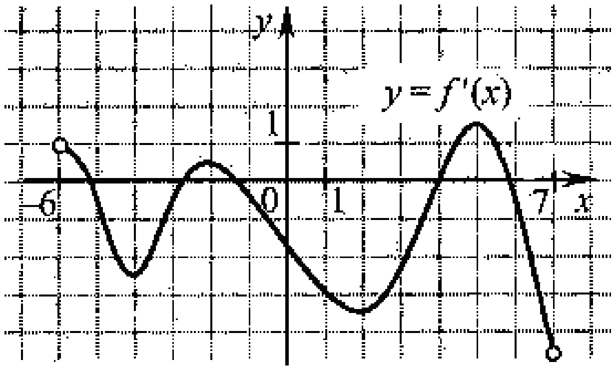
<Рисунок 8>

8. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6; 7)$. На рисунке изображен график производной этой функции. Укажите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ имеет наименьший угловой коэффициент.



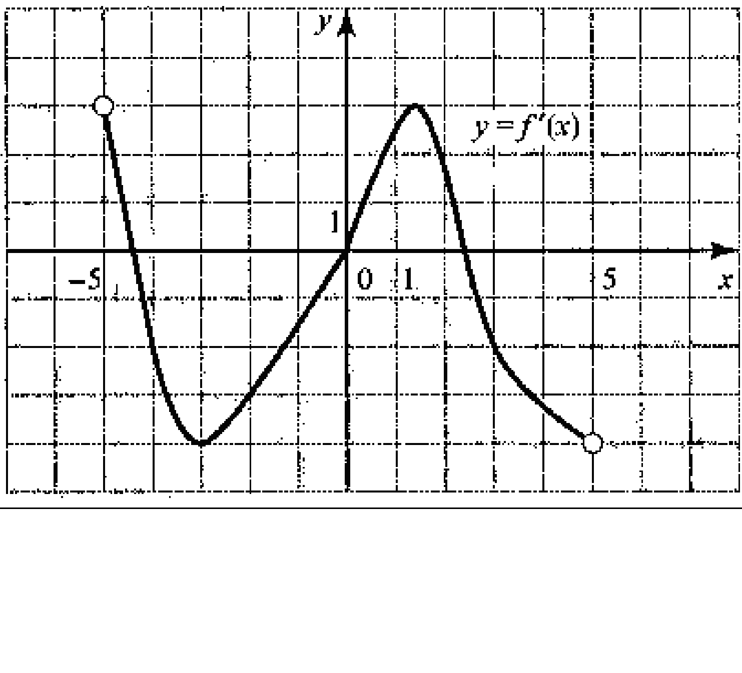
<Рисунок 9>

9. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6; 7)$. На рисунке изображен график производной этой функции. К графику функции провели все касательные параллельные прямой $y = 3 + x$ (или совпадающие с ней). Найдите количество точек графика функции, в которых проведены эти касательные.



<Рисунок 10>

10. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5; 5)$. На рисунке изображен график производной этой функции. К графику функции провели все касательные, параллельные прямой $y = 5 - 2x$ (или совпадающие с ней). Найдите наибольшую из абсцисс точек, в которых проведены эти касательные.



5. Различные задачи на использование графика производной:

<Пример 11>

Пример 11.

На рисунке 1 изображены прямые, являющиеся касательными к графику функции $y = f(x)$ в точках x_0, x_1, x_2, x_3. Определите количество положительных чисел среди значений производной $y = f'(x)$ в очках x_0, x_1, x_2, x_3.

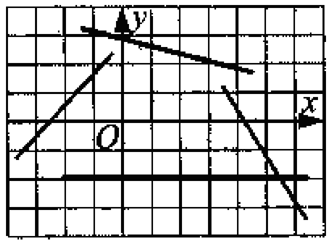


Рис. 1

1) 0 2) 1 3) 2 4) 3

Решение:

Поскольку справедливы равенства

$f`(a) = k = tg\,\alpha$, где α - угол наклона касательной

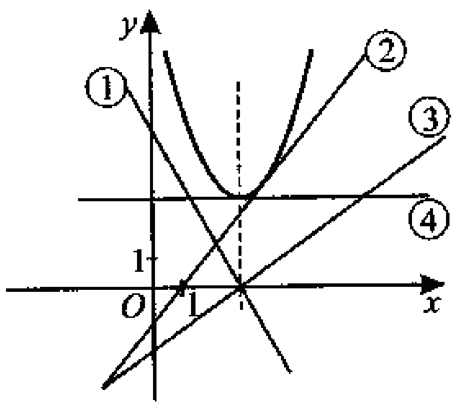
между касательной и положительным направлением оси *Ox*. Если угол α – острый, то тангенс угла принимает положительное значение, следовательно $f`(x_0)$ >0. На графике данному условию соответствует только одна прямая.

Ответ: 1.

Задания для самостоятельного решения:

<Рисунок 11>

11. На рисунке изображен график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ и четыре прямые. Одна из этих прямых — график производной данной функции. Укажите номер этой прямой.

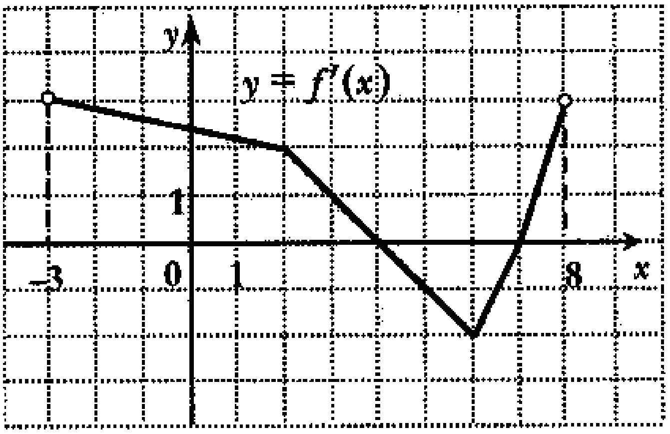


1) 3 2) 1 3) 4 4) 2

Самостоятельная работа.
Вариант 1.

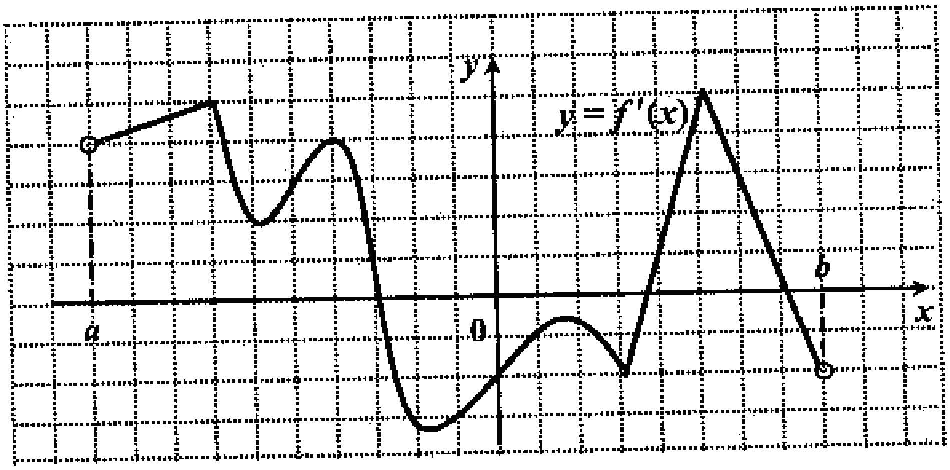
<Задача 1.1>

1. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-3;\ 8)$. На рисунке изображен график ее производной. Исследуйте функцию $y = f(x)$ на монотонность и запишите в ответе длину промежутка убывания.



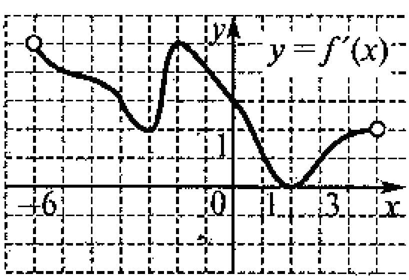
<Задача 2.1>

2. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(a;\ b)$. На рисунке изображен график ее производной. Укажите число точек максимума функции $y = f(x)$ на промежутке $(a;\ b)$.



<Задача 3.1>

3. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-7;\ 5)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите точку x_0, в которой функция $y = f(x)$ принимает наименьшее значение на отрезке $[-6;\ 3]$.

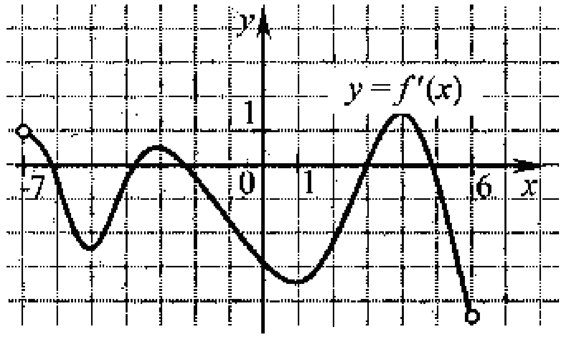


<Задача 4.1>

4. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика функции $y = \varphi(x)$ в точке $T(4;\ 10)$. Найдите $\varphi'(4)$.

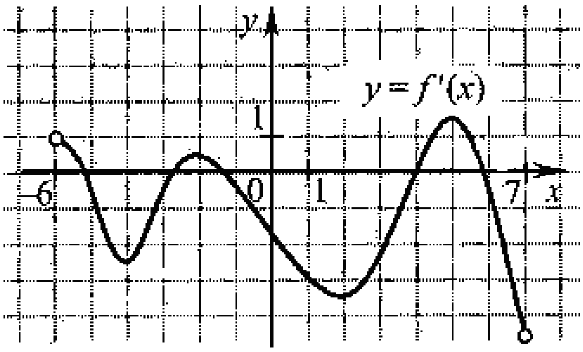
<Задача 5.1>

5. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-7;\ 6)$. На рисунке изображен график производной этой функции. Укажите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ имеет наибольший угловой коэффициент.



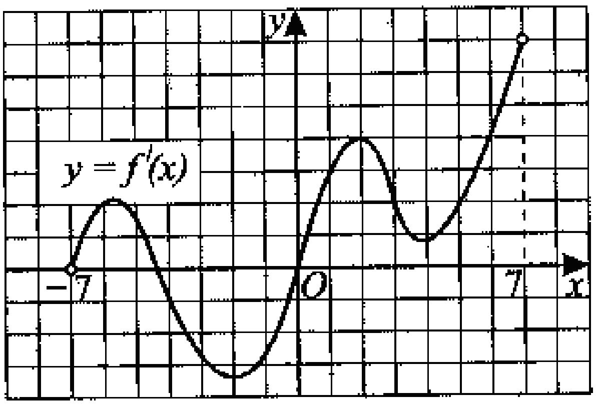
<Задача 6.1>

6. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6;\ 7)$. На рисунке изображен график производной этой функции. К графику функции провели все касательные параллельные прямой $y = 3 + x$ (или совпадающие с ней). Найдите количество точек графика функции, в которых проведены эти касательные.



<Задача 7.1>

7. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $[-7; 7]$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите сумму всех целых значений x из промежутка убывания функции $f(x)$.

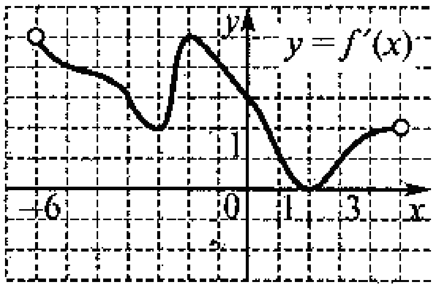


1) -14 2) -9 3) -10 4) -7

Самостоятельная работа.
Вариант 2.

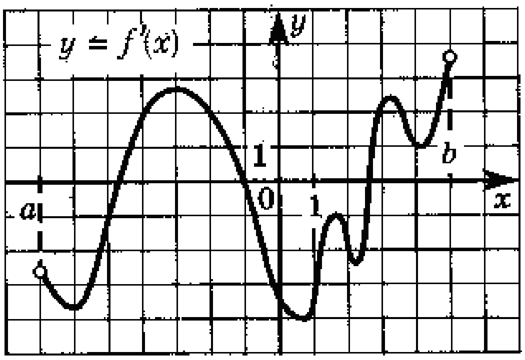
< Задача 1.2>

1. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-7;\ 5)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите точку x_0, в которой функция $y = f(x)$ принимает наименьшее значение на отрезке $[-6;\ 3]$.



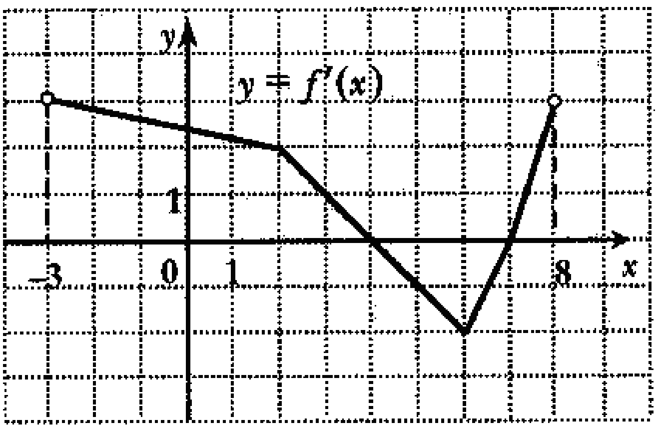
< Задача 2.2>

2. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(a;\ b)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите число точек максимума функции $y = f(x)$ на промежутке $(a;\ b)$.



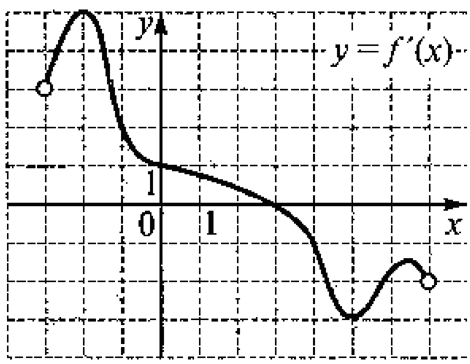
< Задача 3.2>

3. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-3;\ 8)$. На рисунке изображен график ее производной. Исследуйте функцию $y = f(x)$ на монотонность и запишите в ответе длину промежутка убывания.



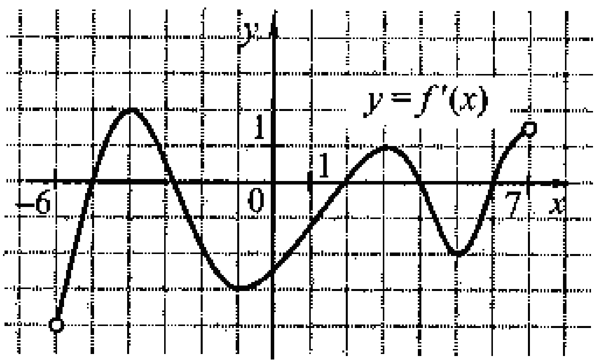
< Задача 4.2>

4. К графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$ проведена касательная. Найдите ее угловой коэффициент, если на рисунке изображен график производной этой функции.



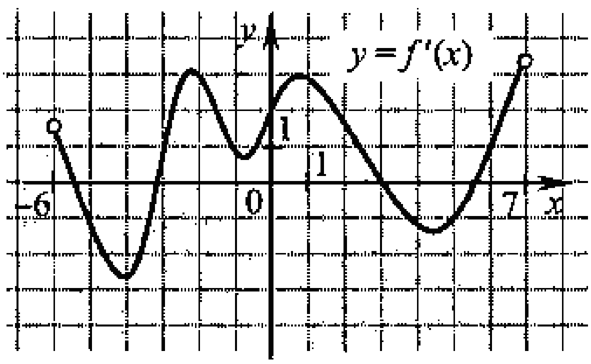
< Задача 5.2>

5. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6; 7)$. На рисунке изображен график производной этой функции. Укажите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ имеет наибольший угловой коэффициент.



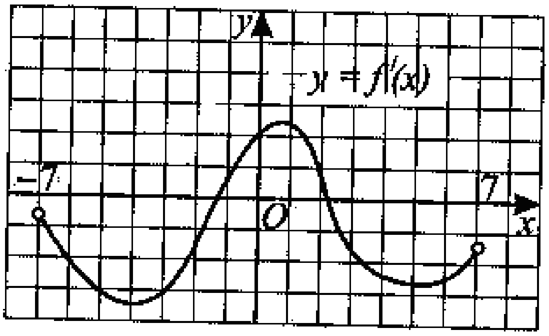
< Задача 6.2>

6. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6; 7)$. На рисунке изображен график производной этой функции. К графику функции провели все касательные параллельные прямой $y = 5 - 2x$ (или совпадающие с ней). Укажите количество точек графика функции, в которых проведены эти касательные.



< Задача 7.2>

7. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $[-7; 7]$. На изображен график ее производной. Найдите сумму всех целых значений x из промежутков возрастания функции $f(x)$.



1) −2 2) −1 3) 0 4) 1