2. Свойства основной задачи линейного программирования. Геометрическое истолкование задачи линейного программирования.

Рассмотрим основную задачу линейного программирования. Как было отмечено ранее, она состоит в определении максимального значения функции $F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ при условиях $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ $(i=\overline{1, m})$, $x_j \geqslant 0$ $(j=\overline{1, n})$.

Перепишем эту задачу в векторной форме: найти максимум функции

$$F=CX \quad (8)$$

при условиях

$$x_1P_1+x_2P_2+\ldots+x_nP_n=P_0 \quad (9)$$

$$X \geqslant 0, \quad (10)$$

где $C=(c_1;\ c_2;\ \ldots;\ c_n)$, $X=(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$; CX - скалярное произведение; $P_1, \ldots, P_n$ и P_0 — m-мерные вектор-столбцы, составленные из коэффициентов при неизвестных и свободных членах системы уравнений задачи:

$$P_0=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix};\ P_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix};\ P_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix};\ \ldots;\ P_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Определение. План $X=(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$ называется *опорным планом* основной задачи линейного программирования, если система векторов P_j, входящих в разложение (9) с положительными коэффициентами x_j, линейно независима.

Так как векторы P_j являются m-мерными, то из определения опорного плана следует, что число его положительных компонент не может быть больше, чем m.

Определение. Опорный план называется *невырожденным*, если он содержит ровно m положительных компонент, в противном случае он называется *вырожденным*.

Свойства основной задачи линейного программирования (8) - (10) тесным образом связаны со свойствами выпуклых множеств.

Определение. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ - произвольные точки евклидового пространства E_n. *Выпуклой линейной комбинацией* этих *точек* называется сумма $\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\ldots+\alpha_nX_n$, где α_i - произвольные неотрицательные числа, сумма которых равна 1: $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1,\ \alpha_i\geqslant 0\ (i=\overline{1, n})$

Определение. Множество называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит и их произвольную выпуклую линейную комбинацию.

Определение. Точка X выпуклого множества называется *угловой*, если она не может быть представлена в виде выпуклой линейной комбинации каких-нибудь двух других различных точек данного множества.

Теорема 1. *Множество планов основной ЗЛП является выпуклым (если оно не пусто).*

Определение. Непустое множество планов основной ЗЛП называется *многогранником решений*, а всякая угловая точка многогранника решений - *вершиной.*

Теорема 2. *Если основная ЗЛП имеет оптимальный план, то максимальное значение целевая функция задачи принимает в одной из вершин многогранника решений. Если максимальное значение целевая функция задачи принимает более чем в одной вершине, то она принимает его во всякой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих вершин.*

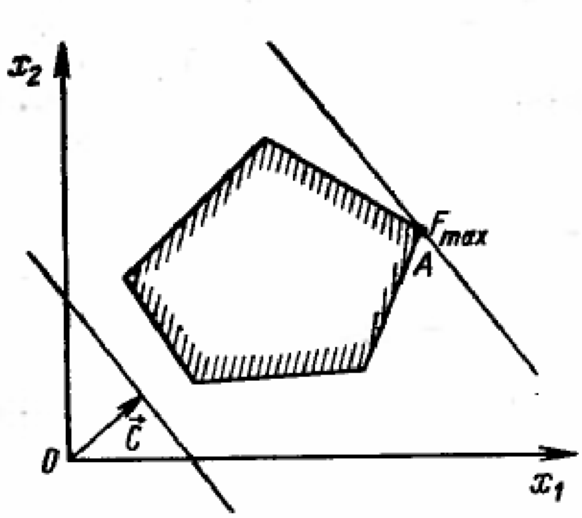
Теорема 3. *Если система векторов* $P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_k\ (k \leqslant n)$ *в разложении (9) линейно независима и такова, что*

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \ldots + x_kP_k = P_0, \qquad (11)$$

где все $x_i \geqslant 0$, *то точка* $X = (x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_k;\ 0;\ \ldots;\ 0)$ *является вершиной многогранника решений.*

Теорема 4. *Если* $X = (x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$ *- вершина многогранника решений, то векторы* P_j, *соответствующие положительным* x_j *в разложении (9), линейно независимы.*

Примечание: иногда термин «многогранник решений» называют многоугольником решений. Обычно термин «многогранник решений» употребляют, если n ≥ 3. Стороны этого многоугольника лежат на прямых, уравнения которых получаются из исходной системы ограничений заменой знаков неравенства на знаки точных равенств. Ниже на рисунке изображён многогранник решений.

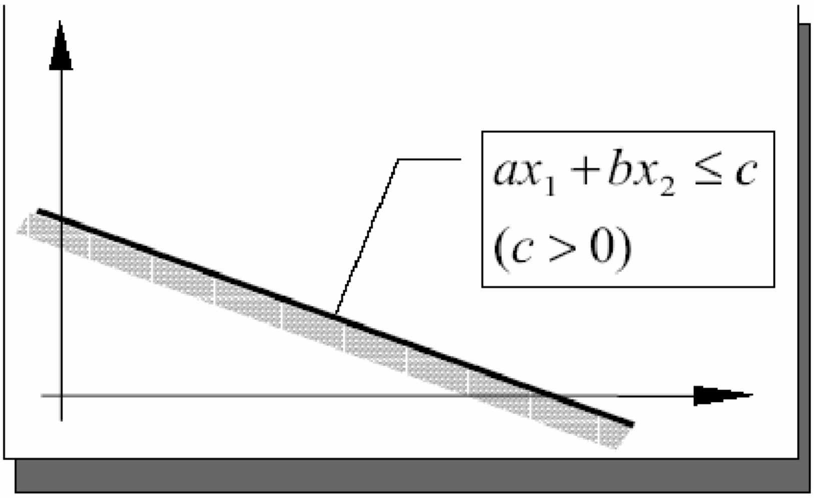


Графическое решение ЗЛП с двумя переменными и системой ограничений в виде линейных неравенств состоит из 2-х этапов:

1. Построение на плоскости множества решений системы линейных неравенств, являющегося выпуклым многогранным множеством.
2. Выбор в построенном множестве точки $x^*(x_1^*,\ \ x_2^*)$, доставляющей целевой функции требуемое экстремальное (max или min) значение.

Коротко о необходимом математическом аппарате.

1) Множество точек, удовлетворяющих уравнению $ax_1 + bx_2 = c$ геометрически есть прямая. (см. рис.)



2) Множество точек, удовлетворяющих линейному неравенству, представляет собой полуплоскость по одну сторону от прямой (включая саму прямую).

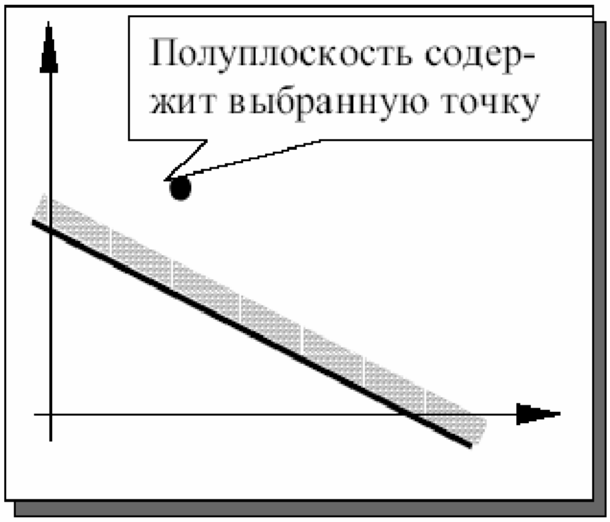
Способ выбора искомой полуплоскости.

а) На плоскости выбирается точка с известными координатами, не лежащая на граничной прямой.

б) Координаты выбранной точки подставляются в неравенство.

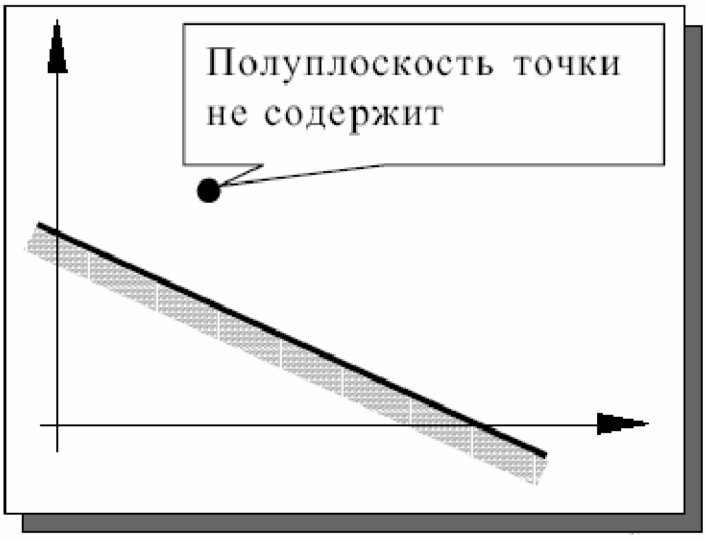
Возможны только два случая:

1. Получено *верное числовое неравенство*.



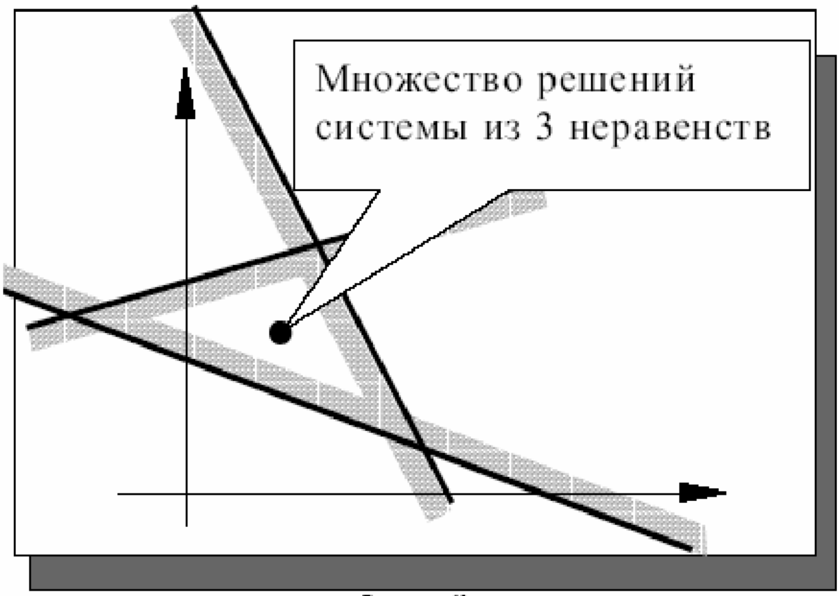
В этом случае искомой полуплоскостью будет та, в которой содержится выбранная точка.

2. Числовое неравенство - неверное.

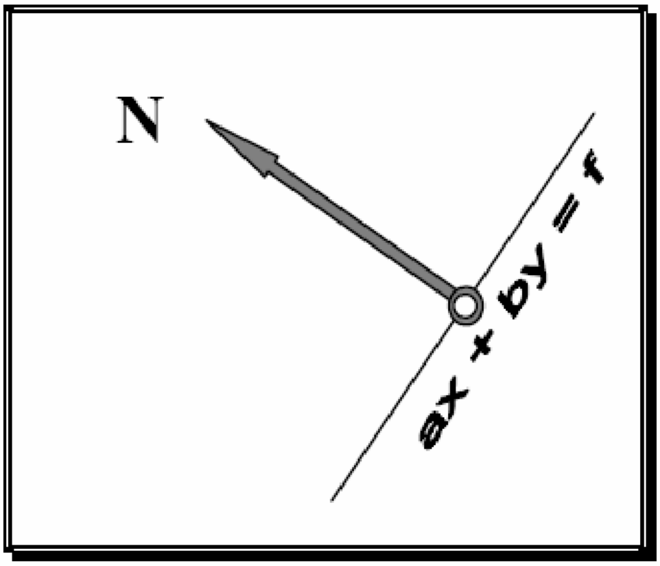


Искомая полуплоскость не содержит выбранной точки.

3. Множество точек, удовлетворяющих системе линейных неравенств представляет собой пересечение (общую часть) всех полуплоскостей, соответствующих каждому неравенству.

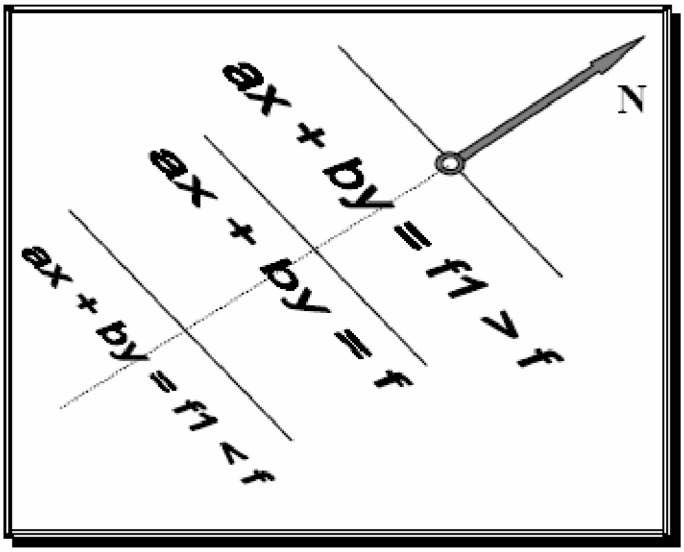


4. Нормальный вектор N прямой $ax+by=f$ задаётся коэффициентами при неизвестных x и y, т.е. $N=(a\ ;\ b)$



Свойства нормального вектора.

a) При перемещении прямой (параллельно самой себе) в направлении вектора N значение f увеличивается.
b) При перемещении прямой (параллельно самой себе) против направления вектора N значение f уменьшается.



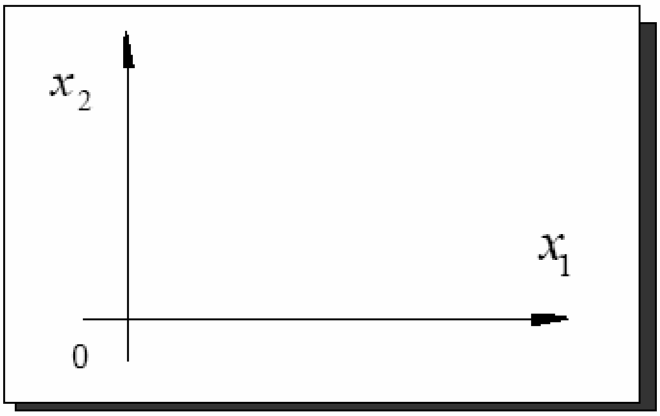
Разберём пример графического решения задачи максимизации прибыли, сформулированной ранее в задаче планирования производства продукции (см. выше задача предприятии, выпускающем о табуретки и стулья).

$$f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \le 24 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + x_2 \le 8 \end{cases}$$

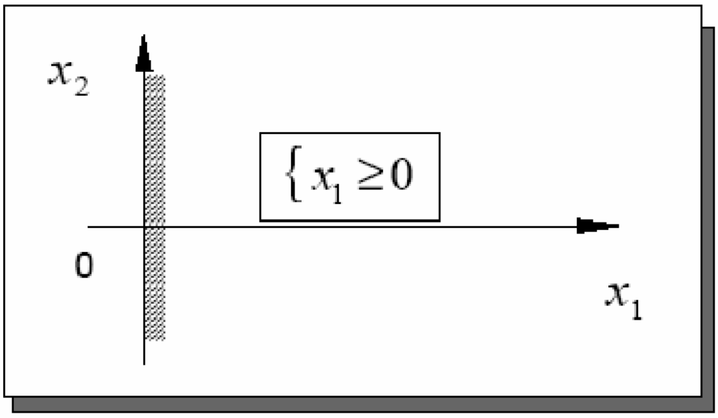
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

1. Изобразим на плоскости систему координат.

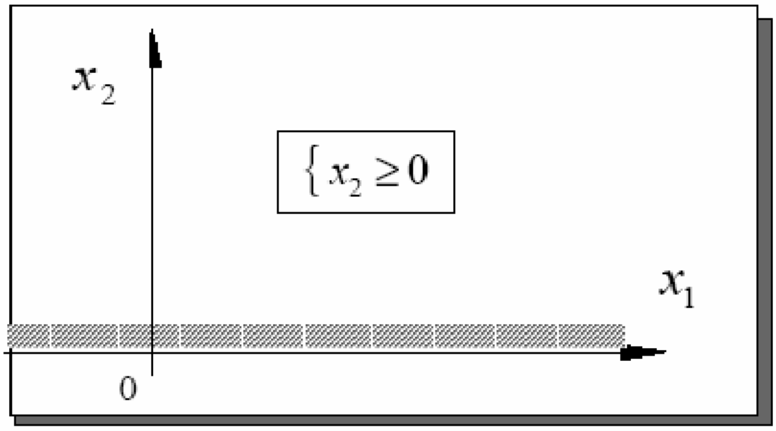


2. Рассмотрим ограничения неотрицательности.

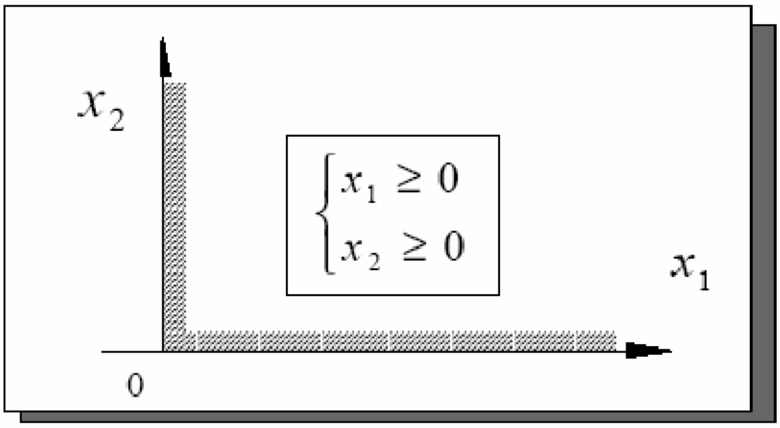
а) Неравенство определяет полуплоскость, в которой все точки имеют неотрицательную первую координату.



б) Неравенству соответствует полуплоскость, где вторая координата каждой точки неотрицательна.



в) Системе неравенств соответствует 1-я четверть.



Примечание: В дальнейшем, если заданы ограничения неотрицательности, все построения проводятся в 1-ой четверти.

3. Строим множество точек, соответствующее множеству решений системы ограничений.

   Берём первое неравенство

$$\{\ 4x_1 + 6x_2 \leq 24$$

и заменим его уравнением

$$\{\ 4x_1 + 6x_2 = 24$$

Строим прямую, соответствующую этому уравнению.

(Если она не проходит через начало координат, то удобнее всего строить эту прямую по точкам пересечения с осями координат).

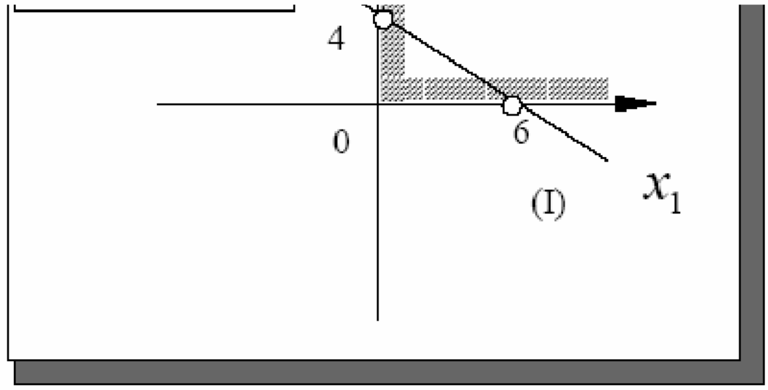
Точка пересечения

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ 4\cdot 0 + 6x_2 &= 24 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

С осью OX_2

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ 4x_1 + 6\cdot 0 &= 24 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 6 \end{cases}$$

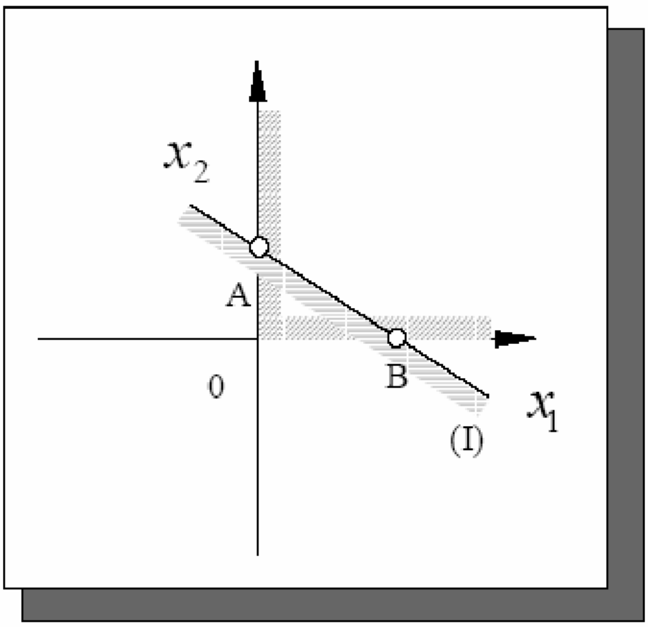
С осью OX_1



Построенная прямая разбивает плоскость на 2 полуплоскости. Для выбора полуплоскости, соответствующей нашему неравенству, возьмём на плоскости точку с известными координатами, не лежащую на прямой (пусть это будет точка (0,0) - начало координат). Подставим координаты этой точки в неравенство

$$\{4\cdot 0 + 6\cdot 0 \le 24,\quad \{0 \le 24$$

Получилось верное числовое неравенство. Значит, полуплоскость содержит выбранную для проверки точку (в данном случае 0- начало координат).



Заметим, что для проверки не обязательно брать начало координат. Главное, чтобы точка не лежала на прямой и имела известные координаты. Например, возьмём точку М с координатами (8,0). Подставляем в неравенство

$$\{4\cdot 8 + 6\cdot 0 \le 24 \Rightarrow 32 \le 24$$

Неравенство неверное. Значит, полуплоскость не содержит точку М, т.е. опять определяется та же полуплоскость.

Таким образом, в совокупности с первой четвертью текущее множество решений представляет собой треугольник ОАВ. Далее аналогично строятся полуплоскости, соответствующие остальным неравенствам, и пересекаются с текущим множеством решений.

2-е неравенство

$$3x_1 + 2x_2 \le 12 \Rightarrow 3x_1 + 2x_2 = 12$$

$$\begin{array}{l\|l} x_1 = 0 & x_2 = 0 \\ x_2 = 6 & x_1 = 4 \end{array}$$

Точка для проверки O (0,0)

$$3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \le 12 \Rightarrow 0 \le 12$$

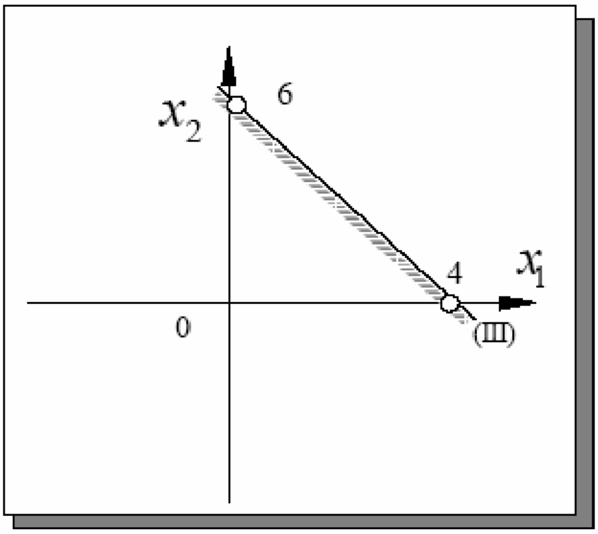
Верное неравенство. Следовательно, полуплоскость содержит точку O. Пересекаем её с предыдущим множеством. Получаем четырёхугольник OAMD.

3-е неравенство

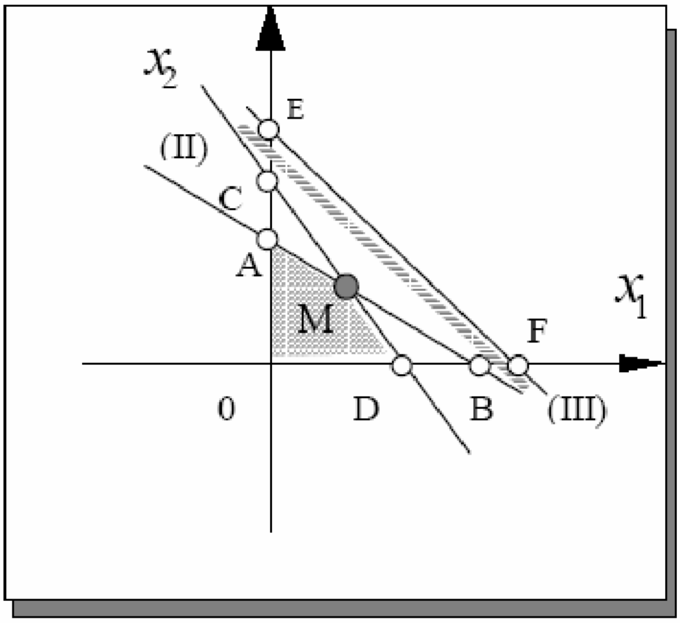
$$3x_1 + 2x_2 \le 12 \Rightarrow 3x_1 + 2x_2 = 12$$

$$\begin{array}{l\|l} x_1 = 0 & x_2 = 0 \\ x_2 = 6 & x_1 = 4 \end{array}$$

Подставляя в неравенство точку начала координат, убеждаемся, что полуплоскость содержит эту точку.

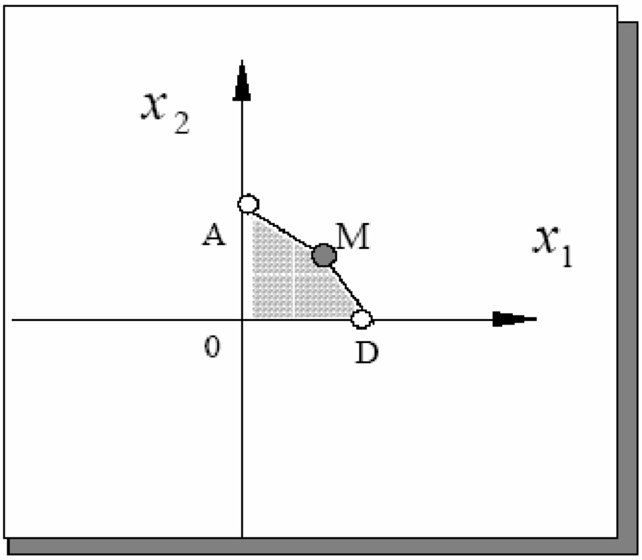


При пересечении с предыдущим множеством решений приходим к выводу, что четырёхугольник OAMD целиком содержится в данной полуплоскости.



Этот факт свидетельствует о том, что в данной задаче последнее ограничение не существенно и может быть либо отброшено, либо изменено за счёт уменьшения запаса ресурса третьего вида.

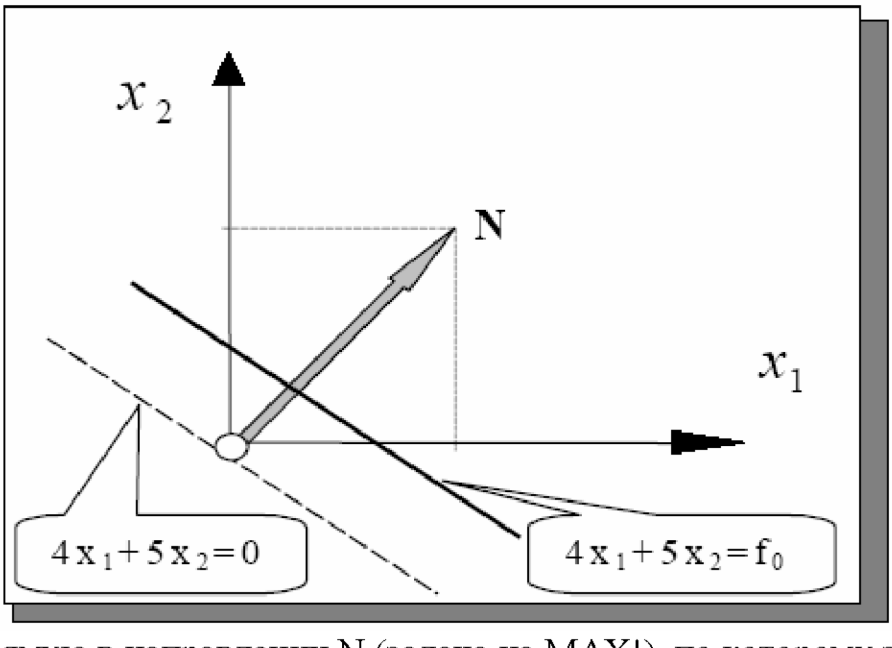
Окончательно множество решений ЗЛП представляет собой четырёхугольник OAMD.



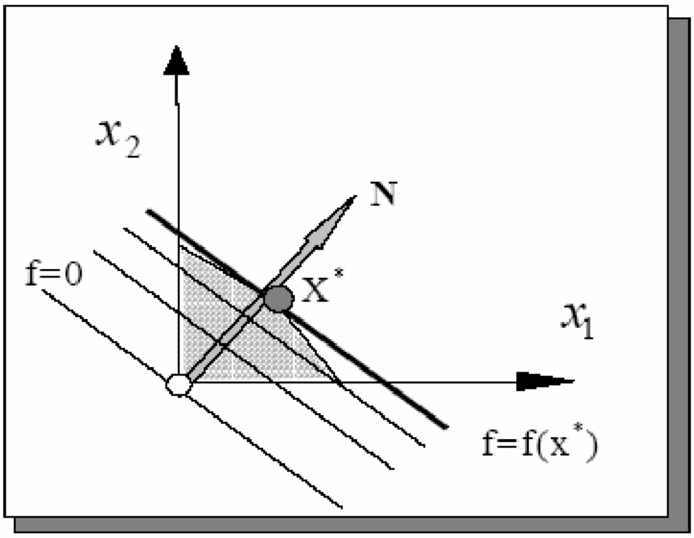
4. Займёмся отысканием в множестве решений точки, которая доставляет максимум целевой функции

$$f = 4x_1 + 5x_2$$

(эта точка будет соответствовать оптимальному решению).
а) Для этого построим нормальный вектор N = (4,5). Если придать f какое-либо конкретное значение f_0, то прямая будет проходить перпендикулярно N. (При f = 0 прямая проходит через начало координат).
Примечание: Данный вектор N показывает направление наискорейшего возрастания целевой функции, часто его называют *градиентом функции*, а вектор ему противоположный по направлению (указывающий наискорейшее убывание целевой функции) - *антиградиентом.*



б) Перемещая прямую <u>в направлении</u> N (задача на MAX!), по которому значение целевой функции возрастает, находим последнюю точку пересечения прямой и множества решений. Эта точка и будет искомым оптимальным решением.



Определяем её компоненты как координаты точки пересечения 1-й и 2-й прямых

$$-\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 12 \\ 4x_1 + 6x_2 = 24 \end{cases}\Bigg|\begin{matrix}3\\ \\ \end{matrix} \Rightarrow 5x_1 = 12 \Rightarrow x_1 = \frac{12}{5}$$

$$x_2 = \left(12 - \frac{3\cdot 12}{5}\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{12}{5}$$

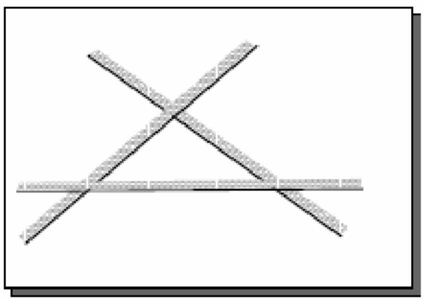
$$x^* = \left(\frac{12}{5}, \frac{12}{5}\right),\ f(x^*) = \frac{108}{5}$$

Возвращаясь к исходной экономической задаче, можно заключить, что наиболее выгодно выпускать табуретки и стулья в одинаковом количестве.

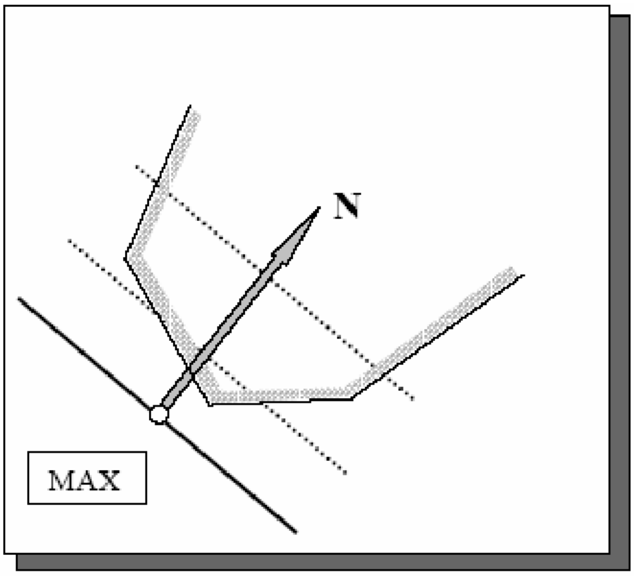
Проиллюстрируем теперь различные случаи разрешимости и неразрешимости ЗЛП.

ЗЛП неразрешима (не имеет оптимального решения)

a) Из-за несовместимости системы ограничений, т.е. система не имеет ни одного решения.



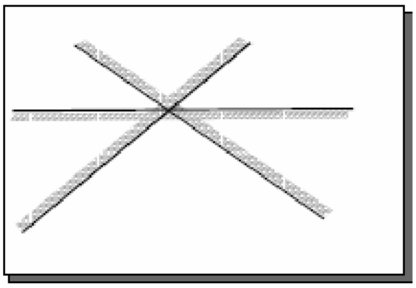
b) Из-за неограниченности целевой функции на множестве решений. (В этом случае множество решений обязательно неограниченно.)Другими словами при решении ЗЛП на max значение целевой функции стремится к бесконечности, а в случае ЗЛП на min - к минус бесконечности.



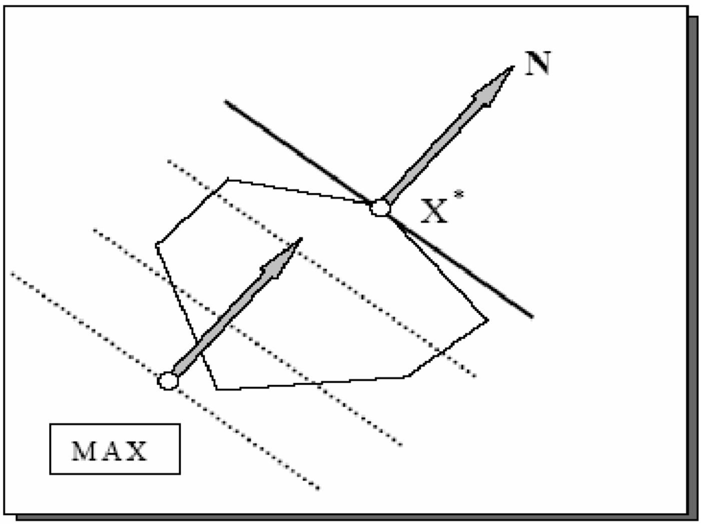
Вектор N направлен в сторону неограниченности множества решений (при решении задачи на MAX). Поэтому прямую можно перемещать до бесконечности, не достигнув последней точки пересечения.

ЗЛП разрешима

a) Множество решений состоит из одной точки. Она же и является оптимальной.



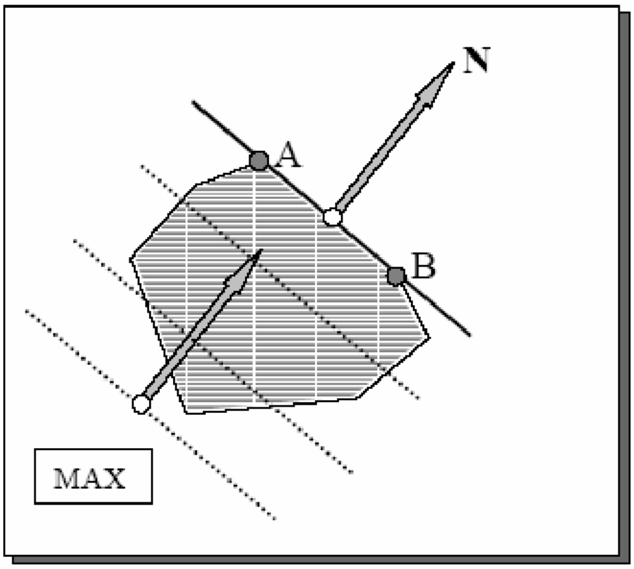
b) Единственное оптимальное решение ЗЛП.



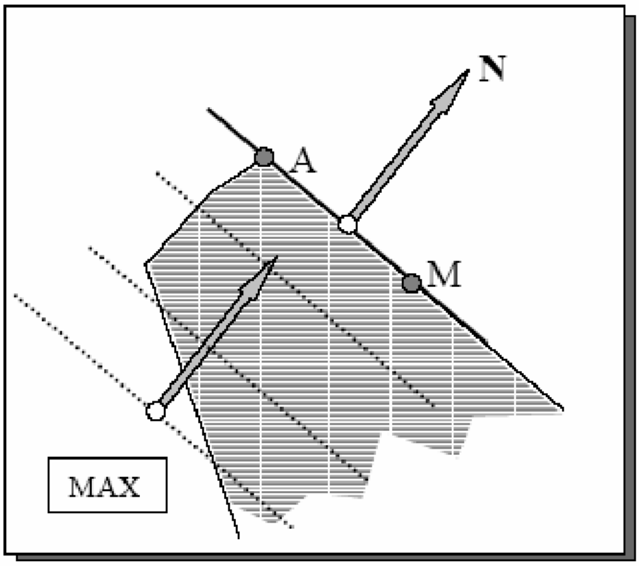
Прямая, соответствующая целевой функции в предельном положении пересекается с множеством решений в одной точке.

c) Оптимальное решение ЗЛП не единственно.

Вектор N перпендикулярен к одной из сторон множества решений. В этом случае оптимальной является любая точка на отрезке AB.



Здесь оптимальными решениями являются точка А и любая точка луча АМ.



Графически также могут быть решены ЗЛП и с большим числом переменных, если их удаётся свести к ЗЛП с двумя переменными и ограничениями-неравенствами. Например, ЗЛП.

$$f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max$$

$$(*)\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 12 \\ 5x_1 - x_2 - 2x_4 = 8 \\ 7x_1 + 10x_2 + 7x_5 = 70 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Путём отбрасывания переменных x_3, x_4, x_5 из системы уравнений, замены их неравенствами и выражения отбрасываемых переменных в целевой функции через x_1 и x_2, задача может быть приведена к виду

$$f = x_1 + x_2 + \frac{1}{5}(12 - 2x_1 - 4x_2) - \frac{1}{2}(8 - 5x_1 + x_2) + \frac{1}{7}(70 - 7x_1 - 10x_2) \to \max$$

$$(**)\begin{cases} 5x_1 - x_2 \geq 8 \\ 7x_1 + 10x_2 \leq 70 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

После графического решения (**) x_3, x_4, x_5 определяются из (*).

Задача 1.

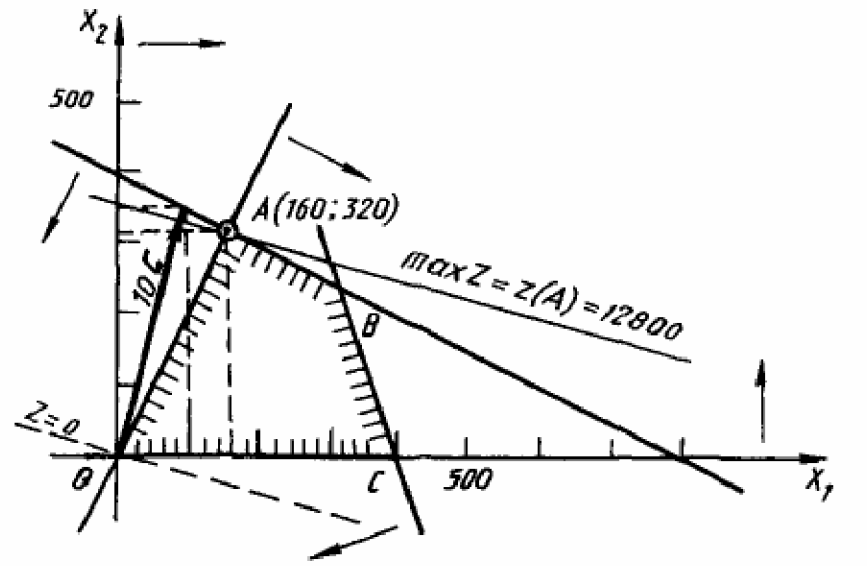
Цех выпускает два вида продукции, используя два вида полуфабрикатов. Продукция используется при комплектовании изделий, при этом на каждую единицу продукции первого вида требуется не более двух единиц продукции второго вида. Нормы расхода a_{ij} полуфабрикатов каждого вида на единицу выпускаемой продукции, общие объёмы полуфабрикатов b_i, и прибыль c_j от единицы каждой продукции представлены в таблице. Определить план производства, доставляющий максимум прибыли.

Полуфабрикаты	Нормы затрат на единицу продукции		Объем полуфабриката
	$П_1$	$П_2$	
I	1	2	800
II	6	2	2400
Прибыль	10	35	

Решение.

Пусть $\mathbf{x} = (x_1; x_2)$ - план задачи. Тогда модель задачи: $\max Z = 10x_1 + 35x_2$ при ограничениях на полуфабрикаты $x_1 + 2x_2 \leqslant 800$, $6x_1 + 2x_2 \leqslant 2400$, условии комплектности $2x_1 \geqslant x_2$ и неотрицательности переменных $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$.

Построим соответствующие данным ограничениям-неравенствам граничные прямые $x_1 + 2x_2 = 800$, $6x_1 + 2x_2 = 2400$, $2x_1 - x_2 = 0$, определим полуплоскости, в которых выполняются эти неравенства.



Для этого достаточно взять произвольную точку, не лежащую на граничной прямой, и подставить её координаты в неравенство. Для первых двух неравенств возьмём, например, начало координат O(0;0). Получим истинные утверждения $(0 \leqslant 800,\ 0 \leqslant 2400)$. Следовательно, первые два неравенства выполняются в полуплоскостях, содержащих точку O. Граничная прямая, соответствующая третьему неравенству, проходит через начало координат. Значит, нужно взять, например, точку (0;10). Получаем ложное утверждение $(0 \geqslant 10)$. Следовательно, третьему неравенству удовлетворяют точки полуплоскости, не содержащей пробной точки (0;10).

Поскольку $x_1 \geqslant 0$ и $x_2 \geqslant 0$, областью допустимых решений является четырёхугольник OABC. Далее надо построить градиент функции (вектор C). В нашем примере для наглядности построен вектор (100;350). Перпендикулярно к этому вектору проводим линию уровня Z = 0. Параллельным перемещением прямой Z = 0 находим точку A, в которой целевая функция достигает максимума.

Решая совместно уравнения граничных прямых AB и OA, находим координаты точки A: $x_1^* = 160,\ x_2^* = 320.$ При этом

$$Z^* = \max Z = z(A) = 12\,800.$$

Итак, по оптимальному плану следует выпускать 160ед. продукции $П_1$ и 320 ед.продукции $П_2$, что при принесёт в 12800рублей.

Задача 2.

Найти оптимальное решение:

$$L(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, & (1) \\ 2x_1 + x_2 \le 8, & (2) \\ -x_1 + x_2 \le 1, & (3) \\ \quad x_2 \le 2, & (4) \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

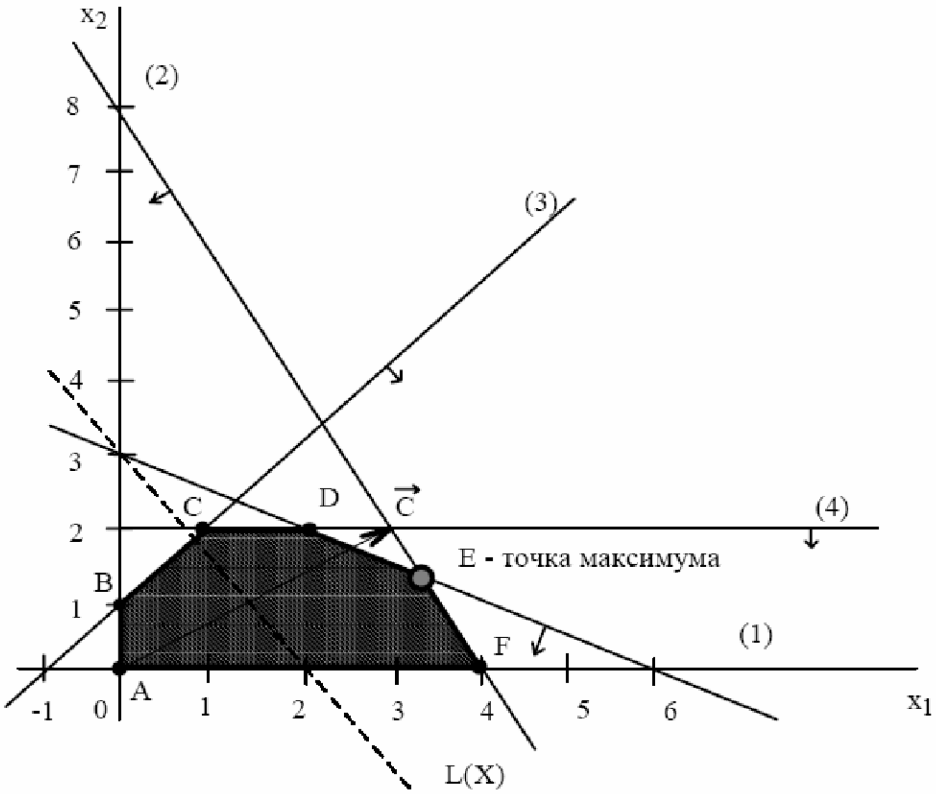
Решение.

Построим прямые ограничений, для чего вычислим координаты точек пересечения этих прямых с осями координат.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6, & (1) \\ 2x_1 + x_2 = 8, & (2) \\ -x_1 + x_2 = 1, & (3) \\ x_2 = 2. & (4) \end{cases}$$

$$(1) - \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 3, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 6, \\ x_2 = 0, \end{cases} \quad (2) - \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 8, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 = 0, \end{cases} \quad (3) - \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1, \end{cases} \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Прямая (4) проходит через точку $x_2 = 2$ параллельно оси x_1. Проведём построения.



Целевую функцию можно построить по уравнению

$$3x_1 + 2x_2 = 6,$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 3, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Точка E - это последняя вершина многоугольника ABCDEF, через которую проходит целевая прямая, двигаясь *по направлению* вектора C. Поэтому E - точка максимума целевой функции.

Определим координаты точки E из системы уравнений прямых ограничений (1) и (20

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6, & (1) \\ 2x_1 + x_2 = 8, & (2) \end{cases} \quad x_1 = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3},$$

$$E\left(3\frac{1}{3};1\frac{1}{3}\right)$$

Максимальное значение целевой функции равно $L(E) = 3\cdot\frac{10}{3} + 2\cdot\frac{4}{3} = 12\frac{2}{3}$

Задача 3.

Найти графическое решение

$$L(X) = -2x_1 - x_2 \to \min(\max)$$

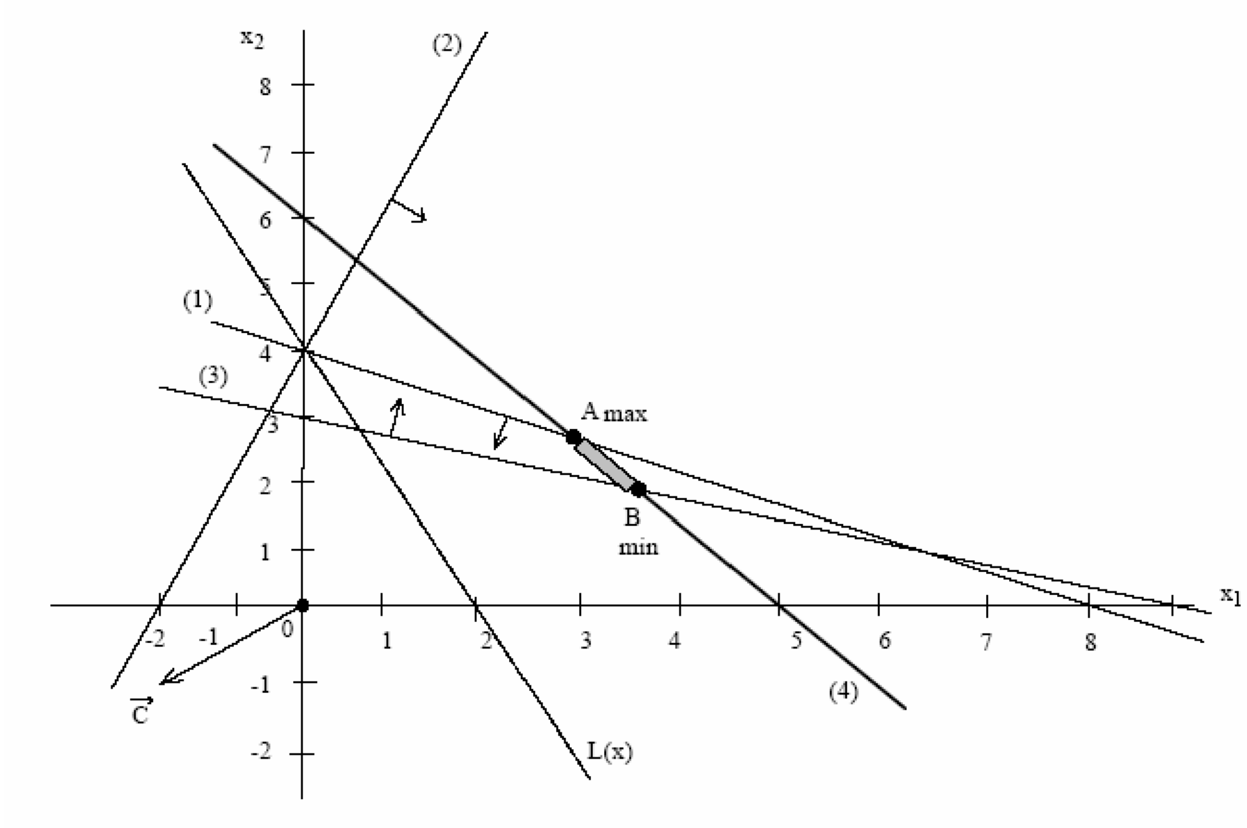
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16, & (1) \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8, & (2) \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, & (3) \\ 6x_1 + 5x_2 = 30, & (4) \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение.

Построим ограничения.

$$(1) - \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 4, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 8, \\ x_2 = 0, \end{cases} \quad (2) - \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 4, \end{cases} \begin{cases} x_1 = -2, \\ x_2 = 0, \end{cases} \quad (3) - \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 3, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 9, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

$$(4) - \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 6, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 5, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$



Целевую прямую построим по уравнению

$$-2x_1 - x_2 = -4,$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Строим вектор С из точки (0;0) в точку (-2;-1). Для поиска минимума двигаем целевую прямую *против направления* вектора С. Точка В - это последняя точка отрезка АВ, через которую проходит целевая прямая, т.е. В - точка минимума целевой функции.

Определим координаты точки В из системы уравнений прямых ограничений (3) и (4)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 9, & (3) \\ 6x_1 + 5x_2 = 30, & (4) \end{cases} \qquad x_1 \approx 3{,}46;\ x_2 \approx 1{,}85$$

Минимальное значение целевой функции равно

$$L\,(3{,}46; 1{,}85\ ) = -2 \cdot 3{,}46 - 1 \cdot 1{,}85 = -8{,}77\,.$$

При поиске точки максимума целевой функции будем двигать целевую прямую *по направлению* вектора С. Последней точкой отрезка АВ, а значит, и точкой максимума будет А. определим координаты точки А из системы уравнений прямых ограничений (1) и (4).

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 16, & (1) \\ 6x_1 + 5x_2 = 30. & (4) \end{cases} \qquad x_1 \approx 2{,}86;\ x_2 \approx 2{,}57$$

Максимальное значение целевой функции равно

$$L(2{,}86;\,2{,}57) = -2 \cdot 2{,}86 - 1 \cdot 2{,}57 = -8{,}29\,.$$

Таким образом, $B(3{,}46;\ 1{,}85)$ - точка минимума, $L_{\min}(B) = -8{,}77$; $A(2{,}86;\ 2{,}57`)$ - точка максимума, $L_{\max}(A) = -8{,}29$.