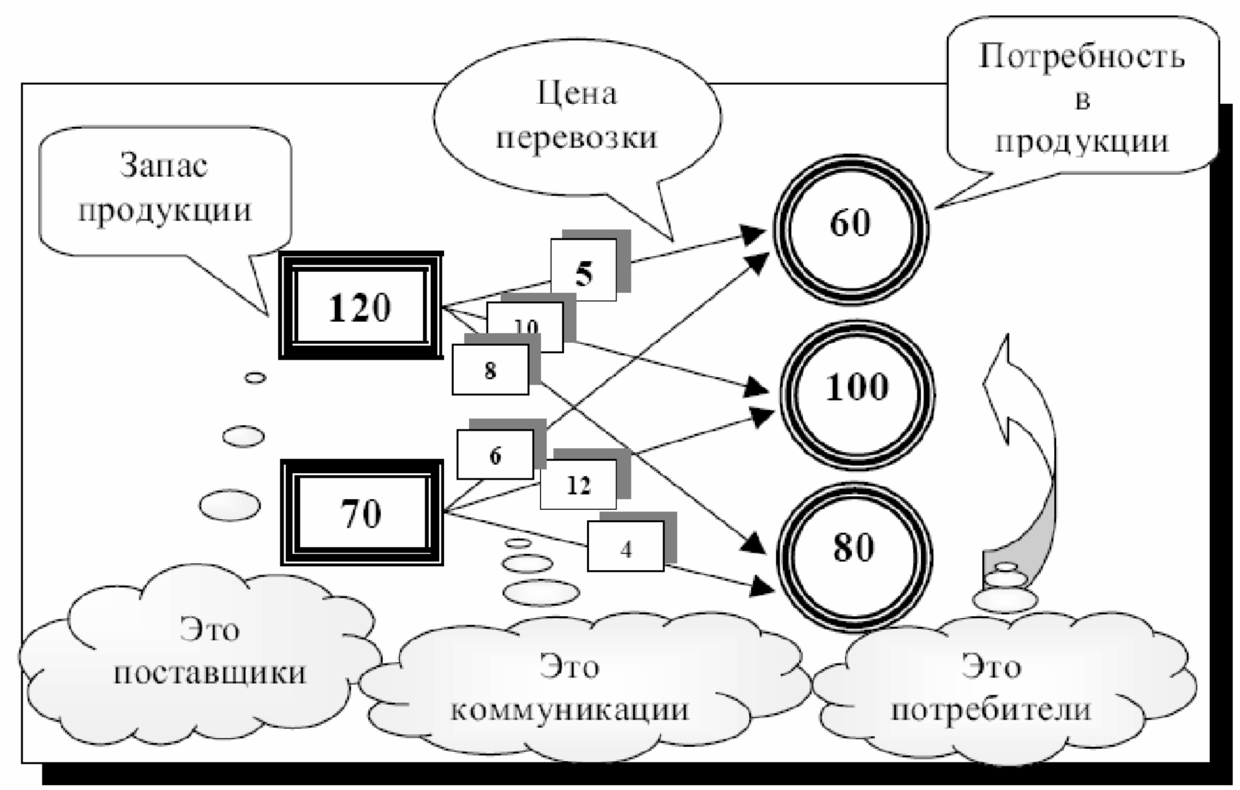
5. Специальные задачи линейного программирования.
Транспортная задача.

Постановка транспортной задачи.

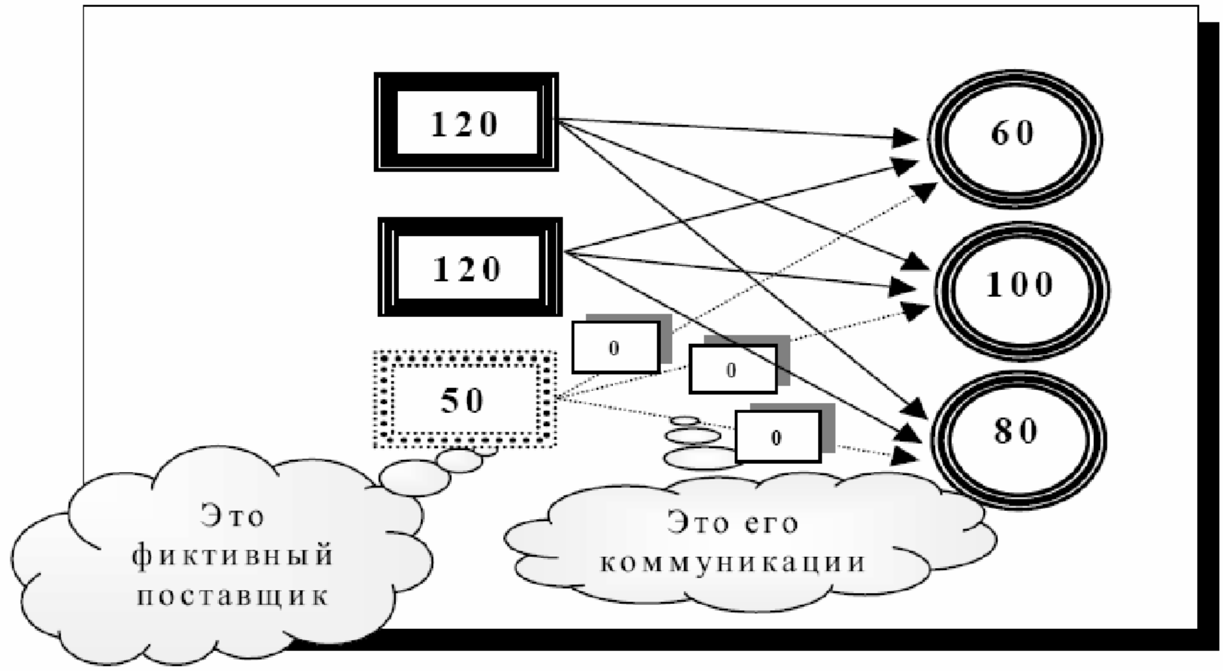
Пусть имеется несколько поставщиков однородной продукции (каждый с определённым запасом) и несколько потребителей этой продукции (с известными потребностями у каждого). Задана также сеть коммуникаций (дорог, рек, воздушных линий и т.д.), связывающая каждого поставщика с каждым потребителем. На каждой коммуникации задана цена перевозки - стоимость перевозки единицы продукции. (см. рисунок)



Если какая-либо коммуникация отсутствует, то считаем, что она есть , но цену перевозки на ней устанавливаем равной бесконечности (+ ∞). Это соглашение сделает невыгодным перевозку по ней и автоматически исключит данную коммуникацию из плана перевозок.

Требуется *составить план перевозок* продукции от поставщиков к потребителям так, чтобы *потребности потребителей были бы удовлетворены* за счет *вывоза запаса от поставщиков*. *Цель* - **минимизация суммарной стоимости всех перевозок**.

Итак, мы привели экономическую постановку транспортной задачи. Отметим один существенный момент. Если суммарный запас продукции, имеющийся у поставщика, совпадает с суммарной потребностью в продукции у потребителей, тогда транспортная задача считается **закрытой** (имеет место баланс запасов и потребностей). Если же баланс нарушается (не хватает запасов, или запасов излишек) задача называется **открытой**. Имея в виду тот факт, что метод потенциалов «работает» только для закрытых транспортных задач, изложим **способ сведения открытой транспортной задачи к закрытой**. Суть этого способа очень проста. Так, например, при нехватке запасов вводят в рассмотрение фиктивного поставщика с запасом,равным этой нехватке, и устанавливают цену перевозки от него к каждому потребителю (на фиктивных коммуникациях) равной нулю (самый выгодный поставщик!). Так, в приведённом примере суммарный запас равен 120 + 70 = 190 ед. С другой стороны суммарная потребность составляет 60 + 100 + 80 = 240 ед. Задача открытая. Имеет место нехватка продукции в количестве 240 - 190 = 50 ед. Вводим фиктивного поставщика с таким запасом. Проводим от него фиктивные коммуникации ко всем потребителям и устанавливаем на них нулевые цены. Транспортная задача становится закрытой. Аналогично, при излишке запасов вводится фиктивный потребитель, имеющий потребность, равную этому излишку. Цены на фиктивных коммуникациях, идущих к нему от всех поставщиков, устанавливают равными нулю.



Несколько слов об истолковании решения открытой транспортной задаче. Пусть в оптимальном плане перевозок потребитель получает часть продукции от «настоящих» поставщиков, а часть от фиктивного. Тогда последняя представляет собой ту часть его потребностей, которая не удовлетворяется (недопоставка продукции). В задаче же с излишком запасов та часть продукции, которая вывозится к фиктивному потребителю, есть ни что иное, как продукция, остающаяся у поставщика невывезенной.
В дальнейшем будем рассматривать только **закрытые транспортные задачи**.

Построим математическую модель транспортной задачи в виде задачи линейного программирования. Исходя из того, что план перевозок определяется указанием количества перевозимого груза по каждой коммуникации (нулевое количество, если продукция по коммуникации не перевозится), обозначим через x_{ij} количество перевозимой продукции от поставщика с номером i к потребителю с номером j (объём перевозки). В нашем примере таких неизвестных будет 3x3=9 ($x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}$). В общем случае количество неизвестных будет равно $m \times n$, где m - количество поставщиков, n - количество потребителей.

Выразим через введённые неизвестные суммарную стоимость перевозок в виде линейной функции. Для этого необходимо объём перевозки на каждой коммуникации умножить на цену перевозки и просуммировать полученные величины по всем коммуникациям. Для нашего примера имеем

$$f = 5x_{11} + 10x_{12} + 12x_{13} + 8x_{21} + 6x_{22} + 4x_{23} + 0x_{31} + 0x_{32} + 0x_{33} \to \min$$

или, используя знаки суммирования

$$f = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min$$

(цель задачи - найти минимум суммарной стоимости перевозок).

Здесь c_{ij} - элементы матрицы стоимости C

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 12 \\ 8 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

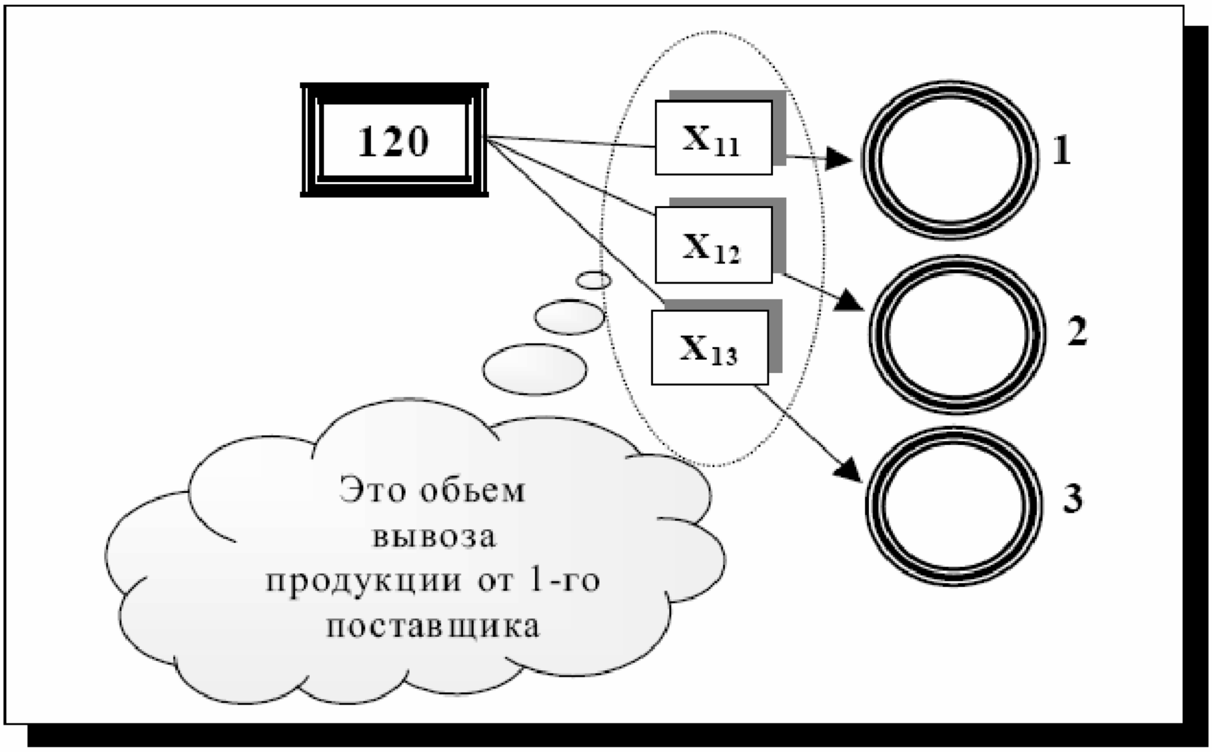
(При суммировании сначала изменяются индексы (номера) у внутренней суммы при фиксированном индексе у внешней суммы, затем изменяется на единицу индекс внешней суммы.)

Перейдём к формулировке ограничений. Как видно из экономической постановки, ограничения делятся на 2 следующие группы:

1) Условия полного вывоза продукции от каждого поставщика. (Таких условий будет столько, сколько имеется поставщиков У нас - 3).
2) Условия полного удовлетворения потребностей каждого потребителя. (Число условий равно числу потребителей (У нас - 3). Таким образом, в транспортной задаче будет $(m+n)$ ограничений (в нашем примере 3+3=6.))
Запишем ограничения первой группы. Они будут иметь структуру

$$\boxed{\text{вывоз продукции от поставщика}} = \boxed{\text{запас}}$$

Для первого поставщика имеем (см. рисунок)



$x_{11} + x_{12} + x_{13}$ - вывоз продукции ко всем поставщикам. Его запас равен 120 единиц. Условие полного вывоза имеет вид $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 120$

Аналогично выглядит ограничения по вывозу для второго и третьего поставщиков

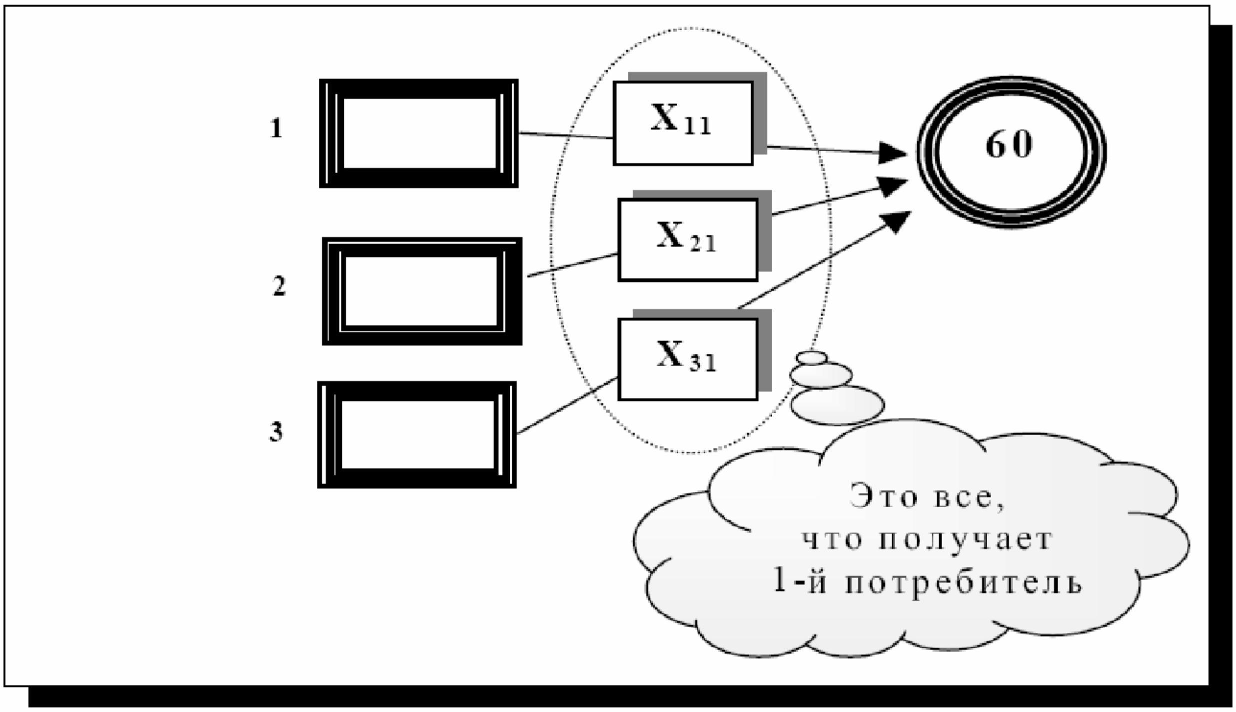
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 70$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 50$$

Ограничения второй группы можно сформулировать в виде

привоз продукции к потребителю = потребность

Привоз продукции к первому потребителю составит $x_{11} + x_{21} + x_{31}$ и ограничение примет вид $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 60$



Аналогично для второго и третьего потребителей $x_{12} + x_{22} + x_{32} = 100$, $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 80$. Окончательно, учитывая ограничения неотрицательности

$$x_{ij} \geq 0, \qquad i = 1,2,3, \qquad j = 1,2,3$$

запишем **математическую постановку транспортной задачи в виде задачи линейного программирования:**

$$f = 5x_{11} + 10x_{12} + 12x_{13} + 8x_{21} + 6x_{22} + 4x_{23} + 0x_{31} + 0x_{32} + 0x_{33} \to \min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 120 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 70 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 50 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 60 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 100 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 80 \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, \qquad i = 1,2,3, \qquad j = 1,2,3$$

Или, используя обозначения:

c_{ij} - для цен перевозок,

x_{ij} - для объёмов перевозок,

a_i - для запасов $(a_1 = 120,\ a_2 = 70,\ a_3 = 50)$,

b_j - для потребностей $(b_1 = 60,\ b_2 = 100,\ b_3 = 80)$,

m, n - для числа поставщиков и потребителей, приведём постановку транспортной задачи в виде

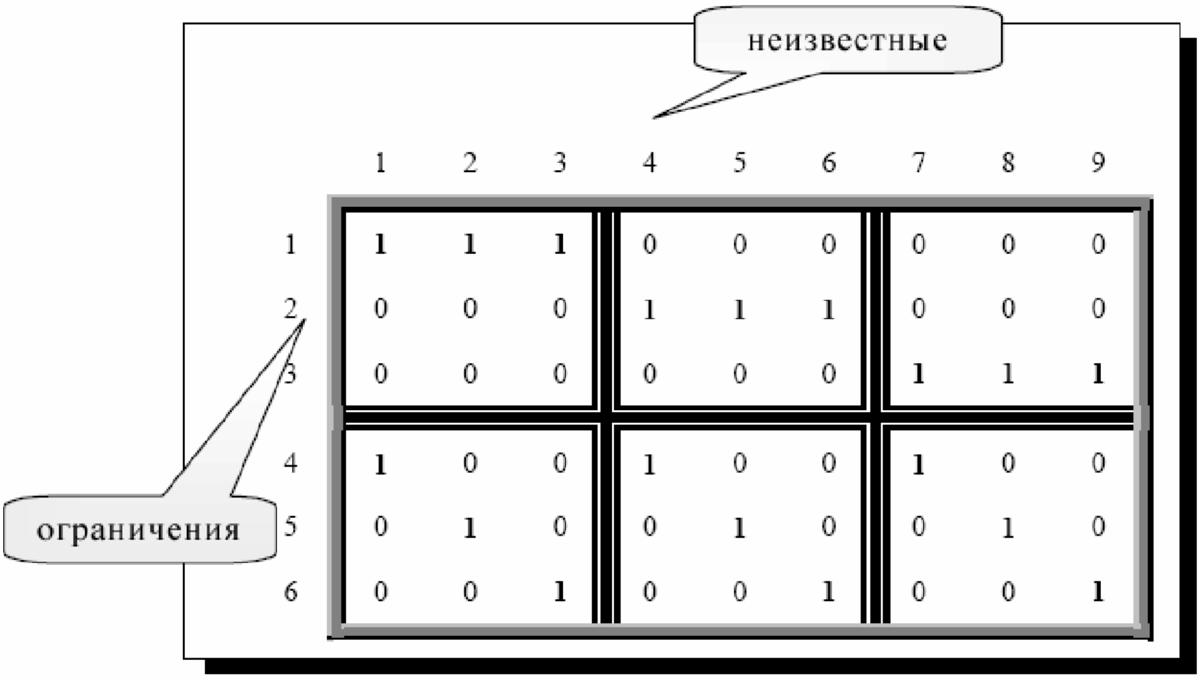
$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & , i \in 1:m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & , j \in 1:n \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, \qquad i \in 1:m, \qquad j \in 1:n$$

Метод потенциалов для решения транспортной задачи.

Коль скоро транспортная задача сформулирована в виде задачи линейного программирования, сразу появляется мысль решать её симплекс-методом. В принципе, делать это можно, но не нужно. Чтобы пояснить почему, выпишем матрицу коэффициентов системы ограничений в рассматриваемом примере. В этой матрице преобладают нулевые элементы, поэтому большинство операций при решении задачи симплекс-методом ЭВМ будет выполнять впустую, «пережёвывая» нули.



Далее, подсчитаем, как будет расти размерность симплекс-таблицы в зависимости от числа поставщиков и потребителей. Возьмём среднюю по размерам транспортную задачу с 20 поставщиками и 20 потребителями. Тогда ЗЛП будет содержать 20x20 = 400 переменных и 20 + 20 = 40 ограничений, т.е. симплекс-таблица будет содержать около

40x400 = 16000 чисел. В то же время таблица для решения транспортной задачи методом потенциалов, который будет описан ниже, содержит всего m + n = 400 чисел, что в 40 раз меньше, чем при решении симплекс-методом.

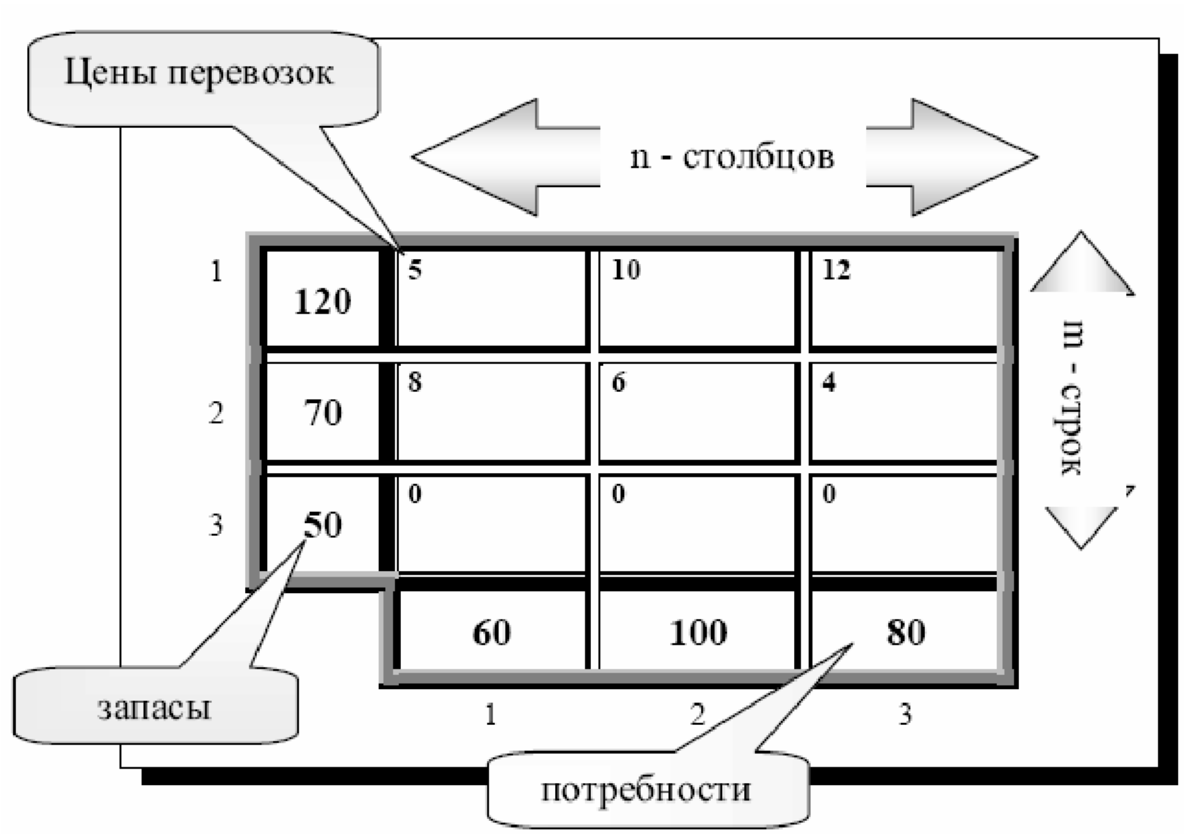
Метод потенциалов представляет собой модификацию симплекс-метода, учитывающую специфику транспортной задачи, поэтому его алгоритм не отличается от алгоритма симплекс-метода, за исключением шага проверки целевой функции на неограниченность на множестве решений. Отсутвие указанного шага в методе потенциалов обусловлено теоремой о том, что **закрытая транспортная задача всегда разрешима**. Итак, алгоритм метода потенциалов для решения транспортной задачи состоит из следующих шагов:

ШАГ 1. Построение начального плана перевозок.
ШАГ 2. Проверка текущего плана на оптимальность.
Если план оптимален, то алгоритм завершен.
ШАГ 3. Улучшение плана перевозок. Переход к шагу 1.

Опишем алгоритм по шагам, иллюстрируя каждый шаг на примере транспортной задачи, сформулированной выше.

ШАГ 0. Построение начального плана перевозок.

Построение начального решения (как и последующие расчёты) приводят в таблице, имеющей следующий вид:



Клетка (i, j) таблицы соответствует коммуникации, связывающей i-го поставщика с j-м потребителем.

Построить начальный план перевозок означает - назначить объёмы перевозок в клетки таблицы таким образом, чтобы:

a) число заполненных клеток было (m + n -1). (Тогда план перевозок будет отвечать базисному решению ЗЛП);
b) сумма перевозок в любой строке должна быть равна запасу соответствующего поставщика, а сумма перевозок в каждом столбце равна потребности потребителя. (Условие выполнения ограничений транспортной задачи).

Существует несколько способов нахождения начального решения, которые отличаются только выбором клетки, в которую назначается очередная перевозка. Так, в **способе северо-западного угла (СЗУ)** для очередного назначения перевозки выбирается левая верхняя клетка таблицы (при этом никак не учитываются цены перевозок). Наоборот, **в способе минимальной стоимости (МС)** для выполнения выбирается клетка текущей таблицы с минимальной ценой перевозки, что в большинстве случаев (но не всегда) приводит к более дешёвому (а значит и более близкому к оптимальному) начальному плану перевозок. Изложим теперь **алгоритм нахождения начального решения.**

ШАГ 1. Определённым способом (СЗУ, МС или каким-либо другим) выбираем клетку в *текущей таблице*. Пусть она имеет индексы (i, j) (i - номер поставщика, j - номер потребителя).

ШАГ 2. В качестве перевозок в эту клетку назначаем наименьшую из величин запаса a_i и потребности b_j, т.е. $x_{ij} = \min\{a_i, b_j\}$

ШАГ 3. Уменьшим запас a_i и потребность b_j на величину перевозки x_{ij}, т.е.

$$a_i' = a_i - x_{ij},$$

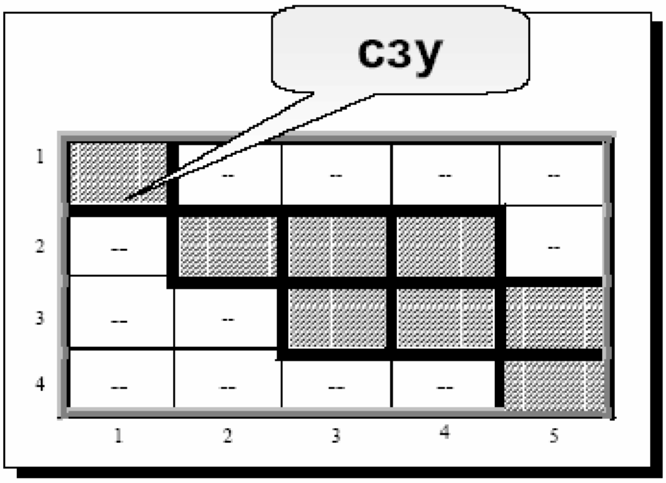
$$b_j' = b_j - x_{ij}$$

ШАГ 4. При исчерпании запаса ($a_i' = 0$)запрещаем к перевозке оставшиеся свободные клетки i-ой строки, а при исчерпании потребности ($b_j' = 0$) запрещаем такие же клетки в j-ом столбце.

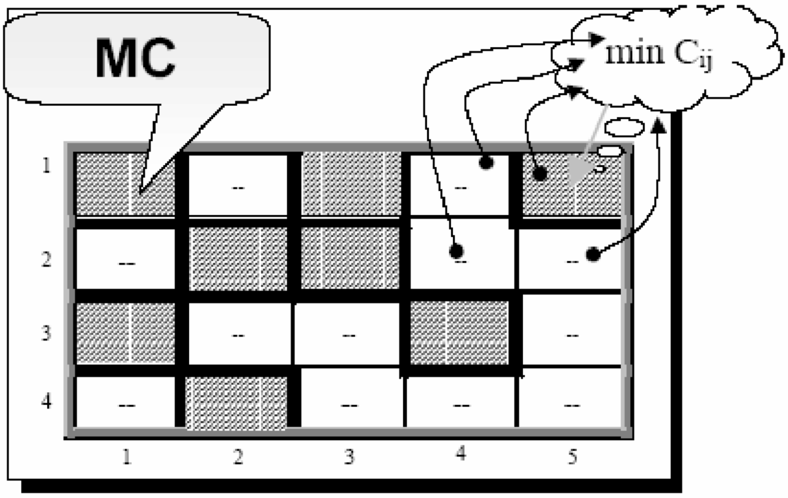
Примечание: в случае одновременного исчерпания запасов и потребностей ($a_i' = b_j' = 0$) запрещаем перевозки или в строке (тогда считаем, что у потребителя осталась потребность в количестве равном нулю, которую необходимо удовлетворить), или в столбце (в этом случае считается, что у поставщика остаётся запас равный нулю, который необходимо вывезти). Это делается для того, чтобы при одновременном запрещении перевозок в строке и столбце количество заполненных клеток таблицы не стало меньшим, чем m + n -1.

Получим новую текущую таблицу, в которую не входят заполненные и запрещённые клетки. Если таблица не пуста, переходим к ***шагу 1***. (При исчерпании таблицы - конец).

В способе СЗУ строится начальный план в виде «лесенки». Т.е. последовательно распределяются запасы очередного поставщика до их исчерпания, без учёта того, какова цена перевозок на коммуникациях.



В способе МС выбор перевозки между поставщиком и потребителем определяется самой дешёвой (на данный момент) коммуникацией.



Найдём теперь начальные планы в нашем примере способами СЗУ и МС.

Способ северо-западного угла.

1. Выбираем С-З клетку (1,1).

120	5	10	12
70	8	6	4
50	0	0	0
	60	**100**	**80**

2. Назначаем перевозку $x_{11} = \min\{120, 60\} = 60$

		1	2	3
1	**120**	60		
2	**70**			
3	**50**			
		60	**100**	**80**

3. Уменьшаем запасы 1-го поставщика и потребности 1-го потребителя на величину перевозки.

		1	2	3
1	**60**	60		
2	**70**			
3	**50**			
		×	**100**	**80**

4. Исчерпана потребность у 1-го потребителя (ему больше ничего не надо) - запрещаем перевозки в свободных клетках 1-го столбца и получаем новую текущую таблицу (без 1-го столбца). Далее (опуская пояснения) выполняем с шага 1.

		1	2	3
1	**60**	60		
2	**70**	-		
3	**50**	-		
		×	**100**	**80**

1. С-З клетка ~ (1,2)

		1	2	3
1	x	60	60	-
2	70	-		
3	50	-		
		x	40	80

2. $x_{12} = \min\{60,100\} = 60$
3. $a_1^{'} = 60 - 60 = 0, \quad b_2^{'} = 100 - 60 = 40$
4. Исчерпывается запас - запрещаем 1-ю строку. Текущая таблица не содержит 1-й строки и 1-го столбца

		1	2	3
1	x	60	60	-
2	70	-		
3	50	-		
		x	40	80

1. С-З клетка ~ (2,2)

	×	1 60	2 60	3 -
1	30	-	40	
2	50	-	-	
3		×	×	80

2. $x_{22} = \min\{70,40\} = 40$
3. $a_2^{'} = 70 - 40 = 0, \quad b_2^{'} = 40 - 40 = 0$
4. Запрещаем перевозки во 2-ом столбце
1. С-З клетка ~ (2,3)

		1	2	3
1	×	60	60	-
2	×	-	40	30
3	**50**	-	-	
		×	×	**50**

2. $x_{23} = \min\{30, 80\} = 30$
3. $a_2' = 30 - 30 = 0, \quad b_3' = 80 - 30 = 50$
4. Нужно запретить перевозки в строке 2, но там уже все клетки либо заполнены, либо запрещены.

1. С-З клетка ~ (3,2)

×	60	60	-
×	-	40	30
×	-	-	50
	×	×	×

2. $x_{33} = \min\{50, 50\} = 50$
3. $a_3' = b_3' = 0$
4. Таблица исчерпана. Конец.

Подсчитаем стоимость полученного плана. Для этого умножим объём перевозок в заполненных клетках на цены перевозок в них:

$$f_0^{СЗУ} = 60 \cdot 50 + 60 \cdot 10 + 40 \cdot 6 + 30 \cdot 4 + 50 \cdot 0 = 1260$$

Способ минимальной стоимости.

1. Клетка с минимальной ценой (3,1), (3,2) и (3,3). Выбираем, например, (3,2). (Далее все шаги, как в предыдущем способе).

		1	2	3
1	**120**	5	10	12
2	**70**	8	6	4
3	×	0 -	0 50	0 -
		60	**50**	**80**

2. $x_{32} = \min\{50,60\} = 50$
3. $a_3' = 50 - 50 = 0,\quad b_2' = 60 - 50 = 10$
4. Запрещаем строку 3.
1. Клетка с min ценой ~ (2,3).

		1	2	3
1	**120**	5	10	12
2	×	8 -	6 -	4 70
3	×	0 -	0 50	0 -
		60	**50**	**10**

2. $x_{23} = \min\{70,80\} = 70$
3. $a_2' = 70 - 70 = 0,\quad b_3' = 80 - 70 = 10$
4. Запрещаем строку 2.
1. Клетка с min ценой ~ (1,1).

		1	2	3
1	**60**	5 60	10	12
2	**×**	8 -	6 -	4 70
3	**×**	0	0 50	0 -
		×	**50**	**10**

2. $x_{11} = \min\{120{,}10\} = 10$
3. $a_1' = 120 - 10 = 110, \quad b_1' = 0$
4. В первом столбце запрещать уже нечего. Текущая таблица содержит две клетки (1,2) и (1,3).
1. Выбираем клетку (1,2).

		1	2	3
1	**10**	5 60	10 50	12
2	**×**	8 -	6 -	4 70
3	**×**	0 -	0 50	0 -
		×	**×**	**10**

2. $x_{12} = \min\{110{,}100\} = 100$
3. $a_1' = 110 - 100 = 10, \quad b_1' = 0$
4. Текущая таблица содержит одну клетку (1,3).
1. Выбираем последнюю клетку (1,3).

		1	2	3
1	×	(5) 60	(10) 50	(12) 10
2	×	(8) -	(6) -	(4) 70
3	×	(0) -	(0) 50	(0) -
		×	×	×

2. $x_{13} = \min\{10,10\} = 10$
3. $a_1^{'} = b_3^{'} = 0$
4. Таблица исчерпана. Конец.

Стоимость полученного плана составит

$$f_0^{MC} = 600 \cdot 5 + 50 \cdot 10 + 10 \cdot 12 + 70 \cdot 4 + 50 \cdot 0 = 1200$$

Это на 60 единиц меньше стоимости начального плана, найденного способом СЗУ. Однако, если выбрать на первом шаге вместо клетки (3,2), клетку (3,1), это приведёт к более дорогому начальному плану, чем в способе СЗУ. Предлагаю убедиться в этом самостоятельно.

• Отдельно разберём пример нахождения начального плана перевозок в задаче, где имеет место вырожденный случай (одновременное исчерпание запасов и потребностей на некотором шаге). Пусть исходные данные транспортной задачи, записанные в таблицу, имеют следующий вид:

		1	2	3
1	**100**	(7)	(4)	(8)
2	**80**	(9)	(12)	(6)
3	**90**	(2)	(6)	(11)
		100	**120**	**50**

Воспользуемся, например способом СЗУ.

1. С-З клетка ~ (1,1).

		1	2	3
1	**100**	7	4	8
2	**80**	9	12	6
3	**90**	2	6	11
		100	**120**	**50**

2. $x_{11} = \min\{100,100\} = 100$

3. $a_1' = \quad b_1' = 0$

Одновременно исчерпались запасы и потребности

×	100		-
80	-		
90	-		
	×	120	50

×	100	-	-
×	-	80	-
×	-	40	50
	×	×	×

Легко убедиться в том, что, если запретить перевозки одновременно в свободных клетках 1-ой строки и 1-го столбца, то придём к плану перевозок, содержащему менее чем m + n = 5 заполненных клеток. Поэтому будем для определённости, считать, что у первого поставщика имеется запас в количестве равном нулю. Тогда придём к таблице:

Далее, действуя как обычно, распределяем перевозку равную нулю в С-З клетку (1,2) и окончательно получим

1	**0**	100		
2	**80**	-		
3	**90**	-		
		×	**120**	**50**

×	100	0	-
80	-		
90	-		
	×	**×**	**×**

×	100	0	-
×	-	80	
×	-	40	50
	×	**×**	**×**

Полученный план перевозок имеет уже 5 заполненных клеток.
Переходим к описанию следующего шага метода потенциалов.

ШАГ 1. Проверка текущего плана на оптимальность.

Признаком того, что текущий план перевозок является оптимальным, служит условие (У$_1$) $u_i + v_j - c_{ij} \le 0$

которое выполняется для всех клеток таблицы. Неизвестные здесь величины u_i и v_j (называемые потенциалами) определяются из условий

(У$_2$) $u_i + v_j = c_{ij}$ (для заполненных клеток $(i\ ,\ j)$ таблицы).

Поясним экономический смысл потенциалов. Введём обозначение $u_i' \stackrel{\Delta}{=} -u_i$. Тогда u_i' можно трактовать, как цену единицы продукции у поставщика, а $v_j = u_i' + c_{ij}$ (см. (У$_2$)) как цену единицы продукции у потребителя, которая возросла на цену перевозки. Условие (У1)

$$v_j \le u_i' + c_{ij}$$

означает невозможность появления «спекулятивной» цены. Само же название «потенциалы» заимствовано из физического закона о том, что работа по перемещению заряда в электростатическом поле равна разности потенциалов в данных точках поля (у нас: «… цена перевозки единицы продукции по коммуникации равна разности цен в конце и в начале пути»).

Так как заполненных клеток в таблице $(m+n-1)$ штук, а неизвестных и $(m+n)$ штук, то для их определения имеется система из $(m+n-1)$ уравнений относительно $(m+n)$ неизвестных. Чтобы найти решение (хотя бы какое-нибудь) такой системы, достаточно положить одно из неизвестных (произвольное) равным некоторому произвольно выбранному числу. Тогда остальные определяются единственным образом. Можно решать эту систему непосредственно (продолжая работать с нашим «старым» примером и найдём потенциалы для начального плана, построенного способом МС).

Заполненные клетки	Уравнения
(1, 1)	$u_1 + v_1 = 5$
(1, 2)	$u_1 + v_2 = 10$
(1, 3)	$u_1 + v_3 = 12$
(2, 3)	$u_2 + v_3 = 4$
(3, 2)	$u_3 + v_2 = 0$

Положим, например, неизвестное u_1 равным 0 (через него можно из первых трёх уравнений определить v_1, v_2 и v_3). Последовательно имеем:

$u_1 = 0$ ⇒ Из 1-го урав. $v_1 = 5$

Из 2-го урав. $v_2 = 10$ → Из 5-го урав. $u_3 = 4 - 10 = -6$

Из 3-го урав. $v_3 = 12$ → Из 4-го урав. $u_2 = 4 - 12 = -8$

Но лучше определять u и v непосредственно в таблице, используя для их хранения клетки, где ранее записывались запасы и потребности. Предварительно перепишем условия (Y1) в дух эквивалентных формах записи

$$(**) \qquad u_i = c_{ij} - v_j$$

$$(***) \qquad v_j = c_{ij} - u_i$$

Их

НЕИЗВЕСТНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ НАХОДИТСЯ ВЫЧИТАНИЕМ ИЗВЕСТНОГО ИЗ ЦЕНЫ ПЕРЕВОЗКИ В ЗАПОЛНЕННОЙ КЛЕТКЕ

Применим это правило для определения u и v в нашем примере.

В качестве потенциала, который полагается равным некоторому числу (у нас нулю) выбираем тот, который соответствует строке или столбцу с максимальным числом заполненных клеток (это позволит сразу определить максимальное число неизвестных потенциалов через него). В данном случае таким потенциалом является u_1 (в первой строке все клетки заполнены).

u_1	**0**	60	50	10
u_2		-	-	70
u_3		-	50	
		5	**10**	**12**
		v_1	v_2	v_3

По правилу в форме (***) определяем $v_1 = c_{11} - u_1 = 5 - 0 = 5$, $v_2 = 10 - 0 = 10$, $v_3 = 12 - 0 = 12$.

Теперь переходим к найденным потенциалам (v_1, v_2, v_3) и ищем в соответствующих им столбцах (1,2,3) <u>заполненные клетки</u>, которые отвечают неизвестные потенциалы. В первом столбце таких клеток нет. Во втором столбце - это клетка (3,2). Применяя правило в виде (**), находим $u_3 = 0 - 10 = -10$.

В третьем столбце находим заполненную клетку (2,3), которой соответствует неизвестный пока потенциал u_2. Определяем u_2 через v_3 и c_{23} и $u_2 = 4 - 12 = -8$ и тем самым завершаем определение системы потенциалов.

u_1	**0**	5 60	10 50	12 10
u_2		-	-	70
u_3	**-10**	-	0 50	
		5	**10**	**12**
		v_1	v_2	v_3

Переходим к проверке условий оптимальности (Y_2). Достаточно проверять их для незаполненных клеток, так как из (Y_1) следует, что для клеток заполненных эти условия выполняются как равенства. Для проверки берётся незаполненная клетка, складываются соответствующие ей потенциалы (первый элемент строки и последний элемент столбца) и из них вычитается цена перевозки в данной клетке. Если полученное число отрицательное (или ноль), то оптимальность в данной клетке не нарушается (в случае выполнения условия (Y_2) для всех незаполненных клеток, имеем оптимальный план перевозок). Если же в таблице встретилась хотя бы одна клетка, для которой это число положительно, тогда решение не является оптимальным и может быть улучшено. Проверим на оптимальность имеющееся решение.

Клетки	Условия оптимальности
(2 , 1)	$u_2 + v_1 - c_{21} = -8 + 5 - 8 = -11 < 0$
(2 , 2)	$u_2 + v_2 - c_{22} = -8 + 10 - 6 = -4 < 0$
(3 , 1)	$u_3 + v_1 - c_{31} = -10 + 5 - 0 = -5 < 0$
(3 , 3)	$\boxed{u_3 + v_3 - c_{33} = -10 + 12 - 0 = 2 > 0}$

Условие оптимальности нарушено в клетке (3,3). Следовательно, имеющийся план перевозок можно улучшить.

Дадим описание заключительного шага алгоритма метода потенциалов.

ШАГ 2. Улучшение плана перевозок.

Улучшение плана происходит путём назначения перевозки $\theta > 0$ в ту клетку $(i\ ,\ j)$ таблицы, в которой нарушилось условие оптимальности. Но назначение ненулевой перевозки нарушает условия баланса вывоза продукции от поставщика i (вывозит весь запас и ещё плюс $\theta > 0$) и условия баланса привоза продукции к потребителю j (получает всё что можно и ещё плюс $\theta > 0$). Условия баланса восстанавливают путём уменьшения вывоза от i-поставщика к какому-то другому потребителю j (уменьшают на θ перевозку в какой-то заполненной клетке $(i\ ,\ j)$ строки i). При этом нарушается баланс привоза продукции к потребителю j (получаем на θ меньше, чем ему требуется). Восстанавливают баланс в столбце j, тогда он нарушается в некоторой строке I и т.д. до тех пор, пока цикл перемещения перевозок не замкнётся на клетке, в которой нарушилось условие оптимальности. Продемонстрируем эти рассуждения на нашем примере.

1. Оптимальность нарушена в клетке (3,3). Назначим в неё перевозку $\theta > 0$ ($+\theta$ означает, увеличение на θ).

		1	2	3
1	**120**	60	50	10
2	**70**	-	-	70
3	**50**	-	50	● $+\Theta$
		60	**100**	**80**

2. Нарушается баланс вывоза от поставщика 3 (вывоз $50+\theta$, а это больше его запаса!). <u>Уменьшаем на θ перевозку в заполненной клетке</u> строки 3 (в незаполненной уменьшать нельзя, так как это приведёт к отрицательной перевозке). Баланс в строке восстановлен.

		1	2	3
1	**120**	60	50	10
2	**70**	-	-	70
3	**50**	-	50 - Θ	+ Θ
		60	**100**	**80**