4. Нахождение решения задачи линейного программирования. Метод искусственного базиса.

В рассмотренном ранее примере столбцы матрицы ограничений при дополнительных переменных x_3, x_4, x_5 образовывали единичную матрицу

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; A_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; A_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; A_Б = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Выбирая дополнительные переменные в качестве базисных легко получить начальное базисное решение $x_3 = 24$, $x_4 = 12$, $x_5 = 8$ - значения базисных переменных равны соответствующим элементам вектора правой части в системе ограничений; $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ - значения небазисных переменных равны нулю; и заполнить начальную симплекс-таблицу. В общем случае (например, для ЗЛП в стандартной форме)

$$f = x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \;\; x_4 \;\; = 4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 \;\; = 2 \end{cases} \qquad (+)$$

$$x_i \geq 0 \qquad (i \in 1:4)$$

для нахождения начального базисного решения и заполнения начальной симплекс-таблицы необходимо проделать следующее:

a) Выбрать столбцы матрицы ограничений, составляющую **квадратную** матрицу (их число должно быть равно числу ограничений).

Например

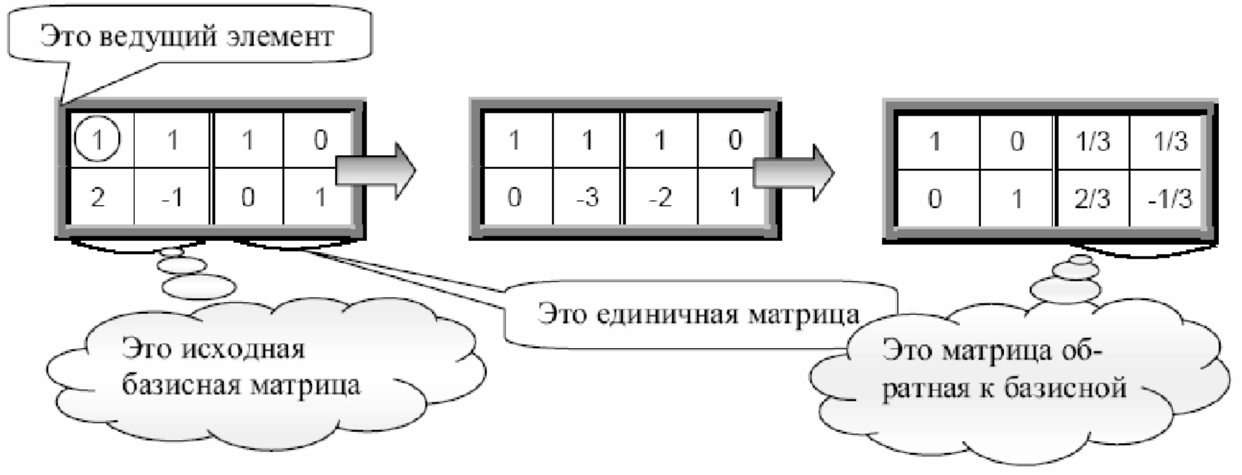
$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \; A_Б = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad (\,*\,)$$

или

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \; A_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \; A_Б = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (\,**\,)$$

b) Убедиться в том, что они (выбранные столбцы) образуют базис (путём нахождения обратной матрицы), либо установить их линейную зависимость.

Так, столбцы A_2 и A_3 не образуют базис в силу их линейной зависимости (в данном случае они просто равны между собой), а матрица в (**) не является базисной. С другой стороны столбцы A_1 и A_2 линейно независимы (они не пропорциональны друг другу) и обратную матрицу к базисной в (*) можно найти путём приведения исходной базисной матрицы к единичной по методу полного исключения Гаусса-Жордана.



c) Найти значения базисных компонент (x_1, x_2) начального базисного решения и убедиться в его допустимости, т.е. проверить выполнение ограничений неотрицательности. Для этого необходимо умножить найденную обратную матрицу

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

на вектор правой части $b = [\ 4 \quad 2\ ]$

Перемножаются скалярно

$$\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Начальное базисное решение $X_0 = (2,\ 2,\ 0,\ 0)$ является допустимым, т.к. все его компоненты неотрицательны.

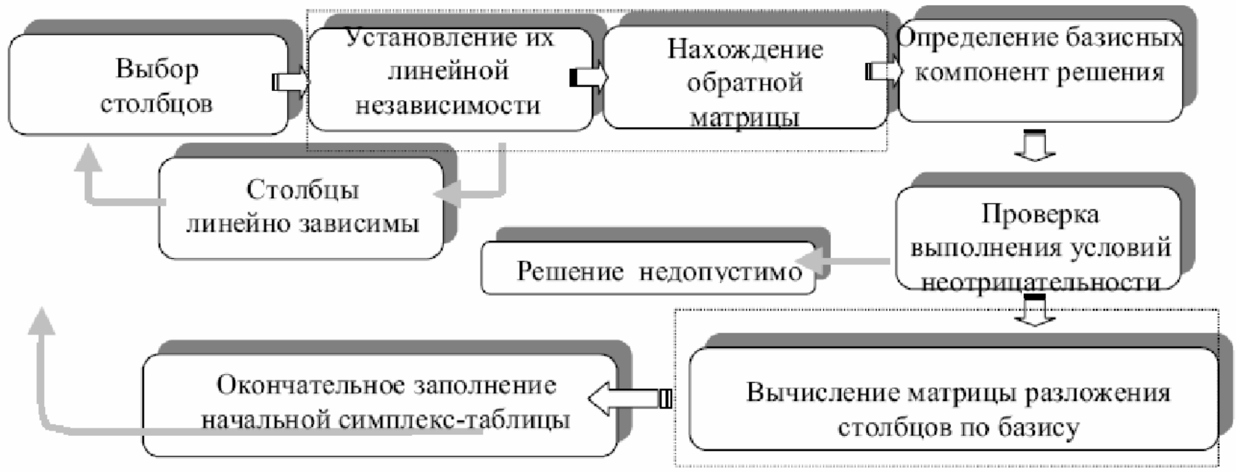
d) Перед заполнением начальной симплекс-таблицы (т.к. выбранный базис $\{A_1, A_2\}$ отличается от единичного) требуется вычислить матрицу разложения всех столбцов исходной системы ограничений по данному базису. Для этого необходимо умножить обратную матрицу B на матрицу исходной системы ограничений.,

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Далее симплекс-таблица заполняется обычным образом (см. ранее) и приобретает следующий вид:

			1	2	3	4	
$N_Б$	$C_Б$	$X_Б$	1	-2	4	6	C
1	1	2	1	0	0	1	
2	-2	2	0	1	1	0	
		0	0	0	-6	-5	Δ
		f					

Теперь текущее базисное решение может быть улучшено посредством симплекс-алгоритма. Из приведённого примера видно, что **при отсутствии единичного базиса в исходной системе ограничений ЗЛП требуется значительная вычислительная работа для выполнения нулевого шага симплекс-метода**.



Основные вычислительные действия заключены в выделенных элементах схемы. Кроме того, процесс может оказаться итерационным, т.е. потребовать повторений при выборе линейно зависимых столбцов или при получении начального решения, не являющегося допустимым (среди базисных компонент которого есть отрицательные).

Этой громоздкой процедуры можно избежать, если предварительно рассмотреть следующую вспомогательную задачу ЛП:

$$f = \qquad\qquad\qquad x_5 + x_6 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \qquad = 4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 \qquad + x_6 = 2 \end{cases} \quad \text{(i)}$$

$$x_i \ge 0 \qquad (i \in 1:6)$$

Переменные x_5 и x_6 в ЗЛП (i) носят название **искусственных** переменных. Задача (i) имеет начальное базисное решение с единичным базисом, соответствующим искусственным переменным

$$X_0^i = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 4\ ,\ 2)$$

И её целевая функция ограничена снизу нулём. А, следовательно, такая ЗЛП всегда разрешима.

Пусть $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, x_6^*)$ **оптимальное решение задачи (i), а** $g(X^*)$ **- минимальное значение целевой функции. Если при этом** $g(X^*) = 0$ **и искусственные переменные** x_5, x_6**, не входят в число базисных** **(**$x_5^* = 0, x_6^* = 0$**), то**

$$X_0 = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$$

является начальным базисным решением исходной ЗЛП (+).

Построение начальной симплекс-таблицы для ЗЛП (i) трудностей не вызывает, т.к. начальное решение имеет единичный базис.

Улучшаем данное решение в соответствии с алгоритмом симплекс-метода для ЗЛП на min (заметим, что изменяется только критерий оптимальности $\Delta_j \le 0, \quad j \in 1:6$).

			1	2	3	4	5	6	
$N_Б$	$C_Б$	$X_Б$	0	0	0	0	1	1	
5	1	2	1	1	1	1	1	0	
6	1	4	2	-1	-1	2	0	1	
		6	3	0	0	3	0	0	Δ
		f							

ШАГ 1. $\Delta_1 > 0$. Текущее решение не является оптимальным.

ШАГ 2.

$$j_0 = 1,\ \theta = \min\left\{ \frac{x_{Бi}}{A_{j_0 i}} \middle| A_{j_0 i} > 0 \right\} = \min\left\{ \frac{2}{1}, \frac{4}{2} \right\} = 2$$

ШАГ 3. Переходим к новому базисному решению с базисом {5, 1}.

			1	2	3	4	5	6
$N_Б$	$C_Б$	$X_Б$	0	0	0	0	1	1
5	1	0	0	3/2	3/2	0	1	-1/2
1	0	2	1	-1/2	-1/2	1	0	1/2
		0	0	3/2	3/2	0	0	-3/2

ШАГ 1. $\Delta_2 > 0$. Текущее решение не является оптимальным.

$$j_0 = 2,\ \theta = \min\left\{ \frac{0}{3/2} \right\} = 0$$

ШАГ 2.

ШАГ 3. Переходим к новому базисному решению с базисом {2, 1}.

-1	-2	4	6

			1	2	3	4	5	6
$N_Б$	$C_Б$	$X_Б$	0	0	0	0	1	1
2	0	0	0	1	1	0	2/3	-1/3
1	0	2	1	0	0	1	1/3	1/3
		0	0	0	0	0	-1	-1

Полученное решение ЗЛП (*) является оптимальным

Если теперь отбросить часть, относящуюся к искусственным переменным, заменить коэффициенты в целевой функции из ЗЛП (+) и пересчитать последнюю строку (значение целевой функции и оценки), то получим для улучшения начального базисного решения

$$X_0 = (2,\ 0,\ 0,\ 0)$$

исходной ЗЛП (+).

Действуем далее в соответствии с алгоритмом для задачи на максимизацию.

			1	2	3	4	
$N_Б$	$C_Б$	$X_Б$	1	-2	4	6	C
2	-2	0	0	1	1	0	
1	1	2	1	0	0	1	
		2	0	0	-6	-5	Δ
		f					

ШАГ 1. $\Delta_3 < 0$. Текущее решение не является оптимальным.

ШАГ 2. $j_0 = 3$, $\theta = \min\left\{\frac{0}{1}\right\} = 0$

ШАГ 3. Переходим к новому базисному решению с базисом $\{3, 1\}$.

			1	2	3	4	
$N_Б$	$C_Б$	$X_Б$	1	-2	4	6	C
3	4	0	0	1	1	0	
1	1	2	1	0	0	1	
		2	0	6	-6	-5	Δ
		f					

ШАГ 1. $\Delta_4 < 0$. Текущее решение не является оптимальным.

ШАГ 2. $j_0 = 4$, $\theta = \min\left\{\frac{2}{1}\right\} = 2$

ШАГ 3. Переходим к новому базисному решению с базисом $\{3, 4\}$.

			1	2	3	4	
$N_Б$	$C_Б$	$X_Б$	1	-2	4	6	**C**
3	4	0	0	1	1	0	
4	6	2	1	0	0	1	
		12	5	6	0	0	Δ
		f					

ШАГ 1. Текущее решение является оптимальным, т.к. $\Delta_j \geq 0, \quad j \in 1:4$

Если в оптимальном решении задачи (i) $g(X_*^i) > 0$**, то это соответствует неразрешимости исходной ЗЛП (+), из-за отсутствия допустимых решений.**

Действительно, если $X_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$ - допустимое решение ЗЛП (+), то $X_0^i = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, 0, 0)$ - допустимое решение ЗЛП (i). При этом $g(X_0^i) = 0 < g(X_*^i) = g_{\min}$ - противоречие !!!

Значит ЗЛП (+) не имеет ни одного допустимого решения.

В качестве примера рассмотрим ЗЛП

$$f = x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 30 \\ 6x_1 + 9x_2 + 15x_3 = 91 \end{cases} \qquad (+)$$

$$x_i \geq 0 \quad , \quad (i \in 1:3)$$

Воспользуемся методом искусственных переменных и запишем вспомогательную задачу линейного программирования.

$$f = \qquad x_4 + x_5 \qquad \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 \qquad = 30 \\ 6x_1 + 9x_2 + 15x_3 \qquad + x_5 = 91 \end{cases} \qquad (\mathrm{i})$$

$$x_i \geq 0 \qquad (i \in 1:5)$$

			1	2	3	4	5	
$N_Б$	$C_Б$	$X_Б$	0	0	0	1	1	C
4	1	30	2	3	5	1	0	
5	1	91	6	9	15	0	1	
		121	8	12	20	0	0	Δ

			1	2	3	4	5
$N_Б$	$C_Б$	$X_Б$	0	0	0	1	1
1	0	15	1	3/2	5/2	1/2	0
5	1	1	0	0	0	-3	1
		1	0	0	0	-4	0

Текущее решение является оптимальным решением задачи (i) и $g_{\min} = 1 > 0$. Следовательно, исходная ЗЛП (+) не имеет ни одного допустимого решения. Действительно, левая часть 2-го уравнения в системе ограничений ЗЛП (+) может быть получена, если 1-ое уравнение умножить на 3. Тогда имеем

$$\begin{cases} 6x_1 + 9x_2 + 15x_3 = 90 \\ 6x_1 + 9x_2 + 15x_3 = 91 \end{cases}$$

Ясно, что данная система несовместна.