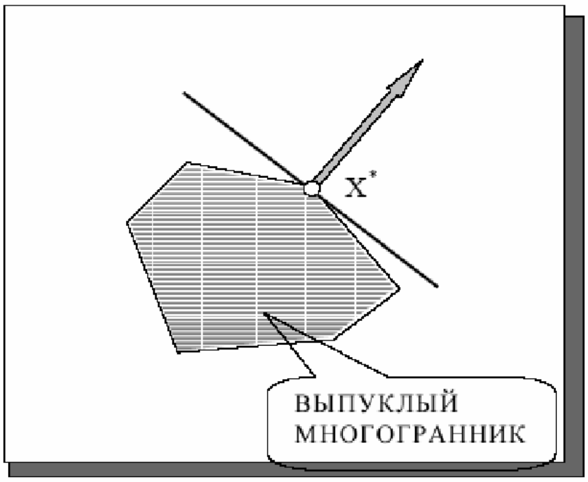
3. Нахождение решения задачи линейного программирования. Симплексный метод.

Решение любой задачи линейного программирования можно найти либо симплексным методом (методом последовательного улучшения плана), либо методом искусственного базиса. Прежде чем применять один из указанных методов, следует записать исходную задачу в форме основной задачи линейного программирования, если она не имеет такой формы записи.

Предварительные сведения

Ранее мы изучили, что множество решений ЗЛП представляет собой выпуклое многогранное множество. Оно может быть или ограниченным (в этом случае его называют выпуклым многогранником, а простейший выпуклый многогранник называется симплексом) или неограниченным.



Далее, из теории линейного программирования известны утверждения:

I. Если ЗЛП имеет оптимальное решение, то оно достигается в вершине множества решений.
II. Точка X, представляющая вершину множества решений ЗЛП, является базисным решением системы ограничений ЗЛП, записанной в виде системы линейных уравнений.

Для того, чтобы пояснить смысл понятия «базисное решение», рассмотрим способ записи ЗЛП с ограничениями-равенствами. Возьмём пример, касающийся планирования выпуска продукции предприятия - табуретки и стулья (задача на max).

$$f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \le 24 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + x_2 \le 8 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Система ограничений здесь записана в виде системы линейных неравенств. Превратим каждое из неравенств в уравнение путём введения в левую часть дополнительных переменных, равных разнице между правой и левой частью неравенств.

Например.

1-е неравенство дополнительная переменная 1-е уравнение

$$\{4x_1 + 6x_2 \le 24 \qquad x_3 = 24 - (4x_1 + 6x_2) \qquad \{4x_1 + 6x_2 + x_3 \le 24$$

2-е неравенство дополнительная переменная 2-е уравнение

$$\{3x_1 + 2x_2 \le 12 \qquad x_4 = 12 - (3x_1 + 2x_2) \qquad \{3x_1 + 2x_2 + x_4 \le 12$$

3-е неравенство дополнительная переменная 3-е уравнение

$$\{x_1 + x_2 \le 8 \qquad x_5 = 8 - (x_1 + x_2) \qquad \{x_1 + x_2 + x_5 \le 8$$

Окончательно получаем ЗЛП с пятью переменными

$$f = 4x_1 + 5x_2 \qquad \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + x_3 & = 24 \\ 3x_1 + 2x_2 \quad + x_4 & = 12 \\ x_1 + \ x_2 \qquad + x_5 & = 8 \end{cases}$$

$$x_i \ge 0 \quad (i \in 1:5) \qquad (*)$$

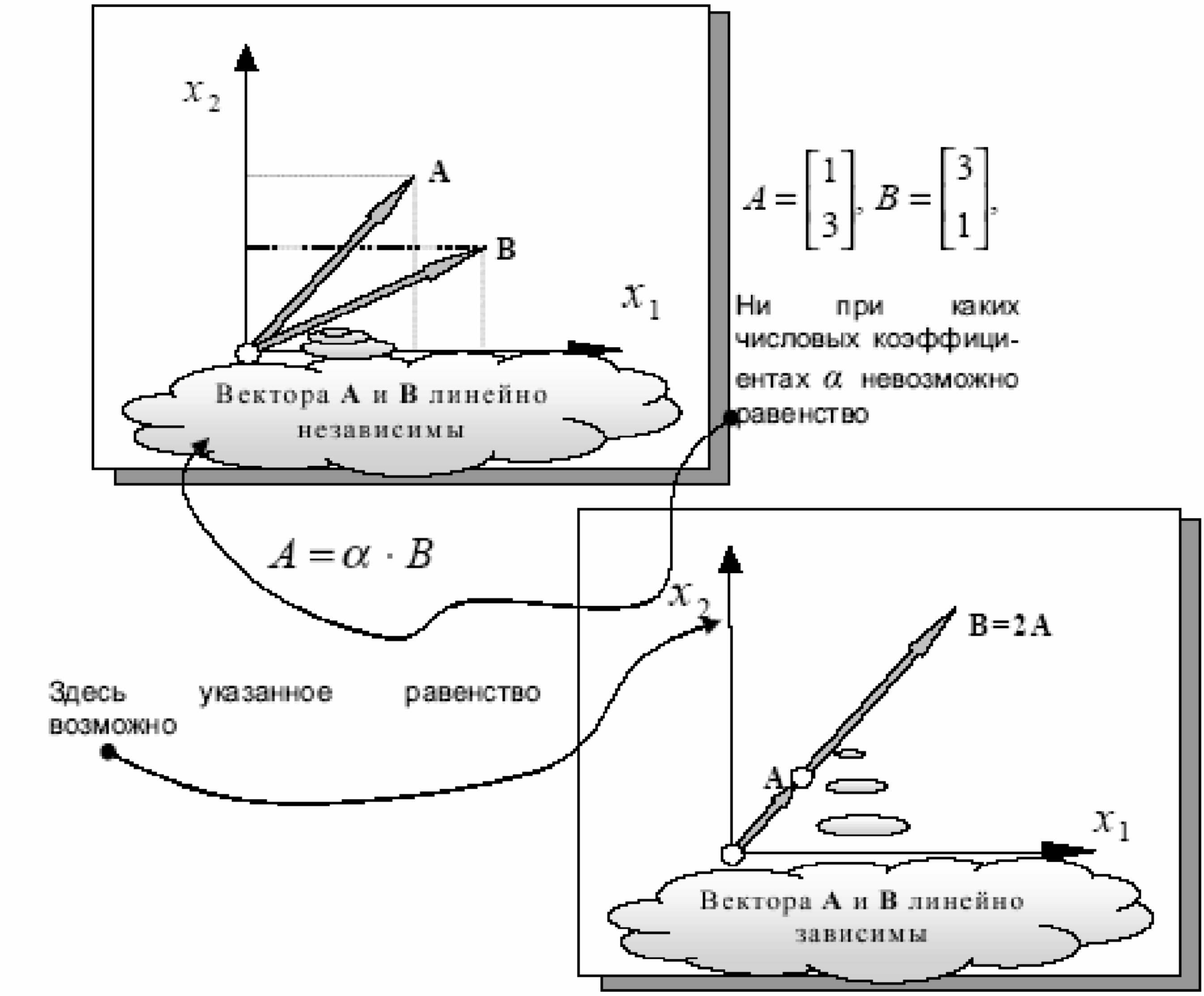
«Заплатить» за ограничения-равенства пришлось увеличением числа неизвестных (на число введённых дополнительных переменных x_3, x_4, x_5). Отсутствие дополнительных переменных в целевой функции означает, что они входят туда с коэффициентами, равными нулю. Каждой переменной в системе ограничений соответствует столбец коэффициентов.

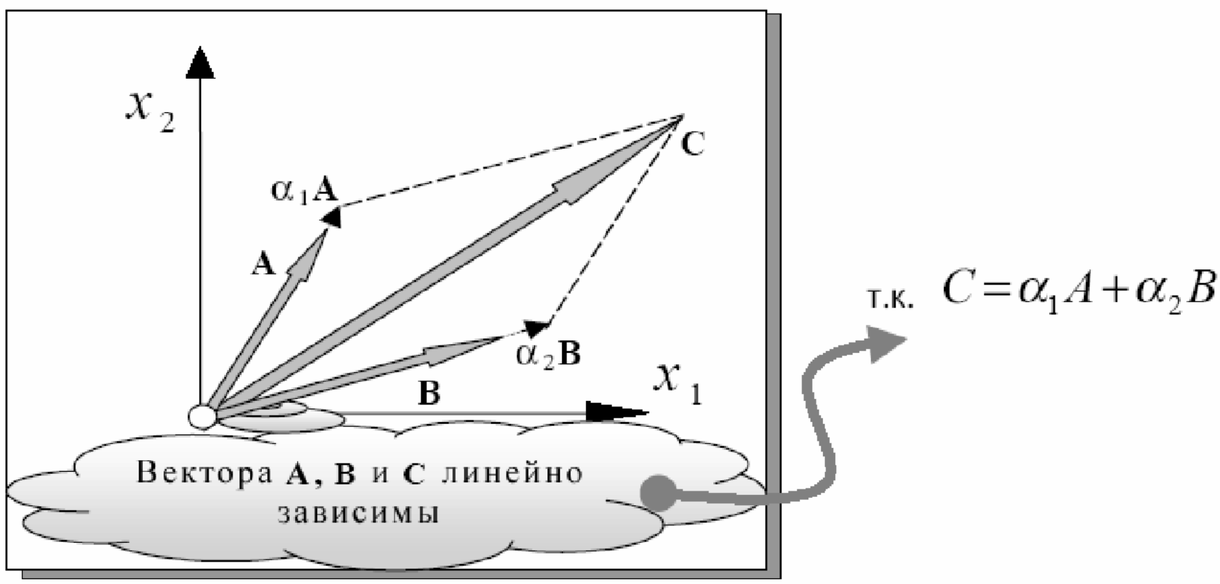
Например.

$$x_1 \sim \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2 \sim \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_3 \sim \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_4 \sim \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_5 \sim \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Если столбцы коэффициентов, соответствующие положительным значениям переменных, в решении ЗЛП образуют базис (они линейно независимы и число их равно числу уравнений), то такое решение называется базисным.

Если один из векторов набора можно выразить через остальные, то это набор линейно-независимых векторов. В противном случае вектора набора линейно независимы.





Например, решение ЗЛП (*)

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = 24, \quad x_4 = 12, \quad x_5 = 8$$

или

$$X = (0,\ 0,\ 24,\ 12,\ 8)$$

<u>будет базисным</u>, т.к. столбцы, отвечающие положительным переменным x_3, x_4, x_5

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

образуют, так называемый, *единичный базис*.

(Во-первых, эти столбцы линейно независимы, т.е. ни один из них нельзя выразить в виде линейной комбинации остальных, и, во-вторых, их число равно числу уравнений).

С другой стороны, решение $X = (1, \ 1, \ 14, \ 7, \ 6)$ не является базисным, т.к. число столбцов, отвечающих положительным неизвестным больше числа уравнений.

Ещё один пример небазисного решения

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = -1 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad (i \in 1:5)$$

Решение.

$X = (3, \ 1, \ 5, \ 0, \ 0)$ не является базисным, т.к., хотя число положительных неизвестных и равно числу уравнений, однако, отвечающие им столбцы

$$\begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \\ x_1 \sim \begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}, & x_2 \sim \begin{bmatrix}-4\\-2\\2\end{bmatrix}, & x_3 \sim \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \end{array}$$

линейно зависимы, (хотя бы потому, что второй столбец выражается через первый, т.е. $A_2 = -2A_1$ или $\begin{bmatrix}-4\\-2\\2\end{bmatrix} = -2 \cdot \begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}$).

Теперь достаточно просто оценить число базисных решений ЗЛП с m ограничениями относительно n переменных (или, что тоже самое, число вершин множества решений). Так как столбцов коэффициентов в системе n штук, а любой базис стоит из m столбцов, то максимальное число базисных решений (при условии, что любое сочетание из m столбцов образует базис и значения переменных, отвечающие им, Число вершин множества решений ЗЛП $\leq$ $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

(n! = 1· 2· 3·…(n-1)·n)

положительны) будет равно числу сочетаний из n элементов по m элементов. Или, иначе, так, для нашего примера $(n = 5, m = 3)$ множество решений содержит

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2} = 10$$

вершин.

Казалось бы, что самым простым методом решения ЗЛП является перебор всех базисных решений или вершин (ведь мы знаем, что оптимальное решение находится среди них!). И, действительно, в случае нашего примера нетрудно десять раз решить систему из трёх уравнений с тремя неизвестными (две переменные, не отвечающие базисным столбцам, полагаются равными 0). Однако уже для такой средней ЗЛП, которая имеет 20 переменных и 10 ограничений, оценка для числа базисных решений равна

$$C_{20}^{10} = \frac{20!}{10!(20-10)!} = 184756$$

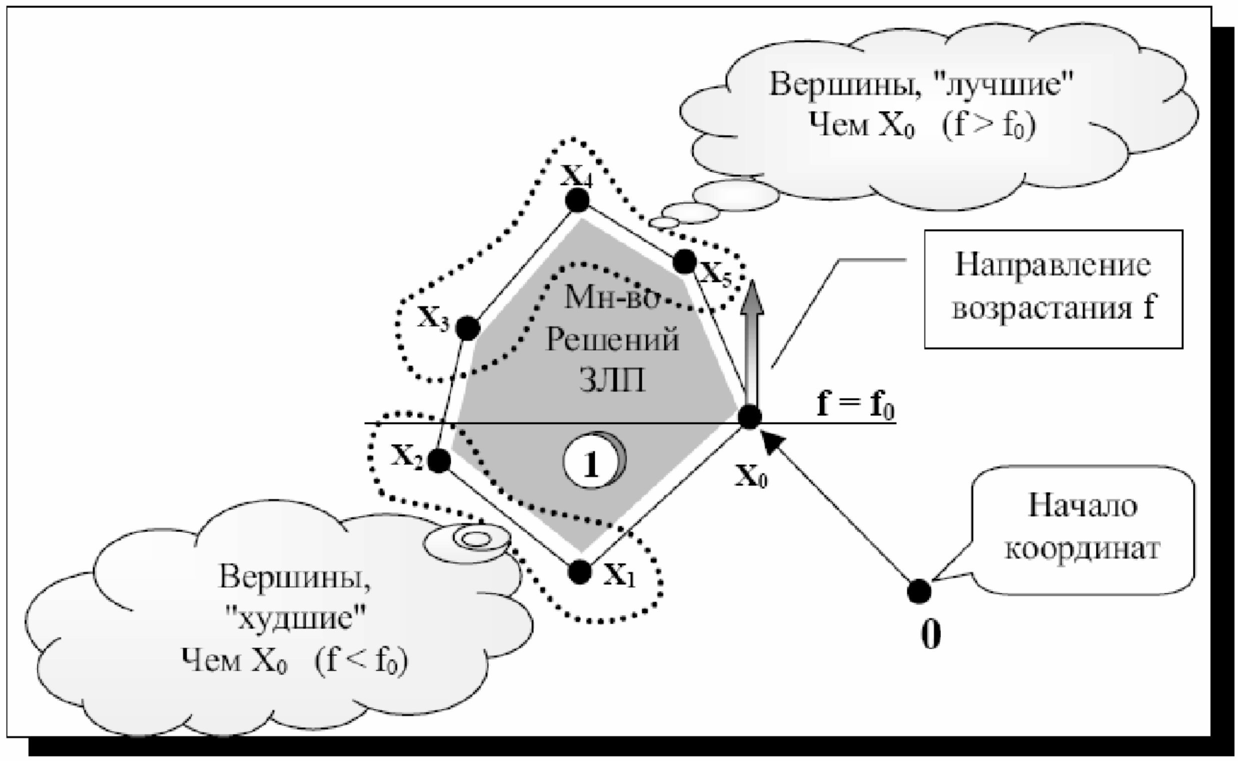
Как говорится: «Хотя и конечно, но очень велико!»

Геометрическая идея симплекс-метода

Идея состоит в том, чтобы вершины множества решений (базисные решения) перебирать направленно.

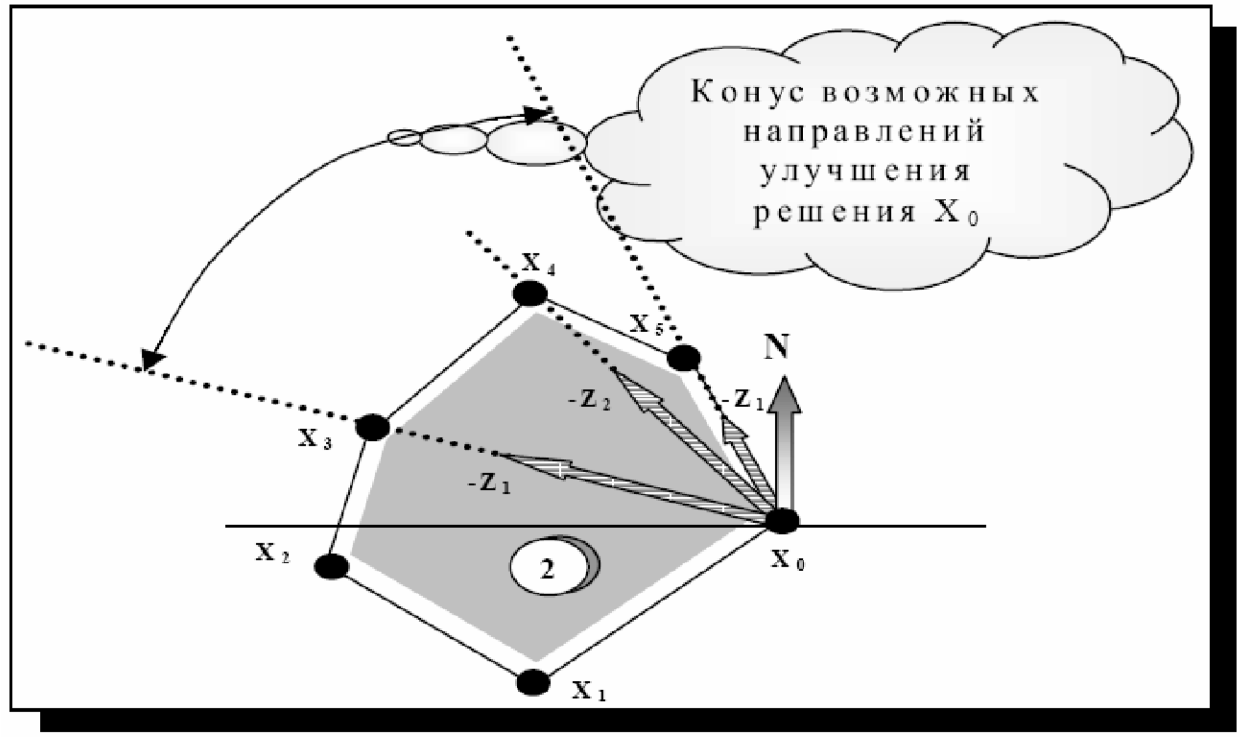
I. Пусть мы находимся в некоторой вершине множества решений x_0 (имеем некоторое базисное решение ЗЛП). Для определенности будем рассматривать ЗЛП на max. Тогда все вершины разделяются на две части: «лучшие», чем x_0 (значение целевой функции в них больше, чем $f(x_0) = f_0$) и «худшие», чем x_0 (с меньшим, чем f_0 значением целевой функции (см.рисунок)).

В



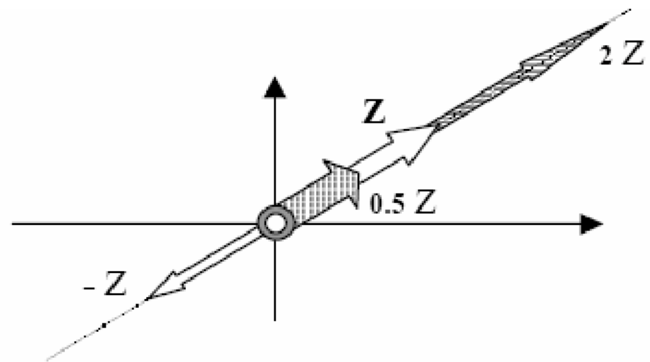
симплекс-методе каждый раз осуществляется переход к одной из «лучших» вершин (вершины «худшие», чем x_0, как бы заранее отсекаются). Всё начинается с того, что для текущей вершины проверяется условие (критерий) оптимальности (т.е. имеются ли вершины «лучшие», чем x_0). Если таких вершин нет, то имеющееся решение оптимально.

II. В противном случае определяются направления на «лучшие» вершины (здесь $-z_1,\quad -z_2,\quad -z_3$), которые образуют конус возможных направлений улучшения текущего решения x_0.

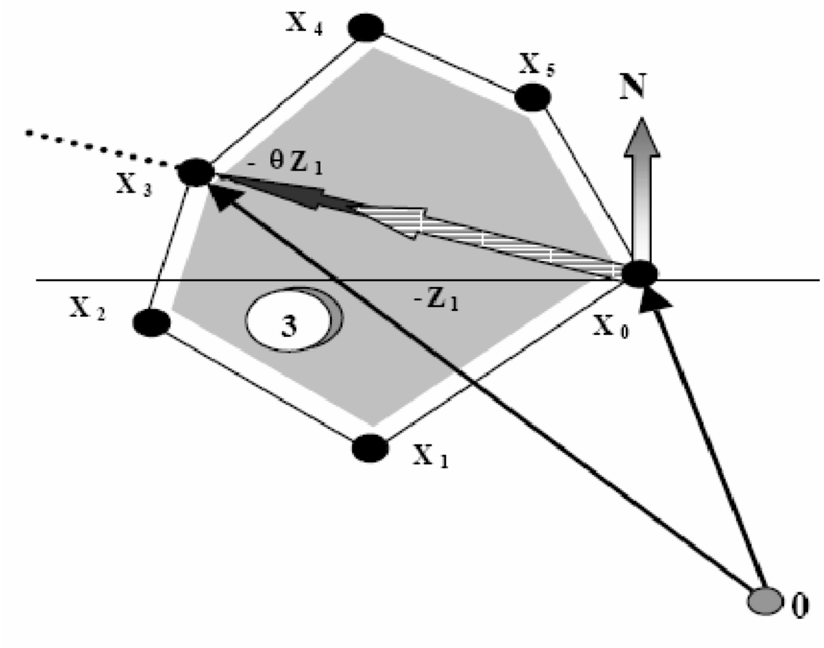


III. Далее выбирается одно из направлений улучшения решения (например $-z_1$). <u>С помощью положительного числового коэффициента θ вектор $-z_1$ растягивается (или сжимается)</u> таким образом, чтобы вектор - θz_1 «упирался» в «лучшую» вершину (здесь x_3).

Умножение вектора на число θ >1 геометрически представляет растяжение вектора в θ раз, если же θ <1, то умножение на θ сжимает вектор в θ раз (см. рисунок).



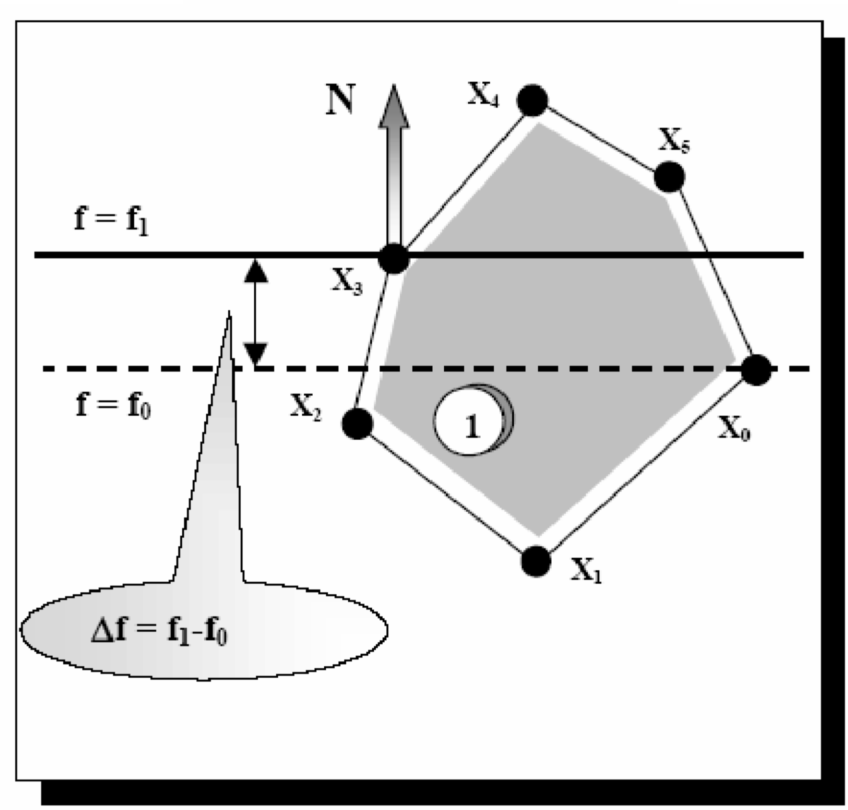
После выбора переход к «лучшей» вершине совершается по правилу:



$$x_3 = x_0 - \theta \cdot z_1$$

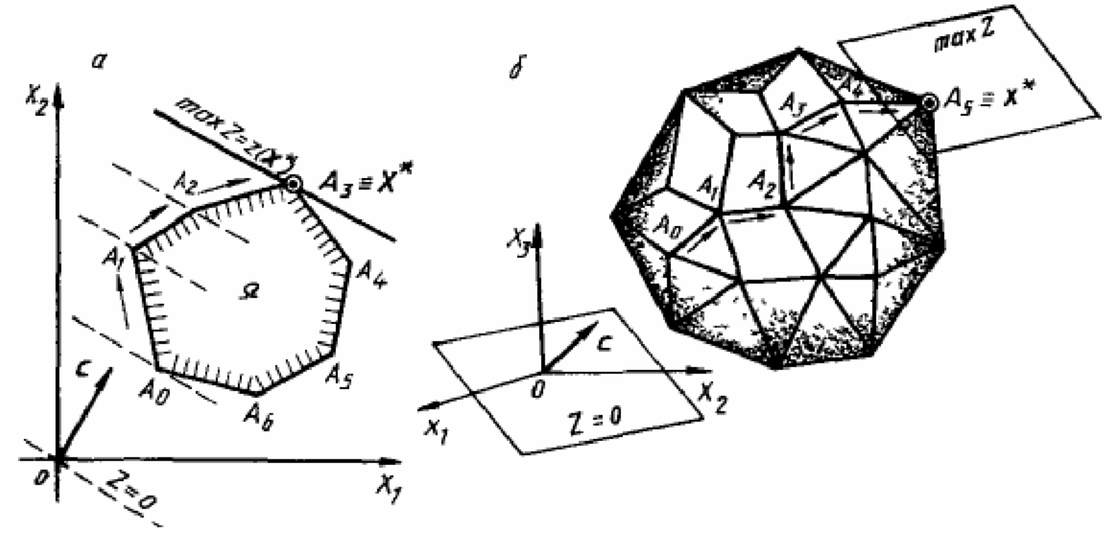
Теперь в качестве текущего решения имеем вершину x_3, в которой значение целевой функции больше, чем в предыдущей вершине x_0.

$$f(x_3) = f_1 > f_0 = f(x_0)$$



«Скачок» целевой функции в сторону увеличения равен Δf. Таким образом, мы опять пришли к случаю I., но текущее значение целевой функции увеличилось. Описанные шаги повторяются до тех пор, пока не будет достигнута оптимальная вершина (в данном случае - это x_4). Так как число вершин конечно и целевая функция каждый раз не убывает, то через конечное число шагов будет получено оптимальное решение ЗЛП.

На рисунке дана геометрическая интерпретация идеи симплексного метода в случае двух (а) и трёх (б) переменных.



Алгоритм прямого симплекс-метода.

Запишем алгоритм симплекс-метода в виде последовательности шагов и разберём на примере одну из его численных реализаций (так называемый прямой симплекс-метод). Итак, алгоритм состоит из следующих шагов:

ШАГ 0. ВЫБОР НАЧАЛЬНОГО БАЗИСНОГО РЕШЕНИЯ И ЗАПОЛНЕНИЕ НАЧАЛЬНОЙ СИМПЛЕКС-ТАБЛИЦЫ.
(выполняется один раз)

ШАГ 1. ПРОВЕРКА ТЕКУЩЕГО РЕШЕНИЯ НА ОПТИМАЛЬНОСТЬ.
(если решение оптимально, то конец) →

ШАГ 2. ВЫБОР НАПРАВЛЕНИЯ УЛУЧШЕНИЯ РЕШЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРА θ.

ШАГ 3. ПЕРЕХОД К НОВОМУ (“ЛУЧШЕМУ”) ТЕКУЩЕМУ РЕШЕНИЮ.
ВОЗВРАЩЕНИЕ К ШАГУ 1.

Переход к подробному описанию шагов алгоритма прямого симплекс-метода, иллюстрируя их примером о планировании выпуска продукции (табуретки и стулья) предприятием.

$$f = 4x_1 + 5x_2 \qquad \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 12 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 8 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad (i \in 1:5)$$

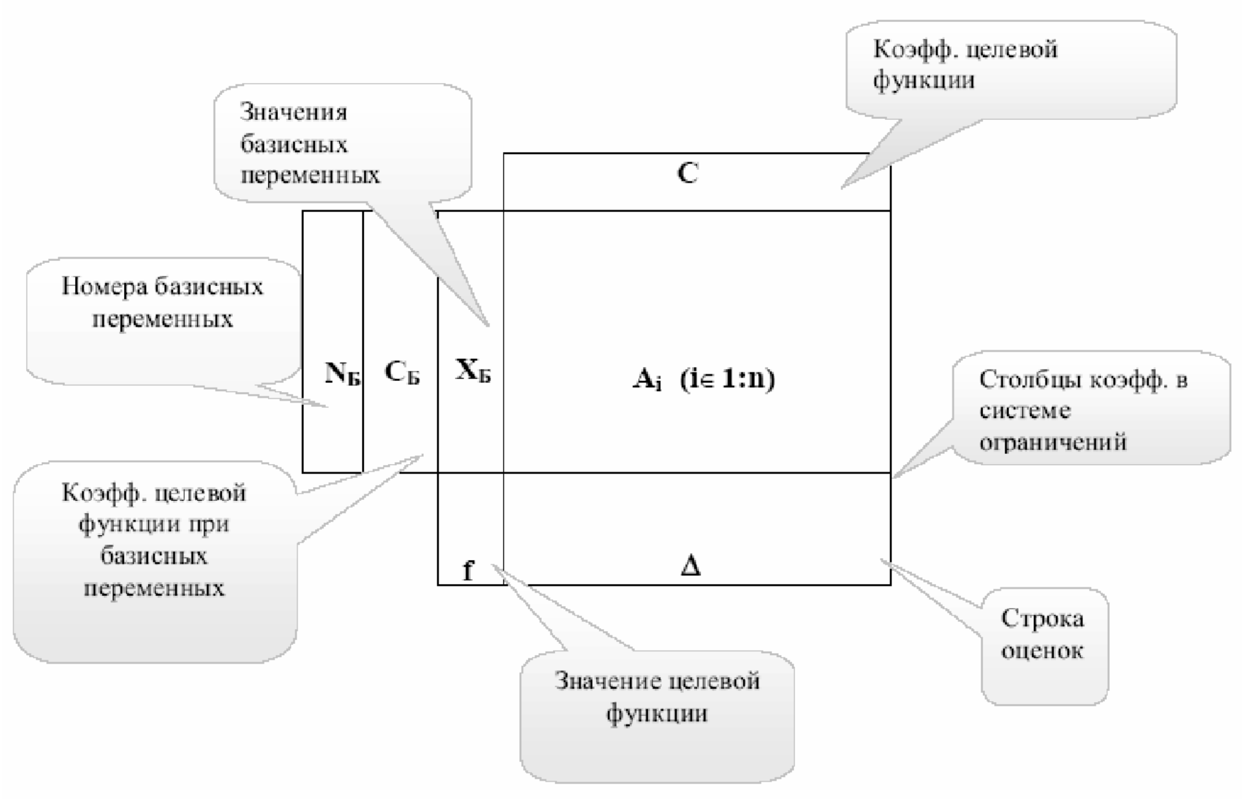
ШАГ 0. ВЫБОР НАЧАЛЬНОГО БАЗИСА РЕШЕНИЯ.

Выберем в качестве базисных переменных дополнительные переменные x_3, x_4, x_5. Тогда $x_1 = x_2 = 0$ и начальное базисное решение будет иметь вид $X_0 = (0,\ 0,\ 24,\ 12,\ 8)$

Заметим, что дополнительные переменные имеют совершенно ясное содержательное истолкование:

x_3 - это остаток сырья 1-го вида, x_4 - 2-го, а x_5 - 3-го вида. Тогда начальное решение можно интерпретировать следующим образом «если ничего не выпускать ($x_1 = x_2 = 0$), то все запас сырья перейдут в остаток ($x_3 = 24,\ \ x_4 = 12,\ \ x_5 = 8$). При этом будет получена нулевая прибыль $(\ f(X_0) = 0\ )$».

Запишем исходные данные ЗЛП и информацию о начальном решении в таблицу, которая называется <u>симплекс-таблицей</u> (n - число переменных, m - число ограничений).



Начальная симплекс-таблица для нашего примера с базисным решением примет вид, представленный ниже. Значение целевой функции на начальном шаге определяется подстановкой решения X_0 в целевую функцию $f(X_0) = 4\cdot 0 + 5\cdot 0 + 0\cdot 24 + 0\cdot 12 + 0\cdot 8 = 0$. Оценки для каждого столбца (величины, служащие для проверки решения на оптимальность) на начальном шаге определяются по формуле $\Delta_j = C_Б \cdot A_j - C_j$.

			1	2	3	4	5
NБ	CБ	XБ	4	5	0	0	0
3	0	24	4	6	1	0	0
4	0	12	3	2	0	1	0
5	0	8	1	1	0	0	1
		0	-4	-5	0	0	0

$$\boxed{f(X_0)=4\cdot 0+5\cdot 0+0\cdot 24+0\cdot 12+0\cdot 8=0}$$

$$\boxed{\Delta_j = C_Б \cdot A_j - C_j}$$

Так для подсчёта оценки Δ_1 нужно столбец

$$C_Б = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

скалярно умножим на столбец

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

и из результата вычесть коэффициент $c_1 = 4$
т.е.

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - 4 = 4\cdot 0 + 3\cdot 0 + 1\cdot 0 - 4 = -4$$

Оценка Δ_1 записывается в первый элемент строки Δ.
Аналогично вычисляются остальные оценки.

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 5 = -5, \quad \Delta_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 0$$

$$\Delta_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 0, \quad \Delta_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 0$$

Удобнее всего вычислять оценки прямо в таблице. Столбец A_j, оценку которого надо вычислить, умножается скалярно на столбец $C_Б$. Из полученного числа вычитается коэффициент целевой функции, стоящий <u>над</u> столбцом A_j. Результат записывается в строку оценок <u>под</u> столбцом A_j. Заметим, также, что на начальном шаге (т.к. $C_Б = (0, \ 0, \ 0)$)оценки равны коэффициентам целевой функции с обратным знаком.

Оценки и значение целевой функции вычисляются только на начальном шаге, а в дальнейшем пересчитываются автоматически. Заполнением начальной симплекс-таблицы завершается нулевой шаг симплекс-метода.

ШАГ 1. ПРОВЕРКА ТЕКУЩЕГО РЕШЕНИЯ НА ОПТИМАЛЬНОСТЬ.

Критерием оптимальности (или условием того, что имеющаяся вершина является оптимальной) является выполнением условия

$$\Delta_j \geq 0 \qquad (j \in 1:n)$$

для всех оценок в строке Δ.

Если решается ЗЛП на min, то знак неравенства меняется на обратный и условие принимает вид $\Delta_j \leq 0 \qquad (j \in 1:n)$.

При работе с симплекс-таблицей проверка решения на оптимальность сводится к просмотру строки оценок Δ. <u>Если все элементы строки больше или равны нулю, то текущее решение оптимально</u> и вычисления на этом заканчиваются. <u>Если же среди элементов строки оценок имеется хотя бы один отрицательный, то текущее решение не оптимально и может быть улучшено.</u>

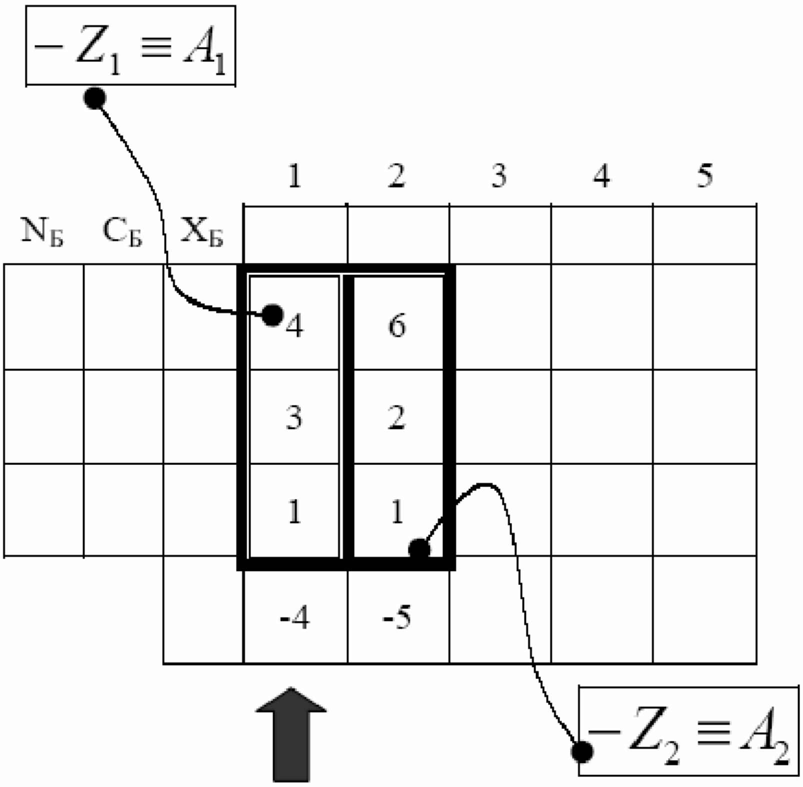
Проверим на оптимальность текущее решение в рассматриваемом примере.

			1	2	3	4	5
$N_Б$	$C_Б$	$X_Б$					
		0	-4	-5	0	0	0
			$\otimes$	$\otimes$			

Просмотр элементов строки оценок Δ убеждает нас в том, что среди элементов имеются отрицательные (отмечены знаком $\otimes$), а, значит, текущее решение не является оптимальным и может быть улучшено. На этом шаге проверки решения на оптимальность завершается.

ШАГ 2. ВЫБОР НАПРАВЛЕНИЯ УЛУЧШЕНИЯ РЕШЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРА θ.

Количество возможных направлений для улучшения текущего решения определяется количеством отрицательных оценок в строке Δ. Так в нашем примере имеется два направления улучшения решения. Каждой отрицательной оценке Δ_j соответствует свой вектор направления $-Z_j \equiv A_j$. В приведённой таблице возможные направления задаются векторами.



$$-Z_1 \equiv A_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ и } -Z_2 \equiv A_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Для улучшения решения выбирается одна из отрицательных оценок, т.е. одно из возможных направлений. (Более точный выбор направления будет описан ниже в замечании). Выберем в таблице в качестве направления то, которое отвечает оценке $\Delta_1 = -4$ (в таблице отмечено стрелкой).

После выбора направления $-Z_{j_0}$ проверяется критерий неограниченности целевой функции на множестве решений (см. случай неразрешимости ЗЛП, ранее). Он состоит в следующем: если среди элементов выбранного направления $-Z_{j_0} \equiv A_{j_0}$ нет положительных, то целевая функция не ограничена на множестве решений и ЗЛП неразрешима.

Если же среди элементов A_{j_0} есть положительные, то решение по выбранному направлению можно улучшить. Для выбранного нами направления в примере

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

все компоненты положительны.

Теперь остаётся определить параметр θ, растягивающий (сжимающий) вектор $-Z_{j_0} \equiv A_{j_0}$. Значение этого параметра выбирается по следующему правилу:

$$\theta = \min \left\{ \frac{X_{Бi}}{A_{j_0 i}} \middle| A_{j_0 i} > 0 \right\}$$

В симплекс-таблице выбирается наименьшее из отношений элементов столбца $X_{Б\,К}$ соответствующим <u>положительным</u> элементам вектора направления. Проиллюстрируем сказанное фрагментом симплекс-таблицы.

$N_Б$		$X_Б$	1	2	3	4	5
3		24	4	6			
4		12	3	2			
5		8	1	1			

$$\theta = \min \left\{ \frac{24}{4}, \frac{12}{3}, \frac{8}{1} \right\} = \min\{6,4,8\}$$

Минимум достигается в строке i_0, соответствующей некоторой базисной переменной (в примере это переменная x_4. Её строка отмечена стрелкой). На этом ШАГ 2 завершается.

Собственно для перехода к новому решению нам важно знать не саму величину θ, а, именно, строку i_0, где этот минимум достигается.

Величина θ может быть использована для более точного выбора направления. Известно, что скачок целевой функции, при переходе к «лучшему» решению равен

$$\Delta f = -\Delta_{j_0} \cdot \theta \qquad (*)$$

(Δ_{j_0} - выбранная оценка, θ - соответствующий ей параметр).

Естественно, хотелось бы при улучшении решения получить максимальный скачок целевой функции. Для этого необходимо:

a) найти значения θ, соответствующие каждой из отрицательных оценок.
b) Выбрать из полученных величин Δf наибольшую. Ту оценку, которая отвечает максимальной величине скачка Δf, и надо выбирать для определения улучшения решения.

Рассмотрим, для нашего примера, какую из двух оценок следует выбрать:

Оценка $\Delta_1 = -4$, $\theta = \min\{24/4,\ \ 12/3,\ \ 8/1\} = 4$,
$\Delta f = -(-4) \cdot 4 = 16$

Оценка $\Delta_2 = -5$, $\theta = \min\{24/6,\ \ 12/2,\ \ 8/1\} = 4$,
$\Delta f = -(-5) \cdot 4 = 20$

Значит сделанный нами выбор был не самым удачным. Если в качестве направления мы выбрали бы то, которое отвечает оценке $\Delta_2 = -5$, значение целевой функции увеличилось бы на 20 единиц, а не на 16, как при выборе оценки $\Delta_1 = -4$. Часто в литературе можно встретить такое правило выбора: «Выбирается оценка максимальная по абсолютной величине». Соотношение (*) показывает, что оно не всегда справедливо (хотя в нашем примере оно выполняется). Другими словами, максимальной по абсолютной величине оценке не обязательно соответствует максимальный скачок целевой функции (θ может быть очень мало). Правило выбора наилучшего направления можно сформулировать в следующем виде: «Выбирается то направление, которому соответствует максимальная абсолютная величина произведения оценки Δ на θ».

ШАГ 3. ПЕРЕХОД К НОВОМУ РЕШЕНИЮ.

Переход к новому решению связан с заменой одних базисных переменных на другие. В симплекс-методе такая замена выглядит следующим образом:

1. Новой базисной переменной становится x_{j_0}, соответствующая выбранной отрицательной оценке Δ_{j_0} (столбец отмечен стрелкой). В примере это переменная x_1.

			1	2	3	4	5
$N_Б$	$C_Б$	$X_Б$	4	5	0	0	0
3	0	24	4	6	1	0	0
4	0	12	$\boxed{3}$	2	0	1	0
5	0	8	1	1	0	0	1
		0	-4	-5	0	0	0

2. Из базисных переменных исключается та x_{i_0}, которая соответствует строке, где определялась величина θ (строчка отмечена стрелкой). В примере это переменная x_4 .

Поэтому новую симплекс-таблицу начинают заполнять с того, что в столбцах $N_Б$ и $C_Б$ заменяют номер i_0 на номер j_0 и элемент c_{i_0} на c_{j_0}. (В примере номер 4 заменяют на номер 1 и $c_4 = 0$ заменяют в столбце $C_Б$ на $c_1 = 4$). Далее сохраняют коэффициенты целевой функции в строке C (как не изменяющиеся исходные данные).

Оставшуюся (выделенную) часть «старой» симплекс-таблицы пересчитывают по методу полного исключения Гаусса-Жордана с ведущим элементом, стоящим на пересечении отмеченной строки (ведущая строка) и отмеченного столбца (ведущий столбец).

			1	2	3	4	5
$N_Б$	$C_Б$		4	5	0	0	0
3	0						
1	4						
5	0						

Пересчёт по методу Гаусса-Жордана означает выполнение следующих действий.

1. Ведущая строка делится на ведущий элемент

			1	2	3	4	5
$N_Б$	$C_Б$	$X_Б$	4	5	0	0	0
3	0	24	4	6	1	0	0
1	4	12	$\boxed{3}$	2	0	1	0
5	0	8	1	1	0	0	1
		0	-4	-5	0	0	0

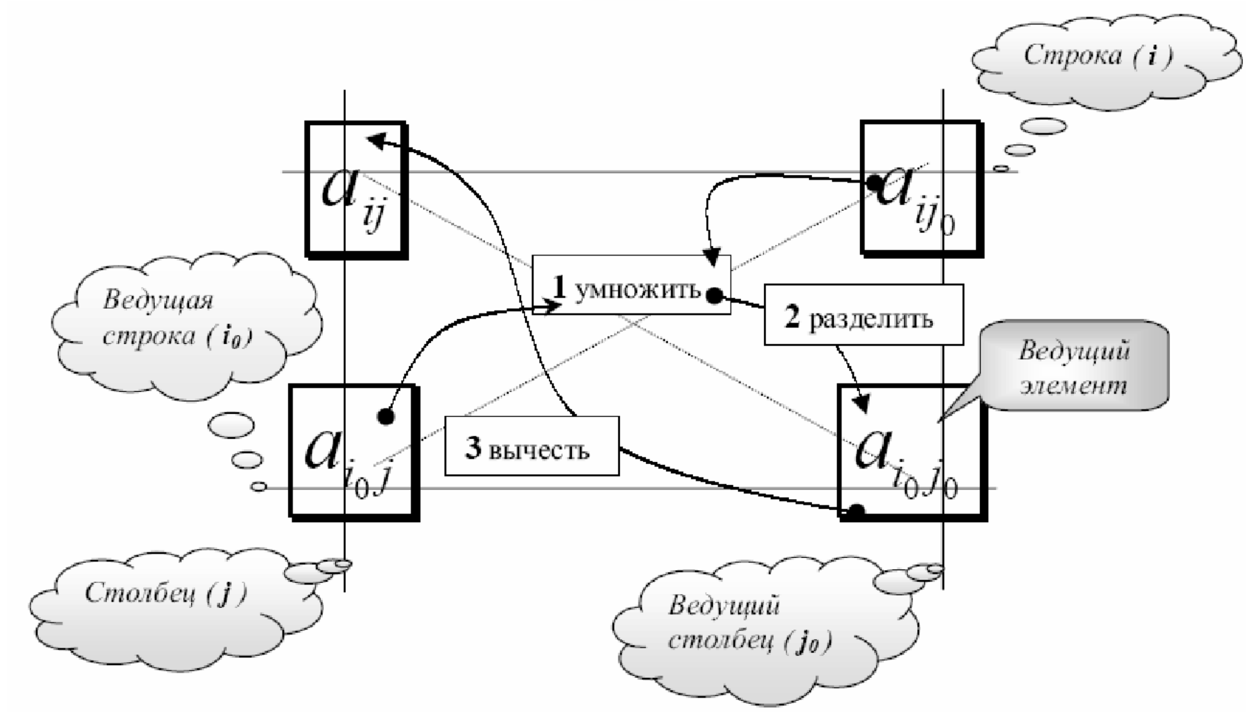
$\frac{1}{3}$

			1	2	3	4	5
$N_Б$	$C_Б$	$X_Б$					
3	0		0				
1	4	4	$\boxed{1}$	2/3	0	1/3	0
5	0		0				
			0				

Оставшиеся элементы ведущего столбца заполняются нулями.

2. Остальные элементы пересчитываются по формуле «прямоугольника».

$$a_{ij}^{*} = a_{ij} - \frac{a_{ij_0} \cdot a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}}$$



Здесь a^{*} - элемент новой симплекс-таблицы,

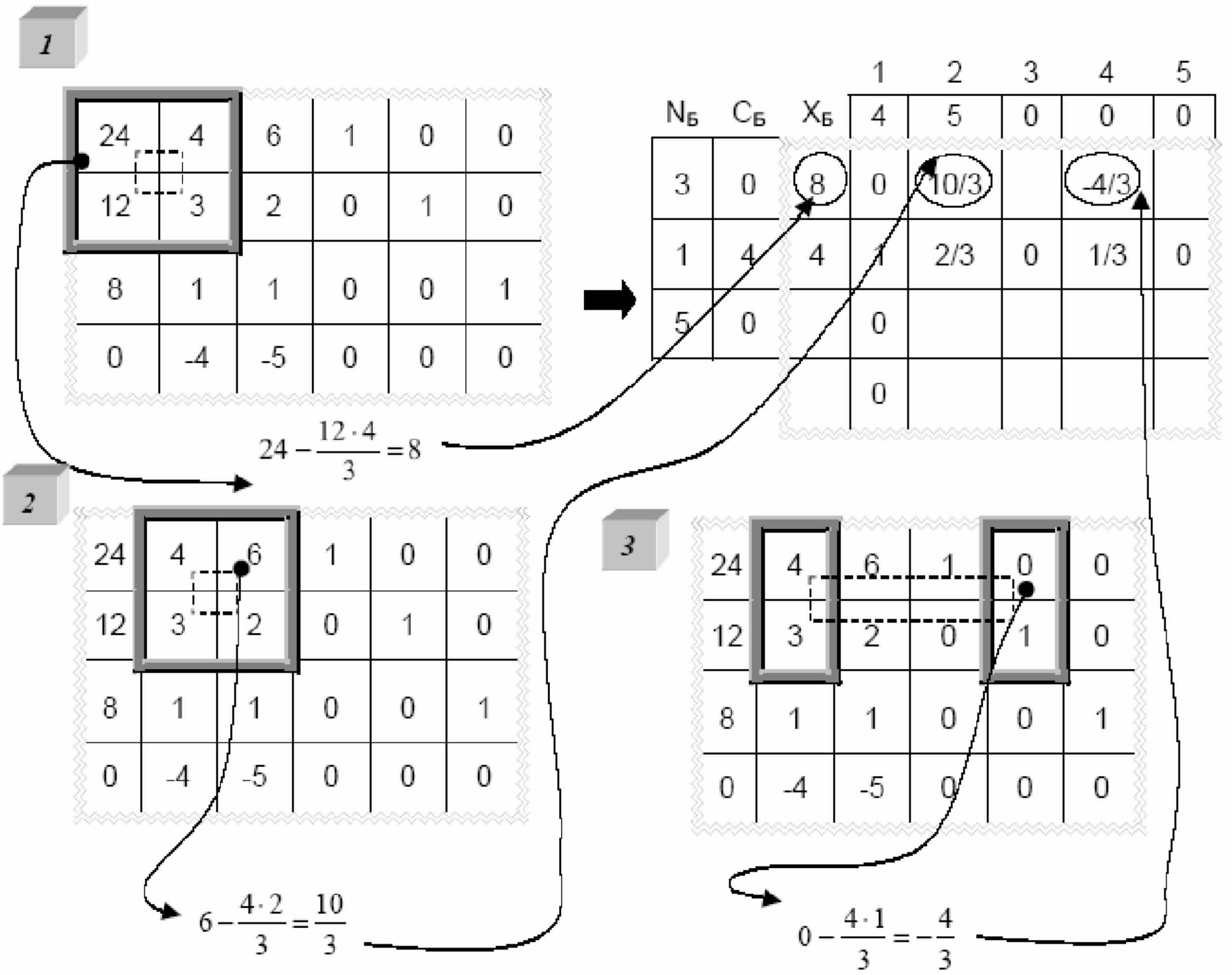
a - элемент «старой» симплекс-таблицы.

(Номера строк и столбцов берутся по оставшейся части таблицы.)

Формулу «прямоугольника» легко запомнить, пользуясь приведённым рисунком.

«Для того, чтобы определить элемент a_{ij}^* новой симплекс-таблицы, необходимо взять элемент a_{ij} в старой таблице, найти ведущий элемент и построить (мысленно) прямоугольник, как указано на рисунке. Затем вычесть из a_{ij} произведение элементов противоположной диагонали прямоугольника $(a_{i_0 j} \cdot a_{ij_0})$, делённое на ведущий элемент $(a_{i_0 j_0})$ ».

Пересчитаем элементы первой строки в оставшейся части таблицы.



Для ускорения счёта можно пользоваться двумя приёмами.

1. Если в ведущей строке есть нулевые элементы, то соответствующие им столбцы переносятся в новую таблицу без изменений.
2. Если в ведущем столбце (старой таблицы) есть нулевые элементы, то соответствующие им строки переносятся в новую таблицу без изменений.

Воспользовавшись первым из этих правил, перенесём без изменений в новую таблицу старые столбцы, соответствующие 3-й и 5-й переменным. После пересчёта 1-й строки новая таблица примет вид:

			1	2	3	4	5
NБ	CБ	XБ	4	5	0	0	0
3	0	8	0	10/3	1	-4/3	0
1	4	4	1	2/3	0	1/3	0
5	0	4	0	1/3	0	-1/3	1
			0		0		0

24	4	6	1	0	0
12	3	2	0	1	0
8	1	1	0	0	1
0	-4	-5	0	0	0

$$\boxed{0-\frac{1\cdot 1}{3}=-\frac{1}{3}}$$

$$\boxed{1-\frac{1\cdot 2}{3}=\frac{1}{3}}$$

$$\boxed{8-\frac{1\cdot 12}{3}=4}$$

Аналогично пересчитываем элементы третьей строки (см. выше).
И, наконец, элементы последней строки (значение целевой функции и оценки):

			1	2	3	4	5
NБ	CБ	XБ	4	5	0	0	0
3	0	8	0		1		0
1	4	4	1		0		0
5	0	4	0		0		1
		16	0	-7/3	0	4/3	0

24	4	6	1	0	0
12	3	2	0	1	0
8	1	1	0	0	1
0	-4	-5	0	0	0

$$\boxed{0-\frac{-4\cdot 12}{3}=16}$$

$$\boxed{-5-\frac{-4\cdot 2}{3}=-\frac{7}{3}}$$

$$\boxed{0-\frac{-4\cdot 1}{3}=\frac{4}{3}}$$

Пересчёт закончен. Построена новая симплекс-таблица, отвечающая новому базисному решению (или новой вершине множества решений). На этом ШАГ 3, а вместе с ним и полная итерация симплекс-метода завершается.

			1	2	3	4	5	
$N_Б$	$C_Б$	$X_Б$	4	5	0	0	0	**C**
3	0	8	0	10/3	1	-4/3	0	
1	4	4	1	2/3	0	1/3	0	
5	0	4	0	1/3	0	-1/3	1	
		16	0	-7/3	0	4/3	0	**Δ**
		f						

В полученном новом решении базисными неизвестными являются неизвестные x_3, x_1 и x_5 (столбец $N_Б$), их значения равны 8, 4, 4 соответственно (столбец $X_Б$). Значение целевой функции на этом решении равно 16. Переходим к следующей итерации симплекс-метода, т.е. возвращаемся на ШАГ 1.

ШАГ 1. Анализ строки Δ показывает, что текущее решение не является оптимальным (оценка $\Delta_2 = -7/3 < 0$).

ШАГ 2. Так как отрицательная оценка одна ($\Delta_2 < 0$), её и выбираем для определения направления (значит, в число базисных будем вводить переменную x_2). Находим θ:

$$\theta = \min\left\{\frac{8}{10/3},\ \frac{8}{10/3},\ \frac{8}{10/3}\right\} = \frac{12}{5}$$

Минимум достигается в строке, соответствующей переменной x_3 (она будет выведена из числа базисных). Отмечаем ведущую строку, ведущий столбец и ведущий элемент.

ШАГ 3. Заменим в $N_Б$ номер 3 на номер 2, а в столбце $C_Б$ $c_3 = 0$ на $c_2 = 5$.

Переписываем строку $C_Б$ в новую таблицу. Так как в ведущей строке есть два нулевых элемента, то соответствующие им столбцы переносим в новую таблицу без изменений. Делим ведущую строку на ведущий элемент и заполняем нулями ведущий столбец. Остальные элементы выделенной части пересчитываем по методу Гаусса-Жордана (по строкам).

2-я строка

$$4-\frac{8\cdot(2/3)}{10/3}=\frac{12}{5}$$

$$0-\frac{1\cdot(2/3)}{10/3}=-\frac{1}{5}$$

$$1/3-\frac{(2/3)\cdot(-4/3)}{10/3}=-\frac{1}{15}$$

			1	2	3	4	5
$N_Б$	$C_Б$	$X_Б$	4	5	0	0	0
2	5	12/5	0	1	3/10	-2/5	0
1	4	12/5	1	0	-1/5	1/15	0
5	0	16/5	0	0	-1/10	-1/5	1
		108/5	0	0	7/10	2/5	0

3-я строка

$$4-\frac{8\cdot(1/3)}{10/3}=\frac{16}{5}$$

$$0-\frac{1\cdot(1/3)}{10/3}=-\frac{1}{10}$$

$$-1/3-\frac{1/3\cdot(-4/3)}{10/3}=-\frac{1}{5}$$

4-я строка

$$16-\frac{8\cdot(-7/3)}{10/3}=-\frac{108}{5}$$

$$0-\frac{1\cdot(-7/3)}{10/3}=-\frac{7}{10}$$

$$4/3-\frac{(-7/3)\cdot(-4/3)}{10/3}=\frac{2}{5}$$

Вторая итерация симплекс-метода завершена. Переходим к проверке полученного решения на оптимальность.

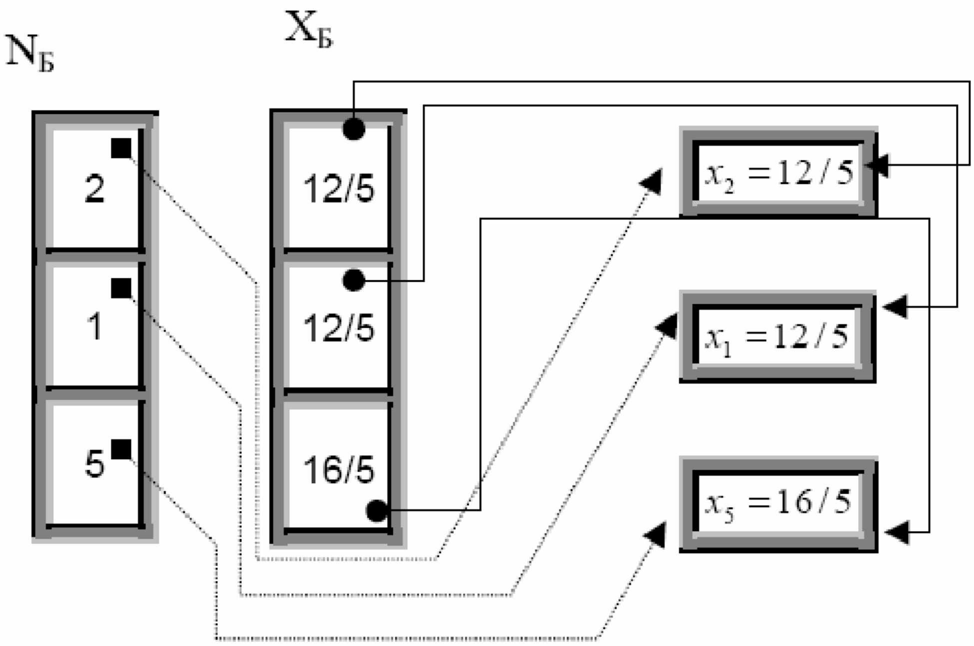
Шаг 1.

В строке Δ все оценки положительны или равны нулю. Следовательно, выполняются условия оптимальности $\Delta_j \geq 0 \quad (j \in 1:n)$.

			1	2	3	4	5	
$N_Б$	$C_Б$	$X_Б$						
2	5	12/5						
1	4	12/5						
5	0	16/5						
		108/5	0	0	7/10	2/5	0	Δ
		f						

Таким образом, мы заключаем, что <u>текущее решение является оптимальным решением ЗЛП</u> (т.е. целевая функция достигла своего максимального значения $f_{\max} = 108/5$). Выпишем оптимальное значение из симплекс-таблицы. В столбце $N_Б$ хранятся номера базисных переменных, а в столбце $X_Б$ их значения.

Получаем



Остальные переменные (небазисные) равны нулю: $x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

Значение целевой функции выписываем из клетки f

$$f = 108/5$$

Окончательно, **данная ЗЛП имеет следующее оптимальное решение**:

$$X^* = (\frac{12}{5}, \ \frac{12}{5}, \ 0 \ , \ 0, \ \frac{16}{5}), \quad f(X^*) = 108/5$$

Такой же результат получен графически (см. ранее).

ЭКОНОМИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ.

1. Наиболее выгодным является выпуск табуреток и стульев в количестве по 12 шт. за 5 плановых периодов.
2. Прибыль 1-го и 2-го видов при этом будет израсходовано полностью ($x_3 = 0$, $x_4 = 0$), а остаток сырья 3-го вида (x_5) составит 16\5 ед. к концу планового периода.