1. Общая и основная задачи линейного программирования.

<u>Определение.</u> *Общей задачей линейного программирования* называется задача, которая состоит в определении максимального (минимального) значения функции

$$F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \quad (i=\overline{1,k}), \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i=\overline{k+1,m}), \qquad (3)$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j=\overline{1,l},\ l\leqslant n), \qquad (4)$$

где $a_{ij},\ b_i,\ c_j$ - заданные постоянные величины и $k\leqslant m$.

<u>Определение</u>. Функция (1) называется *целевой функцией* (или *линейной формой*) задачи (1) - (4), а условия (2) - (4) - *ограничениями* данной задачи.

<u>Определение</u>. *Стандартной* (или *симметричной*) задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального значения функции (1) при выполнении условия (2) и (4), где $k=m$ и $l=n$.

<u>Определение</u>. *Канонической* (или *основной*) *задачей* линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального значения функции (1) при выполнении условий (3) и (4), где $k=0$ и $l=n$.

<u>Определение</u>. Совокупность чисел $X=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, удовлетворяющих ограничениям задачи (2) - (4), называется *допустимым решением* (или *планом*).

<u>Определение</u>. Планом $X^*=(x_1^*,\ x_2^*,\ \ldots,\ x_n^*)$, при котором целевая функция задачи (1) принимает своё *максимальное* (*минимальное*) значение, называется оптимальным.

Значение целевой функции (1) при плане X будем обозначать через F(X). Следовательно, X* - оптимальный план задачи, если для любого X выполняется неравенство $F(X)\leqslant F(X^*)$ (соответственно $F(X)\geqslant F(X^*)$).

Указанные выше три формы задачи линейного программирования эквивалентны в том смысле, что каждая из них с помощью несложных преобразований может быть переписана в форме другой задачи. Это означает, что если имеется способ нахождения решения одной из указанных задач, то тем самым может быть определён оптимальный план любой из трёх задач.

Чтобы перейти от одной формы записи задачи линейного программирования к другой, нужно в общем случае уметь, во-первых, сводить задачу минимизации функции к задаче максимизации, во-вторых, переходить от ограничений-неравенств к ограничениям равенствам и наоборот, в-третьих, заменять переменные, которые не подчинены условию неотрицательности.

В том случае, когда требуется найти минимум функции $F=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$, можно перейти к нахождению максимума функции $F_1=-F=-c_1x_1-c_2x_2-\ldots-c_nx_n$, поскольку $\min F=-\max(-F)$.

Ограничение-неравенство исходной задачи линейного программирования, имеющее вид «≤», можно преобразовать в ограничение-равенство добавлением к его левой части дополнительной неотрицательной переменной, а ограничение-неравенство вида «≥» - в ограничение-равенство вычитанием из его левой части дополнительной неотрицательной переменной. Таким образом, ограничение-неравенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leqslant b_i$$

преобразуется в ограничение-равенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i \quad (x_{n+1} \geqslant 0), \qquad (5)$$

а ограничение-неравенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geqslant b_i$$

- в ограничение-равенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i \quad (x_{n+1} \geqslant 0). \qquad (6)$$

В то же время каждое уравнение системы ограничений

$$a_{i1}x_1 + a_{i2} + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$

Можно записать в виде неравенств:

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leqslant b_i, \\ -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n \leqslant -b_i. \end{cases} \qquad (7)$$

Число вводимых дополнительных неотрицательных переменных при преобразовании ограничений-неравенств в ограничения-неравенства равно числу преобразуемых неравенств.

Вводимые дополнительные переменные имеют вполне определённый экономический смысл. Так, если в ограничениях исходной задачи линейного программирования отражается расход и наличие производственных ресурсов, то численное значение дополнительной переменной в плане задачи, записанной в форме основной, равно объёму неиспользованного соответствующего ресурса.

Отметим, наконец, что если переменная x_k не подчинена условию отрицательности, то её следует заменить двумя неотрицательными переменными u_k и v_k, приняв $x_k = u_k - v_k$.

Рассмотрим ещё два употребительных вида записи - *матричную* и *векторную*. В модель (1), (3) и (4) введём обозначения:

$$C = [c_1 \quad c_2 \quad \ldots \quad c_n]; \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix},$$

где С- матрица-строка, А - матрица системы уравнений, Х - матрица столбец переменных, A_0 - матрица столбец свободных членов.

Каноническая форма задачи примет вид:

$$\max Z=[c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n]\,[x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T;$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}, \ X \geqslant O,$$

или

$$\max Z=CX, \ AX=A_0, \ X \geqslant O.$$

Полезной является также векторная форма задачи линейного программирования. Для столбцов матрицы А введём обозначения:

$$A_1=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \ A_2=\begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ \dots, \ A_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \ \dots,$$

$$A_n=\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Тогда задача (1), (3) и (4) в векторной форме записи примет вид:

$$\max Z = \mathbf{cx};$$

$$A_1x_1+\dots+A_jx_j+\dots+A_nx_n=A_0, \ \mathbf{x}\geqslant \mathbf{0},$$

где cx - скалярное произведение векторов $\mathbf{c}=(c_1; \ \dots; \ c_n)$ и $\mathbf{x}=(x_1; \ \dots; \ x_n)$.

Пример задачи линейного программирования.

Найти максимальное значение функции

$$f(x_1,x_2)=2x_1+5x_2$$

при следующих ограничениях переменных x_1 и x_2.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 127 \\ 7x_1 - x_2 \le 83 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Приведённая задача есть ЗЛП максимизации от двух переменных с ограничениями-неравенствами (могут быть ограничения-равенства). Линейная функция f является функцией цели, или целевой функцией. Ограничения $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ являются ограничениями неотрицательности (или условиями неотрицательности), а система линейных неравенств является системой ограничений ЗЛП. Запись ЗЛП с ограничениями-неравенствами выглядит следующим образом

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2 \to \max \Leftarrow \boxed{\text{Это целевая функция}}$$

$$\left.\begin{cases} x_1 + x_2 \le 127 \\ 7x_1 - x_2 \le 83 \end{cases}\right\} \Leftarrow \boxed{\text{Это система ограничений}}$$

$$\left. x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \right\} \Leftarrow \boxed{\text{Это ограничения неотрицательности}}$$

ЗЛП является удобной математической моделью для большого числа экономических задач. Рассмотрим на примерах процесс построения математической модели в виде ЗЛП на максимум или минимум для ряда экономических задач.

Задача планирования производства продукции (ЗЛП на максимизацию).

Некоторое предприятие в течение планового периода выпускает 2 вида продукции, например, табуретки и стулья. При их производстве используется три вида ресурсов. Данные по их расходу на выпуск одного изделия, запасы ресурсов, а также прибыль от реализации единицы продукции приведены в таблице.

	Табуретка	Стул	Запас ресурса
Ресурс 1	4	6	24
Ресурс 2	3	2	12
Ресурс 3	1	1	8
Прибыль	4	5	

Требуется спланировать количество выпускаемых табуреток и стульев таким образом, чтобы при данных условиях производства полученная прибыль была максимальной. Итак, цель задачи - получение максимальной прибыли. Выберем в качестве параметров, характеризующих процесс планирования производства продукции, число выпускаемых табуреток (переменная x_1) и выпускаемых стульев (переменная x_2). Выразим через выбранные неизвестные суммарную прибыль от реализации всей продукции

$$f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2$$

Она включает в себя прибыль от реализации всех табуреток (4 x_1) и выпускаемых стульев (5 x_2). Цель задачи (максимизация прибыли) запишем в виде

$$f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \to \max$$

Перейдём к формулировке ограничений. Структура всех трёх ограничений одинакова

$$\boxed{\text{РАСХОД РЕСУРСА}} \quad \le \quad \boxed{\text{ЗАПАС РЕСУРСА}}$$

Теперь остаётся выразить полный расход ресурса через выбранные неизвестные x_1 и x_2. Так, расход ресурса первого вида на выпуск всех табуреток составит 4 x_1 единиц, а на выпуск всех стульев 6 x_2 соответственно (см. первую строку таблицы). В сумме это даст полный расход ресурса первого вида и ограничение примет вид линейного неравенства

$$4x_1 + 6x_2 \le 24$$

Аналогично запишутся ограничения по второму и третьему видам ресурсов

$$3x_1 + 2x_2 \le 12$$

$$x_1 + x_2 \le 8$$

Объединяя их в систему получим

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \le 24 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + x_2 \le 8 \end{cases}$$

Далее, исходя из смысла введённых переменных, (число производимых изделий не может быть отрицательным) на них необходимо наложить ограничения неотрицательности.

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Окончательно выпишем математическую модель задачи в форме ЗЛП.

$$f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \le 24 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + x_2 \le 8 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Полученная модель может изменяться за счёт изменения, как условий производства, так и условий реализации продукции. Например, при изменении условий реализации изменяются и коэффициенты в целевой функции. При изменении запасов ресурсов изменяются правые части в системе ограничений. При учёте новых условий производства система ограничений дополнится новыми уравнениями или неравенствами.

Задача о составлении оптимального рациона (ЗЛП на минимизацию).

Предположим, что в дневной рацион животных должны входить питательные вещества двух видов в количестве, заданном в таблице.

	Корм 1	Корм 1	Пит. в-в в рац.
Пит. в-во 1	2	1	12
Пит. в-во 2	6	4	30
Цена корма	5	2	

Имеется возможность составлять рацион из кормов двух видов, для которых задано содержание питательных веществ в единице корма и цена одной единицы каждого из видов кормов. При удовлетворении условий по необходимому содержанию питательных веществ в данном рационе требуется достичь его минимальной стоимости.

Пусть x_1 и x_2 - содержание в данном рационе корма 1-го и 2-го вида соответственно. Общую стоимость дневного рациона запишем, используя цены на корм:

$$f(x_1, x_2) = 5x_1 + 2x_2 \to \min$$

Ограничения имеют следующую структуру:

$$\boxed{\text{содержание пит. веществ в рационе}} \ \geq \ \boxed{\text{min кол-во пит. в-в.}}$$

Используя для записи левой части введённые неизвестные, получим

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 12 \\ 6x_1 + 4x_2 \geq 30 \end{cases}$$

Добавив к полученным ограничениям условия неотрицательности (x_i равно нулю, если корм I не используется в рационе), окончательно запишем ЗЛП.

$$f(x_1, x_2) = 5x_1 + 2x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 12 \\ 6x_1 + 4x_2 \geq 30 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

ПРИМЕЧАНИЕ: В приведённых примерах все ограничения имеют вид линейных неравенств. Это, так называемые, нежёсткие ограничения (ресурс может быть израсходован полностью, а может и частично). Однако можно ставить и жёсткие ограничения в виде линейных уравнений. Так, в первом примере, требование полного использования ресурса 1-го вида приводит к ограничению: $4x_1 + 6x_2 = 24$.

Рассмотрим примеры решения задач линейного программирования.

Задача 1.

Магазин оптовой торговли реализует три вида продукции K, L и M. Для этого используется два ограниченных ресурса - полезная площадь помещений, которая с коэффициента оборачиваемости составляет 450м^2, и рабочее время работников магазина

- 600 чел-ч. Товарооборот должен быть не меньше 240 тыс. рублей. Необходимо разработать план товарооборота, доставляющий максимум прибыли. Затраты ресурсов на реализацию и получаемую прибыль представлены в таблице. Составить математическую модель и привести её к каноническому виду.

Ресурсы	Затраты ресурсов на реализацию, тыс. руб.			Объём ресурса
	K	L	M	450
Полезная площадь, м^2	1,5 3	2 2	3 1,5	600
Прибыль, тыс. руб.	50	65	70	

Решение.

Обозначим через x_1, x_2 и x_3 объёмы продукции (в тыс. руб.), подлежащей реализации. Модель задачи примет вид:

$$\max Z = 50x_1 + 65x_2 + 70x_3;$$

$$\left.\begin{aligned} 1{,}5x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leqslant 450, \\ 3x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 &\leqslant 600, \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geqslant 240, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1,\ 3}).$$

Перейдём к задаче в каноническом виде. Введём дополнительные переменные x_4, x_5, x_6, первые две из которых прибавим к левым частям первых двух неравенств, а третью вычтем из левой части третьего неравенства. В целевую функцию все дополнительные переменные введём с коэффициентом, равным нулю. Получим каноническую форму задачи:

$$\max Z = 50x_1 + 65x_2 + 70x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 + 0\cdot x_6;$$

$$\left.\begin{aligned} 1{,}5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 450, \\ 3x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 + x_5 &= 600 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_6 &= 240, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = \overline{1,\ 6}).$$

Задача 2.

Записать в форме основной задачи линейного программирования следующую задачу: найти максимум функции $F = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 \leqslant 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 \leqslant 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \leqslant 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 \geqslant 8, \end{cases}$$

Решение.

В данной задаче требуется найти максимум функции, а система ограничений содержит четыре неравенства. Следовательно, чтобы записать её в форме основной задачи, нужно перейти от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам. Так как число неравенств, входящих в систему ограничений задачи, равно четырём, то этот переход может быть осуществлён введением четырёх дополнительных неотрицательных переменных. При этом к левым частям каждого из неравенств вида «≤» соответствующая дополнительная переменная прибавляется, а из левых частей каждого неравенства вида «≥» вычитается. В результате ограничения принимают вид уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1+x_3-x_4+x_5+x_6=2, \\ x_1-x_3+2x_4+x_5+x_7=3, \\ 2x_2+x_3-x_4+2x_5+x_8=6, \\ x_1+x_4-5x_5-x_9=8, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_9 \geqslant 0.$$

Следовательно, данная задача может быть записана в форме основной задачи таким образом: максимализировать функцию $F=3x_1-2x_2-5x_4+x_5$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1+x_3-\ x_4+\ x_5+x_6=2, \\ x_1-x_3+2x_4+\ x_5+x_7=3, \\ 2x_1+x_3-x_4+2x_5+x_8=6, \\ x_1+x_4-5x_5-x_9=8, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_9 \geqslant 0.$$

Задача 3.

Записать задачу, состоящую в минимизации функции $F=-x_1+2x_2-x_3+x_4$, при условиях

$$\begin{cases} 2x_1-\ x_2-\ x_3+\ x_4 \leqslant 6, \\ x_1+2x_2+x_3-x_4 \geqslant 8, \\ 3x_1-\ x_2+2x_3+2x_4 \leqslant 10, \\ -x_1+3x_2+5x_3-3x_4=15, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geqslant 0$$

в форме основной задачи линейного программирования.

Решение.

В данной задаче требуется найти минимум целевой функции, а система ограничений содержит три неравенства. Следовательно, чтобы записать её в форме основной задачи, вместо нахождения минимума функции F нужно найти максимум функции $F_1 = -F$ при ограничениях, получающихся из ограничений-неравенств вида «≤» дополнительно отрицательной переменной и вычитанием дополнительных переменных из левых частей каждого из ограничений-неравенств вида «≥».

Следовательно, исходная задача может быть записана в форме основной задачи линейного программирования так: найти максимум функции

$F_1=x_1-2x_2+x_3-x_4$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1-\ x_2-x_3+x_4+x_5=6, \\ x_1+2x_2+x_3-x_4-x_6=8, \\ 3x_1-x_2+2x_3+2x_4+x_7=10, \\ -x_1+3x_2+5x_3-3x_4=15, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_7 \geqslant 0.$$

Задача 4.

Методом последовательного исключения неизвестных сведём данную задачу к следующей: найти минимум функции $F=6{,}5x_1-7{,}5x_3+23{,}5x_4-5x_5$ при условиях

$$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3+4x_4-x_5=12, \\ 2x_1- \qquad x_3+12x_4-x_5=14, \\ x_1+2x_2+3x_4-x_5=6, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_5 \geqslant 0.$$

Последняя задача записана в форме основной для задачи, состоящей в нахождении максимального значения функции $F=x_3+2x_4$ при условиях

$$\begin{cases} x_3+ \quad x_4 \leqslant 6, \\ 3x_3+10x_4 \leqslant 26, \\ x^3+11x_4 \leqslant 20, \end{cases}$$

$$x_3,\ x_4 \geqslant 0.$$

Целевая функция задачи преобразована с помощью подстановки вместо x_1 и x_5 их значений в соответствии с уравнениями системы ограничений задачи.