***СОДЕРЖАНИЕ***

1. Введение …………………………………………………………………2
2. Сущность аналогии и ее виды………………………………………. …5
3. Аналогия в процессе обучения математике……………………………7
4. Положительная роль аналогии в планиметрии и стереометрии…….12
5. Аналогия в теоремах о прямой Эйлера, окружности и сфере……….18
6. Применение аналогии при решении задач……………………………22
7. Ошибки, связанные с применением аналогии………………………..23
8. Заключение………………………………………………..……………...25

 9. Список использованной литературы…………………………………..27

***ВВЕДЕНИЕ***

 Широкое применение аналогии в процессе обучения математике является одним из эффективных приемов, способных побудить у учащихся живой интерес к предмету, приобщить их к тому виду деятельности, который называют исследовательским. Кроме того, широкое применение аналогии дает возможность более легкого и прочного усвоения школьниками учебного материала, так как часто обеспечивает мысленный перенос определенной системы знаний и умений от известного объекта к неизвестному (что, кстати говоря, способствует также актуализации знаний).

О роли аналогий как в научном познании, так и в процессе обучения говорили многие видные ученые. Так, Кеплер высказал следующее суждение: "Я больше всего дорожу Аналогиями, моими самыми верными учителями. Они знают все секреты Природы, и ими меньше всего следует пренебрегать”.

 Установление аналогий будет идти успешнее, если у учащихся будет сформировано умение проводить сравнение. Благодаря сравнению объектов, явлений, процессов человек получает возможность мыслить глубже, и его знания становятся более прочными и осмысленными. Сравнение позволяет сформировать у школьников умение находить сходства и различия понятий, процессов, явлений, что активизирует мыслительную деятельногсть и ускоряет процесс умственного развития.

 Сравнение осуществляется в двух основных формах: сопоставления и противопоставления. Противопоставление направлено на уяснение отличительного в предметах и явлениях при выделении существенных признаков и свойств. Сопоставление направлено на выделение существенных свойств, общих для ряда объектов. Как показывают исследования психологов, ученик осознает различие раньше, чем сходство.

 По степени полноты различают частичные и полные сравнения. Полное сравнение устанавливает и сходство, и отличие. Частичное сравнение позволяет глубже осознать отличительное в изучаемом учебном материале.

 Применение аналогии весьма полезно в процессе изучения математики, как и в любой науке вообще.

 Предметы и явления дейтвительности, - указывал еще Сеченов, - запечатлеваются и воспроизводятся не изолированно друг от друга, а в тесной связи друг с другом, группами или рядами.

 Аналогия же помогает сопоставлять и противопоставлять понятия математики, а новые сведения, понятия лучше усваиваются тогда, когда они вводятся не во всякой связи с предыдущими, а в сравнении с ними, в установлении сходных и отличительных признаков.

 Подведем некоторые итоги. Прежде всего отметим, что индукция, дедукция и аналогия, представляя собой основные виды умозаключений, являются прежде всего методами научного исследования, а также весьма эффективными методами обучения математикие.

 В процессе мышления (и в процессе обучения) индукция, дедукция и аналогия взаимодействуют настолько тесно, что говорить о них раздельно имеет смысл только из соображений их детального изучения.

 Единство индуктивных и дедуктивных умозаключений по аналогии отражено и во многих работах по логике, связанных с проблемой классификации умозаключений. С этой точки зрения представляется весьма интересная работа А. И. Уемова, цитатой из которой будет подведен окончательный итог:

 “Независимо от оснований, оправдывающих переход от посылок к заключению, все выводы можно подразделить на две группы.

 В одной из них классы предметов, к которым относятся посылки и заключения, совместимы. Более того, один из этих классов является подклассом другого. К этому типу выводов относятся индукция и дедукция, которые можно определить следующим образом:

 а) *дедукция –* умозаключение, вывод которого относится к предметам, не выходящим за рамки того класса вещей, о котором шла речь в посылках;

 б) *индукция –* умозаключение, вывод которого относится к большему кругу предметов, чем тот, о котором говорится в посылках.

 В другом типе выводов предметы, к которым относятся посылки и заключение, различны. Именно таков характер выводов по аналогии. Таким образом, можно дать следующее определение:

 в) *аналогия –* умозаключение, в котором заключение относится к другому предмету, чем тот, о котором говорится в посылке”.

 Выводы в умозаключениях по аналогии всегдабывают только вероятны, но это вероятное знание, предположение несет в себе нечто новое. Сама по себе аналогия не дает ответа на вопрос о правильности предноложения,Эта правильность должна проверяться другими средствами. Аналогия важна уже тем, что она наводит нас на догадки, подает мысль о том или ином предположении.

 Все это очень важно как в развитии науки, так и в обучении математике. Аналогия помогает учащимся находить предположительное решение новых вопросов, учебных проблем и этим спосодствует активизации познавательного процесса, учения школьников, эффективному развитию их самостоятельного продуктивного мышления, математической интуиции. Аналогии, кроме того, являются важнейшем источником ассоциаций, обеспечивающих глубокое и прочное усвоение предмета учащимися.

***СУЩНОСТЬ АНАЛОГИИ И ЕЕ ВИДЫ***

Одним из весьма важных типов умозаключений является так называемое традуктивное умозаключение ( лат. traductio – перемещение ), при котором от двух или нескольких суждений некоторой степени общности переходят к новому суждению той же степени общности.

Например, пусть a, b и c – некоторые действительные числа, a>b(первое суждение), b>c(второе суждение). a>c(новое суждение).

 Как метод исследования традукция заключается в том, что, установив сходство двух объектов в некотором отношении, делают вывод о сходстве тех же объектов и в другом отношении.

 Важнейшим видом традуктивного умозаключения является **аналогия** (греч. analogia – соответствие, сходство). Аналогия – весьма эффективный эвристический инструмент познания.

 Умозаключение по аналогии можно выразить следующей схемой:

 Объекты Свойства объектов

 A a b c d…

 B a b c x…

 Вывод: x=d

При умозаключении по аналогии знание, полученное из рассмотрения какого –либо объекта (“модели”), переносится на другой, менее изученный (менее доступный для исследования, менее наглядный и т. п.) в каком- либо смысле объект. По отношению к конкретным объектам заключения, получаемые по аналогии, носят, вообще говоря, лишь вероятный характер; они являются одним из источников научных гипотез, индуктивных рассуждений и играют важную роль в научных открытиях.

Понятно, что не всякое сходство есть аналогия. Сравнивая девушку с цветком, поэт имеет ввиду определенное сходство образов красивой девушки и цветка; он далек от проведения аналогии между ними.

Наиболее глубоким видом аналогии, приводящим к совершенно достоверным выводам, является *изоморфизм*. Установив изоморфность двух или нескольких систем объектов, мы можем перенести любое предложение, справедливое для одной из этих систем, на другую систему объектов, изоморфных изученной. Ярким примером служит аналитическая геометрия, в которой изучению геометрических фигур и их свойств сводится к изучению определенных аналитических соотношений над числовыми объектами.

Аналогия различается на:

1. *Простую аналогию*, при которой по сходству объектов в некоторых признаках заключают их сходство в других признаках;
2. *Распространенную аналогию*, при которой из сходства явлений делают вывод о сходстве причин.

В свою очередь, простая и распространенная аналогия может быть:

а) *строгой аналогией,* при которой признаки сравниваемых объектов находятся во взаимной зависимости;

б) *нестрогой аналогией,* при которой признаки сравниваемых объектов не находятся в явной взаимной зависимости.

Аналогия является, пожалуй одним из самых распространенных методов научного исследования. Широкое применение аналогий часто приводит исследователя к более или менее правдоподобным предположениям о свойствах изучаемого объекта, которые могут быть затем подтверждены или опровергнуты опытом или более строгими рассуждениями.

Таким образом, имеет смысл говорить о “полезной” и о “вредной” аналогии. Примером “полезной аналогии” является, в частности, мысленный перенос многих понятий и суждений, относящихся к планиметрии, в геометрию трехмерного пространства. Например: “Прямоугольник аналогичен прямоугольному параллелепипеду. В самом деле, отношения между сторонами прямоугольника сходны с отношениями между гранями параллелепипеда:

Каждая сторона прямоугольника параллельна и равна одной другой стороне и перпендикулярна остальным.

Каждая грань прямоугольного параллелепипеда параллельна и равна одной другой грани и перпендикулярна остальным”

Заметим, что не менее явная аналогия существует и между площадью прямоугольника и объемом прямоугольного параллелепипеда. Причем эта аналогия проявляется весьма широко, начиная от сходства формул S = a \* b и V = a \* b \* c и кончая сходством в структуре вывода этих формул (распадающегося на случаи, когда измерения названных фигур выражаются натуральными, положительными рациональными и действительными числами).

В качестве примера “вредной аналогии” можно привести перенос известных законов сложения конечных сумм на бесконечные.

Вот к каким результатам можно придти, если, в частности, применить эту аналогию при нахождении суммы ряда

S = 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 + … :

1. используя свойство прибавления разности, получим:

S = (1 –1) + (1 – 1)+(1 – 1)+ … = 0 + 0 + 0 … = 0

б) используя свойство вычитания разности, получим:

S = 1 – (1 – 1) – (1 – 1) – (1 – 1) = 1 – 0 – 0 – 0 - … = 1

в) используя сочетательное свойство для алгебраической суммы, имеем:

S = 1 – (1 – 1 + 1 - … ), или S = 1 – S, откуда 2S = 1 и S = ½

Понятно, что примененная здесь аналогия является незаконной; слишком глубокое качественное различие между конечным и бесконечным в математике уменьшает число аналогичных свойств, присущих тому и другому.

По степени полноты различают частичные и полные сравнения. Полное сравнение устанавливает и сходство, и отличие. Частичное сравнение позволяет глубже осознать отличительное в изучаемом учебном материале.

По способам осуществления различают сравнения параллельные, последовательные отсроченные. Параллельные сравнения используются при изложении материала укрупленными блоками, когда одновременно изучаются взаимосвязанные понятия, теоремы, задачи. При последовательном сравнении новый объект сравнивается с ранее изученными. При отсроченном сравнении сравниваемые объекты значительно значительно удалены друг от друга во времени. В установлении аналогий плоских и пространственных фактов имеют место все три типа сравнений.

Укажем схему, по которой следует проводить сравнение понятий.

1. Выделение признаков понятий.
2. Установление общих и существенных признаков.
3. Выбор одного из существенных признаков.
4. Сопоставление понятий по выбранному основанию.

***АНАЛОГИЯ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ***

В процессе обучения математике учителю следует не только самому пользоваться полезными аналогиями, но и приобщать учащихся к самостоятельному проведению умозаключений по аналогии. При этом учащиеся должны понимать, что выводы, полученные по аналогии, требуют обязательного обоснования, так как не исключено то, что они могут оказаться ошибочными. Например, по аналогии с известными признаками делимости на 3 и на 9 можно сформулировать вероятный признак делимости на 27: “ Если сумма цифр числа делится на 27, то и само число делится на 27”. Однако это утверждение неверно и убедиться в этом можно на каком–нибудь конкретном примере (272745).

Приведем еще один пример.

Учитель спрашивает школьника:

* Как изменится площадь прямоугольника, если его основание увеличить в 2 раза, а боковую сторону уменьшить также в 2 раза?
* Площадь не изменится.
* Правильно. А если основание прямоугольника увеличить на 20%, а боковую сторону уменьшить на 20%, изменится ли его площадь?
* Нет, не изменится.

Последний ответ школьника уже не верен. В самом деле, обозначив основание прямоугольника через *а*, а боковую сторону через *b*, имеем: *S = a \* b* .

В соответствии с условием основание измененного прямоугольника *а1 = а + 0.2а* и боковая сторона *b1 = b – 0.2b.* Тогда *S1* = *a1 \* b1 = a(1 + 0.2) \* b(1 – 0.2) = ab – 0.04ab.*

Таким образом, площадь прямоугольника уменьшится в этом случае на 4%.

Однако следует помнить, что широкое применение аналогии в процессе обучения математике является одним из эффективных приемов, способных пробудить у учащихся живой интерес к предмету, приобщить их к тому виду деятельности, который называют исследовательским. Кроме того, широкое применение аналогии дает возможность более легкого и прочного усвоения школьниками учебного материала, так как часто обеспечивает мысленный перенос определенной системы знаний и умений от известного объекта к неизвестному (что, кстати говоря, способствует также актуализации знаний).

Поэтому полезны и специально подобранные упражнения в применении метода аналогии, такие, например, как: 1) верно ли утверждение: ”Если в треугольнике все углы конгруэнтны, то и стороны конгруэнтны”? (сформулируйте аналогичное предположение для шестиугольника. Верно ли оно?) или 2) справедливо ли утверждение: “Сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри (или на стороне) правильного треугольника до его сторон, есть величина постоянная “? Сформулируйте аналогичное предложение для какого либо многоугольника. Проверьте, будет ли оно истинным.

Применение аналогии распадается на следующие действия: построение аналогов различных заданных объектов и отношений; нахождение соответствующих элементов в аналогичных предложениях; составление предложений или задач, аналогичным данным; проведение рассуждений по аналогии.

Уже в младших классах второй ступени целесообразно подчеркивать аналогию между некоторыми плоскими и пространственными фигурами. Например, между прямоугольником и прямоугольным параллелепипедом, между квадратом и кубом. Аналогия между квадратом и кубом состоит в том, что у квадрата его измерения равны и у куба его измерения равны. Учащиеся могут и сами догадаться, что грани куба – равные квадраты, все стороны квадрата – равные отрезки.

При знакомстве с понятиями ***площадь***и ***объем*** можно установить аналогию между единицами длины и единицами площади, между единицами объема и единицами площади. Одновременно следует обратить внимание на сходство в формулировках определений понятий. Например, повторив с учащимися понятие ***квадратный сантиметр***(квадратный сантиметр – **это площадь** квадрата со стороной 1 см), можно попросить самостоятельно дать определение понятию ***кубический сантиметр***.

Учащиеся иногда затрудняются быстро и правильно ответить на вопросы типа: “ Сколько квадратных сантиметров в 1 дм2? Сколько кубических сантиметров в 1 дм3?” Устранению таких трудностей способствует иллюстрация сходства между операциями перехода от линейной единицы измерения к квадратной или кубической. В обоих случаях вычисляется произведение одинаковых множителей, причем число множителей в произведении равно показателю при единице измерения: 1 дм2 = 10 \* 10 см2, 1 дм3 = 10 \* 10 \* 10 см3.

Формировать умение составлять предложение, аналогичное данному, можно при изучении признаков делимости. Рассмотрев с учащимися признак делимости, например, на 3, следует предложить им самим сформулировать признак делимости на 9. Ниже приведены те предложения, которые давал учитель ((1) – (4)), и те, что формулировали учащиеся по аналогии ((1\*) – (4\*)).

1. На 3 делятся те и только те числа, у которых сумма цифр делится на 3.
2. На 5 делятся те и только те числа, в записи которых последняя цифра 0 или 5.
3. Число делится на 6, если оно делится на 2 и на 3.
4. На 4 делятся те числа, у которых две последние цифры нули или образуют число, делящееся на 4.

(1\*) На 9 делятся те и только те числа, у которых сумма цифр делится на 9.

(2\*) На 25 делятся те и только те числа, в записи которых две последние цифры нули или образуют число, делящееся на 25.

(3\*) Число делится на 8, если оно делится на 2 и 4.

(4\*) На 8 делятся те числа, у которых две последние цифры нули или образуют число, делящееся на 8.

Следует провести сравнение предложений. Одновременно необходимо подчеркнуть, что если данные высказывания (1) – (4) истинны, то необязательно окажутся истинными высказывания, полученные из данных по аналогии. Учащиеся должны знать, что для установления ложности какого – либо утверждения достаточно привести хотя бы один пример, опровергающий его. Так, высказывания (3\*) и (4\*) являются ложными: 12 делится на 2 и на 4, но не делится на 8; 100 и 164 не делятся на 8. Теперь важно показать, что 4 можно представить в виде произведения двух одинаковых множителей (4 = 2 \* 2), а 8 – в виде произведения трех одинаковых множителей (8 = 2 \* 2 \* 2). Установив такое различие, учащиеся могут заметить, что в утверждении (4) рассматриваются такие числа, у которых количество последних цифр – нулей равно числу простых множителей в разложении числа 4. Это наблюдение поможет сформулировать истинное утверждение вместо (4\*): *на 8 делятся те числа, у которых три последние цифры нули или образуют число, делящееся на 8.*

При изучении темы «Сложение десятичных дробей» метод аналогии можно использовать для того, чтобы подвести учащихся к формулировке правила сложения десятичных дробей. Для этого нужно параллельно рассмотреть сложение натуральных чисел и сложение десятичных дробей (так, как это показано в табл. 1).

Таблица 1

|  |  |
| --- | --- |
| Натуральные числа949 + 835 Подписываем слагаемые одно под слагаемых находились друг под другом.949 +8351784Выполняем сложение поразрядно,  | Десятичные дроби95.37 + 101.4другим так, чтобы одинаковые разряды 95.35 + 101.40 196.75Так как число 101.4 не имеет сотых долей, то вместо сотых ставим 0.начиная с единиц низшего разряда. |

Мы уже говорили о том, что умозаключения по аналогии могут приводить как к верным заключениям, так и к ошибочным; это часто является источником неверных действий учащихся. Упрочнению их способствует обычно и формальное усвоение материала. Особенно много таких ошибок учащиеся допускают в курсе алгебры. Поэтому полезно сравнивать верные соотношения с неверными, например:

5 \* 3 = 3 \* 5, но 53≠ 35; √5а2 = √5 \* √а2, но √5 + а2 ≠ √5 + √а2;

а \* с ./ в \* с = а / в, но а + с / в + с ≠ а / в (с ≠ 0).

Доказательство того, что равенство нарушается, проще всего провести, подставив вместо букв числа и проведя нужные вычисления.

Богатым материалом для обучения приему аналогии располагает геометрия. В начале изучения курса геометрии основное внимание следует уделить выделению соответствующих элементов из аналогичных задач и теорем. Например, рассмотрим две пары задач из учебного пособия А. В. Погорелова «Геометрия 6 –10» (М., 1985).

|  |  |
| --- | --- |
| Докажите, что у равнобедренного треугольника биссектрисы, проведенные из вершин при основании, равны (§3, №20 (1)).Докажите равенство треугольника по двум сторонам и медиане, исходящим из одной вершины (§3, №38).  | Докажите, что у равнобедренного треугольника медианы, проведенные из вершин при основании, равны (§3, №20 (2)).Докажите равенство треугольников по медиане и углам, на которые медиана разбивает угол треугольника (§3, №40). |

Для *биссектрисы* в задаче №20(1) соответственным элементам в задаче №20(2) является *медиана*. В задачах второй пары соответственными элементами оказались:

*Две стороны, исходящие из одной вершины* (№38), - *два угла, на которые медиана разбивает угол треугольника* (№40). Указанные задачи полезно решить непосредственно друг за другом, оформляя решение «параллельно», т. е. с левой стороны одно решение, с правой – другое. Разобрав решения, следует подчеркнуть, что каждый шаг одного из них можно перенести в другое, применив его к соответственным элементам.

Умение применять аналогию нужно поддерживать от класса к классу, пользуясь любыми возможностями. Так, при решении задачи об углах при основании равнобедренной трапеции следует вскрыть ее свойство с теоремой об углах при основании равнобедренного треугольника. Полезно записать «параллельно» оба доказательства так, как это показано в табл. 2.

Таблица 2

|  |  |
| --- | --- |
| Теорема 3 из §3*В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.*Доказательство:1. Пусть АВС – равнобедренный треугольник (АС=СВ). Из вершины С проведем высоту СД.
2. ∆АСД=∆ВСД по катету и гипотенузе (СД – общая, АС=СВ по условию).

Отсюда  ∠А=∠В. | Задача 53 из § 6*Доказать, что углы при каждом основании равнобедренной трапеции равны.*Доказательство:1. Пусть АВСД – равнобокая трапеция (АД=СВ). Из вершин Д и С проведем высоты ДЕ и СF.
2. ∆АДЕ=∆ВСF по катету и гипотенузе (ДЕ=СF, так как АВ║СД; АД=СВ по условию).

Отсюда ∠А=∠В и ∠АДЕ=∠ВСF;∠АДС=∠АДЕ + 90, отсюда следует, что∠0ДСВ=∠ВСF + 90 ∠АДС=∠ДСВ |

Задачи, аналогичные данным, учащиеся могут составлять самостоятельно и решать их.

Приведем краткий список аналогичных задач на построение из учебного пособия А. В. Погорелова «Геометрия 6 – 10» (1985)

|  |  |
| --- | --- |
| Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне (§5,№ 27).Постройте параллелограмм по стороне и двум диагоналям (§6, №19(2)).Постройте треугольник, если заданы сторона, прилежащий к ней угол и сумма двух других сторон (§5, № 41). |  Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, опущенной на третью сторону (§5, №31).Постройте трапецию по основаниям и диагоналям (§6,№ 66).Постройте треугольник, если заданы сторона, прилежащий к ней угол и разность двух других сторон (§5, № 42). |

 В табл. 3 даны решения двух задач на построение, на которых удобно демонстрировать аналогию.

Таблица 3

 *Постройте трапецию по диагона- Постройте параллелограмм по диа-*

лям , углу между ними и одному из гоналям и углу между ними (§6, № 20(2)).

оснований.

А н а л и з

 Предположим, что трапеция АВСД Предположим, что параллелограмм

построена (см. рисунок). АВСД построен (см. рисунок).

Р Д С Д С

 А В В1  А В В1

Попробуем построить сначала треугольник,

используя данные нашей задачи.

Через одну из вершин (С)

 Трапеции Параллелограмма

проведем прямую, параллельную диагонали ВД, до пересечения с продолжением основания АВ. Получим треугольник АВ1С, который можно построить по двум сторонам и углу между ними (АС – дано, С В1 = ВД, так как В В1СД параллелограмм, ∠ АСВ1 = ∠ АОВ как соответственные углы при параллельных прямых ВД и СВ1).

# П о с т р о е н и е

Строим треугольник АС В1 по двум сторонам и углу между ними.

 От точки А на стороне А В1  отло- Из вершины С проведем медиану СВ.

жим отрезок, равный АВ. Через точ- через точки В и С проведем прямые,

ку С проведем прямую СР, парал- параллельные соответственно В1С и

лельную основанию АВ; затем через АВ. Точка Д пересечения этих прямых

точку В проведем прямую, параллель- будет четвертой вершиной искомого

ную В1С, до пересечения с прямой СР. параллелограмма АВСД.

Точка Д пересечения этих прямых

будет четвертой вершиной искомой

трапеции АВСД.

Мы описали различные подходы к обучению метода аналогии школьников 11-13 лет. По мере взросления учащихся им все чаще будут встречаться возможности для применения аналогии. Она может использоваться при формировании многих понятий стереометрии, при доказательстве теорем и решении задач. Однако учащиеся реализуют эти возможности лишь после специального обучения.

***ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ РОЛЬ АНАЛОГИИ В ПЛАНИМЕТРИИ И СТЕРЕОМЕТРИИ***

В действующем школьном курсе геометрии абсолютное большинство стереометрических фактов излагается без установления внутрипредметных связей с аналогичными планиметрическими фактами. Примером тому может служить изолированное изложение таких тем, как «Треугольник и его свойства» и «Тетраэдр и его свойства»; «Окружность, круг и его свойства» и «Сфера, шар и их свойства» и т. д. Все это есть следствие линейного построения курса геометрии. Целесообразно же на основе линейно – концентрической организации курса увязать эти плоскостные и пространственные темы. Развернем отмеченное положение несколько шире вначале в теоретическом, а затем и в практическом аспекте.

Различные формы уровневой и профильной дифференциации могут быть реализованы на практике в полной мере лишь в том случае, если будут подготовлены соответствующие учебники, в том числе и по геометрии. Эти учебники должны не только быть разными по содержанию и по форме изложения, но и иметь существенно различную логико-структурную организацию. Сейчас школьные учебники геометрии ориентированы в основном на аксиоматическое и силлогистическое изложение. Чрезмерное же акцентирование в обучении дедуктивного характера математики создает серьезную опасность для математического образования. В обучении математике в целом, равно как и в обучении геометрии, необходимо сочетание логики и интуиции, дедукции и индукции, конкретизации и обобщения, анализа и синтеза.

Целесообразна трансформация линейного построения содержания школьного курса геометрии в линейно – концентрическое, что даст возможность проводить глубокие сравнения, широкое обобщение, выдвигать гипотезы и предположения, переносить знания, умения и навыки в новую ситуацию, переосмысливать с новых, более общих позиций уже изученный ранее изученный материал. Большую роль при этом будут играть аналогии, интуитивные рассуждения, позволяющие приобщить учащихся к исследовательской деятельности.

Курс школьной геометрии должен быть таким, чтобы он прежде всего побуждал учащихся к постановке вопросов, выдвижению гипотез, создавал бы условия для эффективных поисков. Реализация идей уровневой и профильной дифференциации предполагает одновременное существование как учебников геометрии, построенных на глобальной аксиоматической организации теории, так и учебников, построенных на идеях локальной аксиоматизации и локальной дедукции. Здесь налицо создание таких учебников геометрии, в котором бы разумнее дозировались логический и интуитивный компоненты; школьный курс геометрии есть «химическое соединение интуиции и логики».

Глобальная аксиоматизация должна завершать, а не начинать длительный процесс развития теории; локальная индукция позволяет сделать главным в обучении геометрии не развитие теории из готовой аксиоматики, а процесс создания аксиоматики. Такой подход в большей степени, чем традиционный, обеспечивает взаимодействие наглядно – образного и словесно – логического мышления.

На примерах покажем, что многие пространственные факты являются обобщениями плоскостных аналогов. Приведенный ниже материал может служить хорошим подспорьем в организации исследовательской работы учащихся.

П р и м е р 1. Плоскостная изопериметрическая теорема – пространственная изопериметрическая теорема.

Часто можно слышать расхожую фразу: «Круг и шар – наиболее совершенные фигуры». Какой смысл вкладывается в это высказывание? Рассуждения, приведенные ниже, прольют свет на поставленный вопрос.

В планиметрии известна такая теорема: «Из всех изопериметрических плоских фигур наибольшую площадь имеет круг». Другими словами эту теорему можно сформулировать иначе: «Из всех плоских фигур равного периметра наибольшую площадь имеет круг».

 Пусть S – площадь фигуры, L – длина периметра данной фигуры. Допустим, что данная фигура и круг с радиусом *r* являются изопериметрическими: L = 2π*r*, тогда S ≤ π*r*2. Подставляя вместо *r* его выражение через L (*r =* L/2π), преобразуем неравенство: 4πS/L2 ≤ 1.

 Частное 4πS/L2 зависит только от формы фигуры и не зависит от его размеров. Действительно, если мы, не изменяя формы, увеличим линейные размеры фигуры в отношении ½, то периметр станет равен 2L, а площадь - 4S, но частное S/L2 , как и частное 4πS/L2 , остается неизменным. Эта закономерность справедлива при увеличении линейных размеров в любом отношении.

 Плоскостная изопериметрическая теорема может быть сформулирована и в таком виде: «Из всех плоских фигур равной площади наименьший периметр имеет круг».

 Аналогом, в стереометрии этой последней формулировке теоремы будет такая теорема: «Из всех тел равного объема наименьшую поверхность имеет шар».

 Изопериметрическое неравенство для объемных тел будет записано в следующем виде: 36πV2 / S3 ≤ 1, где V – объем тела, S – площадь полной поверхности тела.

 Заметим, что эта стереометрическая изопериметрическая теорема позволяет ответить на вопрос: «Почему заварной чайник круглой формы остывает медленнее, чем чайник такого же объема, но другой формы?»

 Читателю будет небезынтересно узнать своеобразную трактовку изопериметрической теоремы, которую приводит Д. Пойа в своей книге «Математика и правдоподобные рассуждения» (М.: Наука, 1975. С. 187): «К изопериметрической теореме нас могут привести совсем примитивные рассмотрения. Мы можем научиться ей у кота. Я думаю, вы видели, что делает кот, когда в холодную ночь он приготовляется ко сну: он поджимает лапы, свертывается и таким образом делает свое тело насколько возможно шарообразным. Он делает так, очевидно, чтобы сохранить тепло, сделать минимальным выделение тепла через поверхность своего тела. Кот, не имеющий ни малейшего намерения уменьшить свой объем, пытается уменьшить свою поверхность, делая себя возможно более шарообразным. Судя по всему, он имеет некоторое знакомство с изопериметрической теоремой».

 Изложенная выше стереометрическая изопериметрическая теорема позволяет по новому, совсем с других позиций изучать тему «Тела вращения».

 Известная формула для вычисления комфортности жилища: K = 36πV2 / S3 , где K – изопериметрический коэффициент комфортности, V – объем жилища, S – полная поверхность жилища, включая и пол. Учащимся можно предложить подсчитать коэффициент комфортности восточносибирского чума (рис. 1), яранги континентальных эскимосов Аляски (рис. 2), жилища береговых чукчей (рис. 3), жилища аборигенов Северной Австралии (рис. 4), жилища народов кирди в Камеруне (рис. 5), нашего обычного жилища в форме прямоугольного параллелепипеда (рис. 6).

 Изопериметрический коэффициент K всегда меньше единице или равен ей. Единственное тело, имеющее коэффициент, равный единице, - это шар. Не потому ли неопознанные летающие объекты шарообразны (как утверждают те, кто их видел)?

 П р и м е р 2. Принцип Кавальери для плоских фигур – принцип Кавальери для пространственных фигур.

 Итальянский математик Бонавертура Кавальери (1598 – 1647) в своем основном труде «Геометрия» (1635) развил новый метод определения площадей и объемов – так называемый метод неделимых. Неделимыми он называл параллельные между собой хорды плоской фигуры или параллельные плоскости тела. Б. Кавальери доказал теорему, согласно которой площади двух подобных фигур относятся, как квадраты, а объемы – как кубы соответствующих неделимых. Эта теорема вошла в математику под названием принципа Кавальери. Приведем его формулировку.

 Д л я п л о с к о с т и. Если две фигуры могут быть перемещены в такое положение, что всякая прямая, параллельная какой-нибудь данной прямой и пересекающая обе фигуры, дает в сечении с ними равные отрезки, то такие фигуры равновелики.

 Примером могут служить два параллелограмма (рис. 7) с равными основаниями и равными высотами.

 Д л я п р о с т р а н с т в а. Если две объемные фигуры могут быть помещены в такое положение, что всякая плоскость, параллельная какой-нибудь заданной плоскости и пересекающая обе фигуры, дает в сечении с ними плоские фигуры равной площади, то такие фигуры равновелики.

 Примером могут служить две пирамиды с равными основаниями и равными высотами (рис. 8).

 П р и м е р 3. Докажем для тетраэдра теорему, аналогичную теореме Пифагора для прямоугольного треугольника:

 «Если три грани тетраэдра – прямоугольные треугольники (рис. 9), то S12+S22 + S32= S42 , где S1, S2, S3 – площади граней, составляющих прямой угол, S4 – площадь четвертой грани, лежащей против прямого трехгранного угла”.

 Доказательство. Пусть длины катетов прямоугольных треугольников соответственно равны: у ∆АВД – а и b; у ∆АДС – а и d; у ∆АСВ – b и d, тогда

 S1 = SАДВ = ½ аb; S2 = SАДС = ½ ad;

 S3 = SАСВ = ½ bd. (1)

 Для того чтобы найти S4 , найдем гипотенузу ∆АСВ: ВС = √b2 + d2. Высота основания, проведенная к гипотенузе ВС, равна

АМ = bd + d/√b2 +d2 .

 Высоту четвертой грани (∆ДВС) будем искать по теореме Пифагора:

ДМ = √а2 + bd/b2 + d2 .

 Тогда

S4 = ½/√b2 +d2 \*  √а2 + bd/b2 + d2  = ½/√b2 +d2 \* √ а2 d2 + а2 b2 + b2d2 /√b2 +d2 = ½ √ а2 d2 +а2 b2 + b2d2;

S42 = ¼(а2 d2 + а2 b2 + b2d2) (2)

 Согласно равенствам (1), имеем:

 S12+S22 + S32 =¼ а2 d2 +¼а2 b2 +¼ b2d2 = ¼(а2 d2 + а2 b2 + b2d2).

 Так как равые части последнего равенства и равенства (2) равны, то равны и левые части:

S12+S22 + S32 = S42.

 На случай пространства можно сформулировать и доказать и такую обобщенную теорему Пифагора для проекций: «Квадрат длины любого отрезка равен сумме квадратов длин его проекций на любые три взаимно перпендикулярные прямые».

 П р и м е р 4. Сформулируем для тетраэдра теорему, которая является аналогом такой плоскостной теоремы:

 «Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся, как произведения сторон, заключающих равные углы».

 Формулировка аналогичной теоремы для пространства:

 «Если трехгранных угол одного тетраэдра равен трехгранному углу другого тетраэдра, то объемы этих тетраэдров относятся, как произведения длин ребер этих тетраэдров, выходящих из вершин этих трехгранных углов».

 П р и м е р 5. В планиметрии рассматривается такая задача:

 «Как изменится площадь треугольника, если его высоту увеличить на m единиц?”

 Решим ее. S = ½ ah, где a – основание треугольника, а h – высота треугольника.

 S1 = ½ a(h + m) = ½ ah + ½ am; S - S1 = ½ am.

 С геометрической точки зрения увеличение площади данного треугольника равно площади треугольника с тем же основанием a и высотой m (рис. 10). Следовательно, площади заштрихованных частей равны между собой.

 Аналог этой задачи в стереометрии:

 «Дана пирамида. Как изменится ее объем, если высоту увеличить на m единиц?»

 Р е ш е н и е. 1

V = 1/3 Sосн \* H; V1 = 1/3 Sосн \* (H + m) = 1/3 Sосн  \* H + = 1/3 Sосн \* m.

Имеем:

V1 – V= 1/3 Sосн \* m,

Т. е. увеличение объема равно объему пирамиды с таким же основанием и высотой, равной m единиц.

 Заметим, что аналогичную задачу можно рассмотреть и для конуса.

 П р и м е р 6. Рассмотрим планиметрическую задачу:

 “Имеются два треугольника с равными основаниями. Постройте треугольник, равновеликий объединению данных треугольников”.

 Р е ш е н и е.

S = ½ ah1 + ½ ah2 = ½ a(h1 + h2),

т. е. искомый треугольник должен иметь такое же основание, что и у исходных треугольников, и его высота должна быть равна сумме высот исходных треугольников.

 Этой задаче в стереометрии есть аналог:

 «Две пирамиды (конуса) с равными основаниями замените одной пирамидой (конусом), равновеликой их объединению».

 Р е ш е н и е.

 V = 1/3 Sосн \* H1 + 1/3 Sосн \* H2 = 1/3 Sосн \* (H1 + H2).

 Таким образом, искомая пирамида (конус) должна иметь такое же основание, а ее высота должна быть равна сумме высот исходных пирамид (конусов).

 П р и м е р 7. В планиметрии на случай прямоугольного треугольника решается задача:

 «Пусть дан прямоугольный треугольник АВС: ∠С = 90°; СА = b, СВ = а, h - высота треугольника, проведенная из вершины С. Доказать равенство

1/h2=1/a2+1/b2».

 Это равенство может быть обобщено на случай тетраэдра:

 «Если в тетраэдре АВСЕ ребра ЕА, ЕВ, ЕС перпендикулярны между собой и их длины соответственно раны a, b, c и h – высота тетраэдра, проведенная из вершины Е, то имеет место равенство:

1/h2=1/a2+1/b2+1/с2».

П р и м е р 8. В планиметрии рассматривается следующая задача на доказательство:

 «Даны две параллельные прямые; на одной из них произвольно взят отрезок АВ, а на другой - точка С. Докажите, что площадь треугольника АВС не зависит от выбора точки С».

 Для трехмерного пространства, где аналогом треугольника выступает тетраэдр, эта задача будет формулироваться следующим образом:

 Даны три параллельные прямые, не лежащие в одной плоскости. На одной из них произвольно выбран отрезок АВ, на двух прямых – точки С и Д соответственно. Докажите, что объем тетраэдра АВСД не зависит от выбора точек С и Д».

 В приведенных примерах параллельно формулировался плоскостной и аналогичный ему пространственный факт. Но, как показывает практика, для развития творческого развития учащихся, для формирования у них исследовательских умений, в частности умения строить гипотезы и выдвигать предположения, значительно полезнее предлагать школьникам самостоятельно формулировать, а затем и решать для плоскостных фактов их пространственные аналоги. Причем должны быть задачи как на прямое действие – переход от плоскости к пространству, так и на обратное действие – переход от пространства к плоскости. Ниже приведены задачи такого типа.

1. Сформулируйте на случай трехмерного пространства задачи, аналогичные нижеследующим плоскостным задачам, и затем решите их.
2. Биссектрисы трех углов треугольника пересекаются в одной точке, являющейся центром окружности, вписанной в треугольник.
3. Площадь круга равна площади треугольника, основание которого имеет ту же длину, что и окружность, и высота которого равна радиусу.
4. Высота равнобедренного треугольника проходит через середину основания.
5. На сколько частей плоскость делится тремя прямыми?
6. Всякий выпуклый многоугольник можно разбить на треугольники.
7. Сформулируйте для треугольника задачи, аналогичные тем, которые сформулированы ниже для тетраэдра. Решите каждую полученную пару задач.
8. На основании АВС треугольной пирамиды ОАВС взята точка М, и через нее проведены прямые, параллельные ребрам ОА, ОВ, ОС и пересекающие боковые грани в точках А1, В1, С1.

Докажите, что

МА1/OA+MВ1/OB+MС1/OC=1.

1. Докажите, что в трехгранном угле против плоских углов лежат равные двухгранные, а против большого плоского угла лежит больший двухгранный угол.
2. Докажите, что существует сфера, проходящая через все вершины тетраэдра.
3. Каждое ребро треугольной пирамиды разделено на n равных частей. Через полученные точки проведены всевозможные плоскости, параллельные граням пирамиды. На сколько частей разделяют пирамиду эти плоскости?
4. Пусть О – вершина трехгранного угла, все плоские углы которого прямые. Луч ОМ образует с ребрами этого угла острые углы α, β, δ. Докажите, что

tgα + tgβ + tgδ ≥ 2(ctgα + ctgβ + ctgδ).

1. Сумма любых двух плоских углов трехгранного угла больше, чем третий плоский угол. Докажите.
2. Какой из всех тетраэдров, вписанных в данную сферу, имеет наибольший объем?
3. Даны длины a, b, c трех ребер тетраэдра, проведенных из одной и той же вершины. Найдите максимум объема тетраэдра.
4. Если точка перемещается в плоскости основания правильной треугольной пирамиды и остается внутри этого основания, то сумма расстояний от этой точки до боковых граней остается постоянной.
5. Объемы двух тетраэдров, имеющих общее ребро и равные двугранные углы, при этом ребре, относятся, как произведения площадей граней, образующих этот двугранный угол.
6. Через каждую вершину тетраэдра проведена плоскость, параллельная противоположной грани. Найти отношение объема образованного таким образом нового тетраэдра к объему данного тетраэдра.
7. Через каждое ребро тетраэдра проведена плоскость, параллельная противоположному ребру. Найдите отношение объема образованного таким образом параллелепипеда к объему данного тетраэдра.
8. Найдите такую точку, которая, будучи соединена с вершинами данного тетраэдра, делила бы его не четыре равных тетраэдра.

Подчеркивая важность работы, предложенной в двух последних заданиях, уместно привести высказывание Д. Пойа о том, что если учащийся не имел ни одного случая решить задачу, изобретенную им самим, то его математический опыт нельзя считать полным.

***АНАЛОГИЯ В ТЕОРЕМАХ О ПРЯМОЙ ЭЙЛЕРА, ОКРУЖНОСТИ И СФЕРЕ***

 В данном пункте будет приведен пример совместного рассмотрения известных теорем Эйлера, как на плоскости, так и в пространстве. Приведенные ниже утверждения достаточно известны, а их доказательства можно прочитать, например, в книгах И. Ф. Шарыгина «Задачи по геометрии» или В. В. Прасолова «Задачи по планиметрии».

 Будут использованы следующие определения:

 *Ортоцентр –* точка пересечения высот (если она существует)

 *Ортоцентрический тетраэдр –* тетраэдр, все высоты которого пересекаются в одной точке. (Далее все рассматриваемые тетраэдры будут только такими и термин ортоцентрический будет опущен.)

 *Центр масс (центроид)* системы точек А1, А2, …,Аn – такая точка О, что ОА1+ ОА2 + … +ОАn = 0.

 Для большей наглядности приведем основные используемые понятия в виде таблицы.

|  |  |
| --- | --- |
| **Плоскость**Треугольник, Центр масс – точка пересечения медиан, описанная окружность.Ортоцентр, центр масс и центр описанной окружности лежат на одной прямой, называемой *прямой Эйлера*.*Серединный треугольник* – треугольник с вершинами в серединах сторон (основаниях медиан),*Ортотреугольник –* треугольник с вершинами в основаниях высот.Для любого треугольника основания высот, основания медиан и середины отрезков прямых от ортоцентра до вершин треугольника лежат на одной окружности – *окружности девяти точек (окружности Эйлера).* В частности, серединный треугольник и ортотреугольник вписаны в одну окружность.  | **Пространство**Тетраэдр,Центр масс – точка пересечения отрезков, соединяющих вершину с точкой пересечения медиан противоположной грани, она же точка пересечения средних линий (соединяющих середины противоположных ребер), описанная сфера.Ортоцентр, центр масс и центр описанной сферы лежат на одной прямой, называемой *прямой Эйлера.**Серединный тетраэдр –* тетраэдр с вершинами в точках пересечения медиан граней,*Ортотетраэдр –* тетраэдр с вершинами в основаниях высот исходного тетраэдра.Для любого ортоцентрического тетраэдра центр масс и ортоцентры граней, а также точки, делящие отрезки каждой высоты тетраэдра от вершины до точки пересечения высот в отношении 2/1, лежат на одной сфере – *сфере 12 точек (сфере Эйлера).* В частности, серединный тетраэдр и ортотетраэдр вписаны в одну и ту же сферу.**Замечание:** ортоцентричность исходного тетраэдра равносильна тому, что его основания высот совпадают с точками пересечения высот противоположных граней. Для любого ортоцентрического тетраэдра окружности девяти точек каждой грани принадлежат одной сфере – *сфере 24 точек* (основания высот, проведенных к одному и тому же ребру, для ортоцентрического тетраэдра совпадают). |

 На внеклассных занятиях со старшеклассниками и занятиях по методике всячески практикуют “выходы в пространство”, использующие аналогию геометрических понятий. Школьники получают большое удовольствие, обнаруживая невидимые ранее связи. Причем не ограничиваются обсуждением доказательств теорем, но часто разбираются подобные теоремы, переформулируя их как задачи на построение. Для наглядной демонстрации подобной работы вновь следует обратиться к приведенным выше прямым и окружностям Эйлера. В качестве наиболее простой задачи предлагается рассмотреть равнобедренный прямоугольный треугольник и перенести полученные результаты на равнобедренный прямоугольный тетраэдр. Чтобы облегчить оформление рисунков и формулировку получаемых утверждений при обобщении обеих теорем Эйлера на пространство, рекомендуем выполнить рядом два рисунка, ввести аналогичные обозначения и постоянно сравнивать “плоские” и “пространственные” результаты. Причем, обнаружив и доказав какое-либо утверждение для плоского случая необходимо тут же стремиться отыскать его аналог для пространства.

|  |  |
| --- | --- |
| **Плоскость****1 этап:** построение∠А3А1А2=90°, H1, H2А2= А1А3, М1, М2, М3 – середины соответствующих сторон, H1, H2, H3 – основания высот, опущенных на стороны треугольника. Ц – центроид (в данном случае точка пересечения медиан).**2 этап:** анализ1. М1= H1 по свойству равнобедренного треугольника.
2. А1= H2= H3, так как треугольник прямоугольный.
3. Вершина прямого угла А является также ортоцентром треугольника А1А2А3.
4. Середина гипотенузы М1 является также центром описанной окружности (М1А1= М1А2= М1А3).
5. М1М2М3  - серединный треугольник.
6. Ортотреугольник H1H2H3 выражается в отрезок А1М1.
7. Середины отрезков высот, опущенных из вершин А2 иА3, от ортоцентра до соответствующих вершин совпадают с серединами сторон А1А2 иА3А4 соответственно.

**3 этап:** выводы1. Ортоцентр треугольника, его центроид и центр описанной окружности лежит на одной прямой А1М1 (прямая Эйлера).
2. Точки А1, М1, М2, М3 лежат на одной окружности с центром в середине отрезка А1М1 и радиусом равным А1М1/2.

**Доказательство:** пусть О – середина А1М1. Тогда треугольники А1М2М1 и А1М3М1 прямоугольные (по свойству средних линий треугольника) и, следовательно, М2О= М3О= А1М1/2 как медианы прямоугольных треугольников.1. Таким образом, вершины серединного треугольника, ортотреугольника и середины отрезков высот лежат на одной окружности (окружности Эйлера).
2. Радиус окружности Эйлера равен половине радиуса описанной окружности.

  | **Пространство****1 этап:** построение∠А3А1А2=∠А3А1А4=∠А4А1А2=90°, А1А2= А1А3= А1А4; М1, М2, М3, М4 – центры масс (точки пересечения медиан соответствующих граней), H1, H2, H3, H4  - основания высот, опущенных на грани тетраэдра. Ц – его центроид (в данном случае точка, делящая отрезок А1М1 в отношении 3/1, считая от вершины).**2 этап:** анализ1. М1= H1, так как треугольник А2А3А4 – равносторонний и все его медианы являются также и высотами (по свойству ортоцентрического тетраэдра, основание высоты, опущенной из вершины А1, совпадает с точкой пересечения высот).
2. А1= H2= H3= H4, так как соответствующие грани являются прямоугольными треугольниками;
3. Вершина прямого угла А1 является также ортоцентром тетраэдра А1А2А3А4.
4. Центр описанной сферы лежит на прямой, содержащей высоту А1H1, опущенную на грань А2А3А4 (H1 совпадает с точкой пересечения медиан М1 этой грани, а множество точек пространства, равноудаленных от вершин треугольника, есть перпендикуляр, проходящий через точку пересечения его медиан).
5. М1М2М3М4 – серединный тетраэдр.
6. Ортотетраэдр H1H2H3H4 выражается в отрезок А1М1.
7. Середины отрезков высот, опущенных из вершин А2, А3, и А4, от ортоцентра до соответствующих вершин совпадают с серединами ребер А1А2 ,А1А3 и А1А4 соответственно.

**3 этап:** выводы1. Ортоцентр тетраэдра, его центроид и центр описанной сферы лежат на одной прямой А1М1 (прямая Эйлера).
2. Точки А1, М1, М2, М3 и М4 лежат на одной сфере с центром в середине отрезка А1М1 и радиусом равным А1М1/2.

**Доказательство:** пусть О – середина А1М1. В силу симметричности достаточно доказать для одной из боковых граней, например, для А1А2А4. Пусть К – середина А4А2, точка М3 лежит на отрезке А1К, причем А1М3=2М3К. Опустим из точки М1 перпендикуляр на грань А1А2А4. По свойству проекций основание этого перпендикуляра в точку пересечения медиан этой грани, т. е. в точку М3. Таким образом, треугольник А1М3М1 прямоугольный с гипотенузой А1М1. Следовательно, по свойству прямоугольных треугольников М1М3 = А1М1/2.1. Таким образом, вершины серединного тетраэдра, ортотетраэдра лежат на одной сфере (сфера Эйлера);
2. В качестве упражнения можно вычислить, в каком отношении эта сфера делит ребра тетраэдра, примыкающие к прямому углу.
 |

 В качестве домашнего задания учащимся предлагается проверить теоремы Эйлера с помощью построений на произвольном треугольнике и попытаться аналогично приведенным выше рассуждениям вывести утверждения для произвольного ортоцентрического тетраэдра.

 На последующих занятиях можно провести обобщение плоского случая на пространственный с помощью метода координат.

 Обращаясь вновь к рассматриваемому выше треугольнику, можно ввести координаты так, что точка А1 будет иметь координаты (0; 0), точка А1 (4;0), точка А3 (0;4), тогда координаты остальных точек: М1 (2; 2), М2 (0; 2), М3 (2; 0), Ц (4/3;43). Выведем уравнение окружности, проходящей через точки А1,  М2 и М3 (для определения окружности достаточно трех точек) в виде (x-a)2+(y-b)2=R2. Тогда:

(0-a)2+(0-b)2=R2⇔a2+b2=R2,

(0-a)2+(2-b)2=R2⇔a2+4-4b+b2=R2,

(2-a)2+(0-b)2=R2⇔4-4a+a2+b2=R2.

 Из этой системы трех уравнений получаем a=1, b=1, R=√2 и уравнение окружности: (x-1)2+(y-1)2=2. Непосредственной подстановкой координат точки М1 в полученное уравнение убеждаемся, что точка М1 принадлежит окружности.

 Аналогично для пространства. Введем пространственные координаты так, чтобы точка А1 имела координаты (0; 0; 0), точка А2 (6; 0; 0), точка А3 (0; 0; 6), точка А4 (0; 6; 0). Тогда координаты остальных точек - М1 (2; 2; 2), М2 (0; 2; 2), М3 (2; 2; 0), М4 (2; 0; 2), Ц (3/2; 3/2; 3/2). Выведем уравнение окружности, походящей через точки А1, М1, М2 и М3 (для определения сферы нужно уже четыре точки). Уравнение сферы будет иметь вид (x-1)2+(y-1)2+(z-1)2=3.Принадлежность остальных точек этой сферы можно легко проверить простой подстановкой координат в уравнение.

***ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛОГИИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ***

Не менее полезно воспитывать у школьников привычку сознательно привлекать аналогию при поиске способов решения предложенной им трудной задачи. В этом случае можно рекомендовать им следующий план работы над задачей.

 1. Подобрать задачу, аналогичную данной, т. е. такую, у которой имелись бы, по сравнению с данной, сходные условия и сходное заключение; вспомогательная задача должна быть проще данной или такой, решение которой известно.

 2. Решить вспомогательную задачу; затем провести аналогичные рассуждения при решении данной задачи.

Например, к аналогии с планиметрическими задачами полезно обращаться при решении стереометрических задач.

При этом полезно, чтобы школьник пытался (если это возможно) самостоятельно сформулировать и решить аналогичную планиметрическую задачу. Рассмотрим, например, задачу: «На сколько частей могут разделить пространство четыре произвольно расположенные плоскости?»

Четыре плоскости определяют тетраэдр. Эта фигура напоминает нам 3 пересекающиеся прямые на плоскости.

 Естественно возникает вспомогательная задача, аналогичная данной: «На сколько частей могут разделить плоскость 3 произвольные прямые?».

 Решим сначала вспомогательную задачу (рис.11). В общем случае три прямые могут разделить плоскость на 7 частей, одна из них ограничена (внутренняя область треугольника), а другие, неограниченные части плоскости (таких 6) имеют с внутренней областью общую границу по стороне треугольника или по продолжению его сторон. В этом случае плоскость оказывается разделенной всего на 1+3+3=7 частей.

 Теперь приступим к решению основной задачи (рис.12).

 В общем случае, 4 плоскости могут разделить пространство на следующие части: одна из них ограничена – внутренняя область тетраэдра; неограниченные части пространства имеют общую границу с внутренней областью по грани тетраэдра (4 части), или по его ребру (6 частей), или по плоскостям, проходящим через его вершины (еще 4 части).

 В этом случае пространство оказывается разделенным всего на 1+4+6+4=15 частей.

 Чтобы школьники могли лучше усвоить этот прием решения задач, целесообразно время от времени предлагать им задачи, при решении которых метод аналогии оказывается полезным. При этом поначалу полезно предлагать учащемся не одну, а две (или более) взаимосвязанные по содержанию задачи, формулируя условие каждой из них одновременно. Например:

1. выразите радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, через его высоты;
2. выразите радиус шара, вписанного в тетраэдр, через высоты этого тетраэдра.

***ОШИБКИ, СВЯЗАННЫЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ АНАЛОГИИ***

Наряду с полезной эвристической ролью, которую играют в процессе обучения умозаключения по аналогии, они же могут приводить отдельных учащихся, которые не усвоили или формально, неосмысленно усвоили учебный материал, к грубым ошибкам. Например:

 от (a + b)c = ac + bc к (a + b)2= a2 + b2;

 от ab/ac = b/c к a + b/ac = b/c и т. п.

 В подобных случаях учащиеся пытаются заменить аналогией отсутствующие у них знания, тогда как аналогия должна опираться на знание изученного материала, помогать сознательному усвоению и правильному применению этих знаний, развитию самоконтроля. Необходимо требовать от учащихся постоянно *обосновывать* выполняемые математические операции ссылками на изученный теоретический материал, чтобы добиться сознательного и прочного усвоения его. При решении упражнений необходимо руководствоваться принципом: «сначала правило, потом действие; без правила нет действия!». Да и в процессе преподавания надо не только подчеркивать истинные аналогии, но и отмечать ложные, разрушать их с целью предупреждения возможных ошибок. Следует выяснить с учащимися, где данное правило применяется, а где и почему нельзя применять. Многие из грубых ошибок учащихся связаны с неправомерным распространением распределительного свойства на всевозможные операции.

 Учителю математики полезно знать о трех типичных ошибках, которые порождены неявным применением аналогии. Такие «вредные» (ложные) аналогии часто возникают у школьников стихийно; и сами школьники и учитель не всегда отдает себе отчет в происхождении этих ошибок (а значит, и в возможностях их исправления).

 Ограничимся несколькими примерами.

1.Наличие общности в свойствах сложения и умножения чисел иногда приводит к возникновению у школьников ошибочной аналогии о сходстве этих действий и в других свойствах. Так, например, при решении упражнения вида a+b/c+b по ложной аналогии с сокращением на общий множитель учащиеся «сокращают» это выражение на слагаемое: a+b/c+b=a/c.

2.Нередкая ошибка вида √а2+b2=a+b также является результатом ложной аналогии со способом извлечения квадратного корня из произведения √а2b2=⏐ab⏐. К тому же виду ошибок принадлежит и весьма распространенная ошибка logc(a+b)=? logca+ logcb, порожденная ложной аналогией с верным равенством logcab= logca + logcb, где a>0, b>0.

3.Очень распространена ошибка, приводимая психологом Н. А. Менчинской: «Учащийся при решении примера 96 : 16 = 10 допускает ошибку, в основе которой лежит ошибочное умозаключение по аналогии 96 : 16 = 10 (?), потому что 90 : 10 = 9 и 6 : 6 = 1; 9 + 1 = 10. В приведенном примере мы имеем перенесение в операцию деления приемов, употреблявшихся при сложении и вычитании чисел. Это ошибочное умозаключение возникло из привычного оперирования в отдельности десятками и единицами при сложении и вычитании чисел и делении их на однозначное число».

4.Замечая частые аналогии между многими понятиями и предложениями планиметрии и стереометрии, учащиеся часто переносят их в ситуации, где они оказываются ложными. Этим, пожалуй, объясняются весьма распространенные ошибочные ответы учащихся 9 – 10 классов: «Через данную на прямой точку в пространстве можно провести только один перпендикуляр к этой прямой», или «Две прямые в пространстве, перпендикулярные к одной и той же третьей прямой, всегда параллельны между собой», или «Две плоскости, перпендикулярные к одной и той же третьей плоскости, всегда параллельны между собой» и т. п.

Понятно, что учителю нужно уметь вовремя предостеречь учащихся от ложных аналогий, указывая при этом на происхождение тех или иных допускаемых ими ошибок.

Вывод по аналогии может иногда и не подтвердиться полностью, или подтвердиться лишь частично.

П р и м е р. Площадь любого треугольника выражается формулой Герона:

S=√p(p-a)(p-b)(p-c).

Изыскивая формулы для вычисления площади четырехугольников, мы можем задаться вопросом: верна ли аналогичная формула для четырехугольника?

Исследование этого вопроса показывает, что для 4-угольников, вписанных в окружность (и только для них!), справедлива следующая формула для вычисления площади:

S=√p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d).

Оказалось, что здесь полная аналогия не имеет места.

Отправляясь далее от обнаруженной аналогии в формулах, можно выяснить причину этой аналогии: существует связь между треугольником (многоугольником, который всегда можно вписать в окружность) и 4 – угольником (не всяким, а только таким, который можно вписать в окружность).

Итак, существенным признаком, объединяющим треугольник и 4 – угольник (в смысле общности формулы Герона), является возможность вписать их в окружность.

Сравнение двух понятий (треугольник и 4-угольник) завершилось в этом случае неполным обобщением: лишь для части объектов, входящих во второе понятие, верна «обобщенная формула Герона».

В данном примере, хотя аналогия в целом и не подтвердилась, она послужила источником новых мыслей (например, треугольник можно рассматривать как вырожденный вписанный 4 – угольник).

Пусть вершина Д вписанного 4-х угольника АВСД приближается как угодно близко к вершине А. (рис.13). Тогда сторона АД=d в пределе становится равной нулю и обобщенная формула превращается в обычную формулу Герона:

S=√(p-a)(p-b)(p-c)(p-0)= √(p-a)(p-b)(p-c)p.

 Итак, применение аналогии доставляет нам “благоприятную возможность более точно исследовать открытые свойства и доказать или опровергнуть их: в обоих случаях мы научимся чему-нибудь полезному”.

***ЗАКЛЮЧЕНИЕ***

Насколько важна аналогия в математике, можно судить по следующему высказыванию известного польского математика Стефана Банаха: “Математик – это тот, кто умеет находить аналогии между утверждениями; лучший математик тот, кто замечает аналогии теорий; но можно себе представить и такого, кто между аналогиями видит аналогии”.

Сравнение, как логический прием, становится тем толчком, который делает мышление активным; со сравнения понятий начинается формирование новых мыслей.

Обнаружение сходства или различия между предметами поднимает наше мышление на более высокую степень; сосуществовавшие ранее без взаимосвязи знания приобретают новое качество; рассматриваемый предмет познается при этом глубже, подробнее.

На основе сравнения понятий строятся умозаключения гипотетические, справедливость которых затем проверяется. Гипотетическими умозаключениями, в частности, являются умозаключения по аналогии.

Строя такие умозаключения, учащийся учится умению делать предположения, умению познавать неизвестное, овладевает навыками логического исследования предметов и явлений окружающей действительности.

Возникновение логической формы умозаключений по аналогии можно представить следующим образом.

В процессе подчинения себе природы, в ходе изменения окружающего мира для удовлетворения своих потребностей и овладения силами природы, человек сравнивал сходные предметы и явления и многократно замечал следующую связь между ними: если два предмета имеют некоторые одинаковые признаки, то очень часто (но не всегда!) оказывалось, что они имели и некоторые другие общие признаки.

Таким образом, умозаключения по аналогии являются умозаключениями вероятности; для того чтобы выяснить достоверность или ложность “вывода по аналогии”, необходимо дополнительно исследовать этот вывод. Этим и отличается рассматриваемый вид умозаключений от индуктивного и дедуктивного умозаключения: если первые приводят к исчерпывающему результату, аналогия лишь открывает путь исследования и не имеет доказательной силы (полная индукция).

Умозаключение по аналогии, будучи рассматриваемо в единстве с процессом доказательства его истинности, диалектично в своей сущности: здесь в теснейшем переплетении и во взаимосвязи встречаются элементы индукции и дедукции.

В умозаключении по аналогии прежде всего используется индукция, ибо переход от первого предмета ко второму (от треугольника к тетраэдру, от окружности к сфере) состоит в установлении между одними частными свойствами (простейший многоугольник, наличие трех внутренних углов, существование их равноделящих – биссектрис и др.).

В то же время умозаключение по аналогии тесно связано с дедукцией, ибо истинность вывода по аналогии устанавливается дедуктивным доказательством: то, что в любой тетраэдр можно вписать сферу и при том единственную, надо доказать согласно обычным правилам дедуктивного доказательства. Вывод, полученный прием аналогии, как бы начинается индукцией и завершается дедукцией.

При пользовании аналогией совершается сложный мыслительный процесс, в котором применяются в единстве и взаимопроникновении приемы анализа и синтеза. Так, в приведенном выше примере умозаключение по аналогии стало возможным лишь благодаря тому, что в результате сравнения треугольника и тетраэдра и анализа их свойств устанавливается наличие у них нескольких сходных свойств, которые послужили толчком к предположению о наличии некоторого нового свойства (сферы, вписанной в тетраэдр). Доказательство сформулированного предположения сводится к синтезу понятий, относящихся к тетраэдру, причем он выполняется в том же порядке, в каком выполнялся синтез соответствующих понятий, относящихся к треугольнику (центр вписанной сферы есть точка пересечения биссектральных плоскостей подобно тому, как центр вписанной окружности есть точка пересечения биссектрис).

Вывод по аналогии может иногда и не подтвердиться полностью, или подтвердиться лишь частично.

Аналогия, как правило, не является доказательным рассуждением, т. е. рассуждением, которое может служить доказательством. (“Как правило” потому, что имеется исключение, связанное с особым видом аналогии.) Однако в обучении, как, впрочем, и в науке, аналогия часто полезна тем, что она наводит нас на догадки, т. е. служит эвристическим методом. В обучении же математике не менее важно, чем учить доказывать, это учить догадываться, что именно подлежит доказательству и как найти это доказательство.

***СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ***

1. Балк М. Б., Балк Г. Д. Математика после уроков: пособие для учителя. – М.: Просвещение, 1971.
2. Груденов Я. И. Совершенствование методики работы учителя математики Далингер В. А. Об аналогиях в планиметрии и стереометрии // Математика в школе. – 1995. - № 6.
3. Колягин Ю. М., Оганесян В. А., Саннинский В. Я., Луканкин Л. Г. “Методика преподавания математики в средней школе”. Общая методика. Учеб. Пособие для студентов физ.-мат. фак. Пед. Институтов. М., “Просвещение”, 1975.
4. Метельский Н. В. Дидактика математики : общая методика и ее проблемы. – Минск: изд. БГУ, 1982.
5. “Методика математики в средней школе”: Общая методика. Учеб. Пособие для студентов пед. ин-тов по спец. “Математика преподавания ” и “Физика” / А. Я. Блох, Е. С. Канин, Н. Г. Килина и др.; Сост. Р. С. Черкасов, А. А. Столяр. – М.:Просвещение, 1985.
6. Столяр А. А. Педагогика математики: учебное пособие для студ. Физ. – мат. фак.- Минск, 1986.
7. Саранцев Г. И., Лунина Л. С. Обучение методу аналогии // Математика в школе. – 1989. - №4.
8. Эрдниев П. М. “Сравнение и обобщение при обучении математике”, пособие для учителей.М. 1960.
9. Эрдниев О. П. Аналогия в теоремах о прямой Эйлера, окружности и сфере // Математика в школе. – 1998. - № 3.

***МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ***

***Благовещенский Государственный Педагогический Университет***

***Физико-математический факультет***

***Кафедра алгебры и геометрии***

***Место аналогии в обучении математике в школе***

***Курсовая работа***

***Выполнила: студентка 4 курса, отделения
 математика-физика, группы «Б»,***

 ***Макарова Виктория Александровна***

 ***Научный руководитель:***

 ***Ковалева Надежда Дмитриевна***

***Благовещенск 2002 г.***