***Приложение 1***

***Пример* 2** Доказать, что для любых действительных $a,b и a^{2}+b^{2}+c\geq ab+bc+ca$

 *Решение:* 1 способ. Доказываемое неравенство равносильно неравенству

$2a^{2}+2b^{2}+2c^{2}-2ab-2bc-2ac\geq 0 $или *(a-b)2+(b-c)2+(c-a)* $\geq $*0..* Последнее очевидно. Равенство достигается лишь при *а=b=с. 2* способ. Складывая три известные неравенства

$$\frac{a^{2}+b^{2}}{2}\geq ab, \frac{b^{2}+c^{2}}{2}\geq bc и \frac{a^{2}+c^{2}}{2}\geq ac$$

получаем требуемое.

***Пример 2.*** Доказать, что для любых действительных *х* и *у* $x^{2}+5y^{2}-4xy-6y+3>0$

*Решение:* Рассматривая левую часть неравенства, как квадратный трехчлен относительно х, имеем: *х2=2х(1-2у)+5у2-6у+3>0*

Так как *D=4(1-2y)2-4(5y2-6y+3)=-4(y2-2y+2)=-4((y-1)2+l)<0* для любых *у,* то квадратный трехчлен положителен для всех *х* и *у*, что и требовалось доказать.

***Пример 3.*** Доказать, что для положительных чисел *а, b* и *с (a+b)(b+c)(c+a)* $\geq $*8abc Решение:.* Согласно

$$\sqrt{a+b}\geq 2\sqrt{ab, } имеем b+c\geq 2\sqrt{bc}, c+a\geq 2\sqrt{ca}$$

.Перемножая эти неравенства, получаем требуемое.

***Пример 4.*** Доказать, что для любых действительных чисел *а* и *b,* удовлетворяющих условию *а+b=2,* справедливо неравенство *а4+b4*$\geq $*2.*

*Решение:* Пусть *а=1+с,* тогда *b=2-a—1-c.* Поэтому *а4+b4=(1+с)4+(1-с)4=2+12с2+2с2+2с4*$\geq $*2,* что и требовалось доказать.

***Пример 5.*** Доказать, то если *а+b>1,* то имеет место неравенство *а 4+b4>1/8.*

*Решение:* Так как *а+b>1,* то $a^{2}+2ab+b^{2}\geq 1. $Сложив неравенство с очевидным неравенством

*a2-2ab+b2*$\geq $*0 ,*получим *2а2+2b2*$\geq $*1,* или *а2+b2*$\geq $*1/2.* Возведя обе части этого неравенства в квадрат, получим *a4+2a2b2+b4*$\geq $*1/4.* Сложив последнее неравенство с очевидным неравенством

*а4 -2a2b2+b4*$\geq $*0,* получим *2а4+2b4*$\geq $*1/4,* или *а4+b4*$\geq $*1/8.*

***Пример 6.*** Доказать, что если $a+b=1,$ то имеет место неравенство $a^{8}+b^{8}\geq ^{1}/\_{128}$

*Решение:*  из условия, что $a+b=1$, следует, что $a^{2}-2ab+b^{2}+1.$ Сложив неравенство с очевидным неравенством: $a^{2}+2ab+b^{2}\geq 0.$ получим $2a^{2}+2b^{2}\geq 1$ Возведя обе части этого неравенства в квадрат, получим: $4a^{4}-8a^{2}b^{2}+4b^{4}\geq 1,$ Сложив неравенство с очевидным неравенством: $4a^{4}-8a^{2}b^{2}+4b^{4}\geq 0$получим $8a^{4}+8b^{4}\geq 1,$ откуда

$64a^{8}+128a^{4}b^{4}+64b^{4}\geq 1.$ Сложив эти неравенства с очевидным неравенством $64a^{8}-128a^{4}b^{4}+64b^{4}\geq 0, $ получим $128a^{8}+128b^{8}\geq 1, или a^{8}+b^{8}\geq 128$

***Пример 7.*** $x^{2}+2y^{2}-2xy+2\geq 0$

*Решение:* $x^{2}+2y^{2}-2xy+2=x^{2}+y^{2}-2xy+y^{2}+2>0 $

***Пример 8.***$2x^{2}+3y^{2}-4x+12y+15\geq 0$

*Решение:* $2x^{2}+3y^{2}-4x+12y+15=2x^{2}-4x+2+3y^{2}+12y+12+1=2\left(x-1\right)^{2}+3\left(y+2\right)^{2}+1>0$

***Пример 9****.* $x^{2}+3x^{2}+2x+3>0$

*Решение:* $x^{4}+3x^{2}+2x+3=x^{4}+2x^{2}+1+x2+2x+1+1=\left(x2+1\right)^{2}+\left(x+1\right)^{2}+1>0$

***Пример 10****.* $x+2\sqrt{x}+1\geq 0, x\geq 0$

*Решение:* $\left(\sqrt{x+1}\right)\geq 0$

***Пример 11****.* $\sqrt{5}+\sqrt{10}>5$

*Решение:* $5+2\sqrt{5}∙\sqrt{10}+10>25$

$2\sqrt{50}>10 <=> 2∙5\sqrt{2}>10 <=>\sqrt{2 }>1<=>2>1 $

***Пример12.*** $\sqrt{21}-\sqrt{5}>\sqrt{20}-\sqrt{6}$

*Решение:* $\sqrt{21}+\sqrt{6}>\sqrt{20}+\sqrt{5}$

$$21+6+2\sqrt{21∙6}>20+5+2\sqrt{20∙5} <=>27+6\sqrt{14}>45=> 6\sqrt{14}>18 ⇒\sqrt{14}>3⇒\sqrt{14>\sqrt{9}}$$

***Пример 13.***$2^{300}<3^{200}$

*Решение:* $2^{3∙100}<3^{2∙100} <=> 8^{100}<9^{100}$

***Пример 14.***$\frac{1}{1∙2}+\frac{1}{2∙3}+\frac{1}{3∙4}+\cdots \frac{1}{99∙100}<1$

*Решение:* $\frac{2-1}{2∙1}+\frac{3-2}{2∙3}+\frac{4-3}{3∙4}+\cdots \frac{100-99}{99∙100}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots +\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=1-\frac{1}{100}<1$

*Таблица 1*

**Числовые промежутки**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Название | Неравенство,определяющеемножеством | Обозначение | Изображение |
| Отрезок от *а* до *b* (замкнутый промежуток) | $$a\leq x\leq b$$ | $$\left[a;b\right]$$ |  |
| Интервал от *а* до *b* открытый промежуток | $$a<x<b$$ | $$\left(a;b\right)$$ |  |
| Открытый слева промежуток от *а* до *b* | $$a<x\leq b$$ | (*a;b*] |  |
| Открытый справа промежуток от *а* до *b* | $$a\leq x<b$$ | [*a;b*) |  |
| Числовой луч от *а* до +∞ | $$a\leq x$$ | [*a;+∞*) |  |
| Открытый числовой луч от *а* до +∞ | $$a<x$$ | (*a;+∞*) |  |
| Числовой луч от -∞ до *а* | $$x\leq a$$ | (*-∞;a*] |  |
| Открытый числовой луч от -∞ до *а* | $$x<a$$ | (*-∞;a*) |  |

*Таблица 2*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| $$-2>x\leq 1 и x>3$$ |  | $$x\in \left(2;1\right]∪(3;+\infty )$$ |
| $$-2>x\leq 1 и x=3$$ |  | $$x\in \left(-2;1\right)∪\{3\}$$ |
| $$x\leq -2 и x=1 и x\geq 3$$ |  | $$x\in \left(-\infty ;2\right]∪\left\{1\right\}∪[3;+\infty )$$ |
| $$x=1 и x=3$$ |  | $$x\in \left\{1\right\}∪\{3\}$$ |

ОБРАЗЕЦ ОФОРМЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ МЕТОДОМ ИНТЕРВАЛОВ.

*Пример 15.*

Решите неравенство: $\frac{x^{2}-2x+3}{4x-3-x^{3}}\leq 3$

*Решение:* Выполним тождественные преобразования

$$1.\frac{x^{2}-2x+3}{4x-3-x^{3}}\leq 3 <=>\frac{x^{2}-2x+3-3\left(4x-3-x^{3}\right)}{4x-3-x^{3}}\leq 0<=>\frac{4x^{2}-14x+12}{x^{2}-4x+3}\geq 0$$

$$2.f\left(x\right)=\frac{4x^{2}-14x+12}{x^{2}-4x+3} f\left(x\right)\leq 0$$

*f(x)* - является рациональной функцией. Как известно, рациональная функция сохраняет свой знак в интервале между корнями многочленов числителя и знаменателя. Найдем точку разрыва (корни знаменателя) *х2-4х+3=0* $ x\_{2}=3$

знаменатель можно представить в виде *x2* *-4х+3=(х-1)(х-3)*

3.Найдем нули (корни) числителя *4х2-14х+12,* $ $

числитель представить в виде *4х2* *-14х+12=4 (х-2)(х-1,5)*

то $f\left(x\right)=\frac{4\left(x-2\right)\left(x-1,5\right)}{\left(x-1\right)\left(x-3\right)}$

Отмечаем на числовой оси корни числителя и точки разрыва



На каждом из полученных промежутков функция сохраняет свой знак, поэтому для определения знака функции на промежутке, достаточно определить знак ее значения в любой «удобной» для вычисления точки, принадлежащей промежутку.

$$x\in \left(-\infty ;1\right) f\left(0\right)=\frac{4\left(0-2\right)\left(0-1,5\right)}{\left(0-1\right)\left(0-3\right)}=\frac{12}{3}=4>0 ⇒f\left(x\right)>0$$

$$x\in \left(1;1,5\right) f\left(1,2\right)≈-2.28<0⇒f\left(x\right)<0$$

$$x\in \left(1;2\right) f\left(1.7\right)≈-0.26<0⇒f\left(x\right)<0$$

$$x\in \left(2;3\right) f\left(2,5\right)≈-2.26<0⇒f\left(x\right)<0$$

$$x\in \left(3;+\infty \right) f\left(3.5\right)=16>0⇒f\left(x\right)<0$$

Показываем на числовой оси промежутки, удовлетворяющие неравенству, штриховкой.

Записываем ответ, $x\in \left(1;1.5\right]∪[2;3)$