Замечание 6
Полезно провести предложенное доказательство, а затем предложить найти другой вариант доказательства (от рассмотрения вписанной окружности).
Завершая исследование взаимного расположения вписанных и описанных около правильных многоугольников окружностей, установим зависимости между их элементами.
На рисунке 6 рассмотрим $\Delta O_1A_1A_2$:
$|A_1A_2| = a_n; |O_1A_1| = |O_1A_2| = R; [O_1B_1] \perp [A_1A_2]; |O_1B_1| = r.$ Введем также общие обозначения для многоугольника $A_1A_2....A_n$:
$S_{A_1A_2...A_n} = S_n, P_{A_1A_2...A_n} = P_n$
$B_\Delta O_1A_1A_2$:
$$m(< A_1O_1A_2) = \frac{360°}{n}, m(< A_1O_1B_1) = \frac{180°}{n};$$
Из $\Delta A_1B_1O_1$:
$$|A_1B_1| = |O_1A_1| \cdot \sin(< A_1O_1B_1) \Rightarrow a_n = 2R \cdot \sin\frac{180°}{n} \quad \textbf{(1)}$$
$$|A_1B_1| = |O_1B_1| \cdot tg(< A_1O_1B_1) \Rightarrow a_n = 2r \cdot tg\frac{180°}{n} \quad \textbf{(2)}$$
Из **(1)** и **(2)**: $r = R \cdot \cos\frac{180°}{n}$ **(3)**
Основываясь на **(1), (2),(3)** найдем общие зависимости для элементов правильных многоугольников:
$$P_n = n \cdot a_n = 2n \cdot R \cdot \sin\frac{180°}{n} = 2n \cdot r \cdot tg\frac{180°}{n} = 2\sqrt{n \cdot S_n} \cdot tg\frac{180°}{n};$$
$$S_n = n \cdot \frac{1}{2}a_n \cdot r = \frac{n}{2} \cdot \frac{a_n^2}{2} \cdot ctg\frac{180°}{n} = \frac{n}{4} \cdot a_n^2 \cdot ctg\frac{180°}{n} = \frac{n}{4} \cdot \left(2R \cdot \sin\frac{180°}{n}\right)^2 \cdot ctg\frac{180°}{n} = \frac{n}{4} \cdot 4R^2 \sin^2\frac{180°}{n} \cdot \frac{\cos\frac{180°}{n}}{\sin\frac{180°}{n}} =$$
$$= \frac{n}{2} \cdot R^2 \cdot \sin\frac{360°}{n} = \frac{n}{4} \cdot \left(2r \cdot tg\frac{180°}{n}\right)^2 \cdot ctg\frac{180°}{n} = \frac{n}{4} \cdot 4r^2 tg^2\frac{180°}{n} \cdot ctg\frac{180°}{n} = n \cdot r^2 \cdot tg\frac{180°}{n} =$$
$$\frac{P_n^2}{4n} \cdot ctg\frac{180°}{n};$$
$$S_n = \frac{n}{4} \cdot \left(\frac{P_n}{n}\right)^2 ctg\frac{180°}{n} = \frac{n}{4} \cdot \frac{P_n^2}{n^2} ctg\frac{180°}{n} = \frac{P_n^2}{4n} \cdot ctg\frac{180°}{n}$$
$$a_n = 2R \cdot \sin\frac{180°}{n} \to 2r \cdot tg\frac{180°}{n} \to \frac{P_n}{n} \to 2\sqrt{\frac{S_n \cdot tg\frac{180°}{n}}{n}}$$
$$R = \frac{a_n}{2\sin\frac{180°}{n}} = \frac{r}{\cos\frac{180°}{n}} = \frac{P_n}{2n \cdot \sin\frac{180°}{n}} = \sqrt{\frac{2S_n}{n \cdot \sin\frac{360°}{n}}}$$
$$r = \frac{a_n}{2tg\frac{180°}{n}} = R \cdot \cos\frac{180°}{n} = \frac{P_n}{2n \cdot tg\frac{180°}{n}} = \sqrt{\frac{S_n \cdot ctg\frac{180°}{n}}{n}}$$
А теперь, на основе полученных ключевых формул, выведем формулы для частных случаев:
$n = 3$

$$a_3 = 2R\sin 60° = 2R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3} = 2r\cdot tg60° = 2\sqrt{3}r = \frac{P_3}{3} = 2\sqrt{\frac{S_3 tg60°}{3}} = 2\sqrt{\frac{\sqrt{3}S_3}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3\sqrt{3}S_3}$$

$$R = \frac{a_3}{2\sin 60°} = \frac{a_3}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a_3\sqrt{3}}{3} = \frac{r}{\cos 60°} = \frac{r}{\frac{1}{2}} = 2r = \frac{P_3}{6\sin 60°} = \frac{P_3}{6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{P_3\cdot\sqrt{3}}{9} =$$

$$\sqrt{\frac{2S_3}{3\sin 120°}} = \sqrt{\frac{2S_3}{3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}} = = \sqrt{\frac{4\sqrt{3}S_3}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{S_3\sqrt{3}}$$

$$r = \frac{a_3}{2tg60°} = \frac{a_3}{2\sqrt{3}} = \frac{a_3\sqrt{3}}{6} = R\cos 60° = \frac{R}{2} = \frac{P_3}{2\cdot 3tg60°} = \frac{P_3}{6\sqrt{3}} = \frac{P_3\sqrt{3}}{18} = \sqrt{\frac{S_3 ctg60°}{3}} = \sqrt{\frac{S_3\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}{3}} =$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{S_3\sqrt{3}}$$

$$P_3 = 3a_3 = 6R\sin 60° = 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}R = 3\sqrt{3R} = 6r\cdot tg60° = 6\sqrt{3r} = 2\sqrt{3\sqrt{3}S_3}$$

$$S_3 = \frac{3}{4}a_3^2\cdot ctg60° = \frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}a_3^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a_3^2 = \frac{3}{2}R^2\sin 60° = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot R^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2 = 3\sqrt{3}r^2 = \frac{P_3^2\sqrt{3}}{36}$$

$n = 4$

$$a_4 = 2R\sin 45° = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}R = R\sqrt{2} = 2r\cdot tg45° = 2r = \frac{P_4}{4} = 2\sqrt{\frac{S_4 tg45°}{4}} = \sqrt{S_4}$$

$$R = \frac{a_4}{2\sin 45°} = \frac{a_4}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a_4\sqrt{2}}{2} = \frac{r}{\cos 45°} = \frac{r}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = r\sqrt{2} = \frac{P_4}{8\cdot\sin 45°} = \frac{P_4}{8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{P_4\cdot\sqrt{2}}{8} = \sqrt{\frac{2S_4}{4\sin 90°}} =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2S_4}\quad r = \frac{a_4}{2tg45°} = \frac{a_4}{2\cdot 1} = \frac{a_4}{2} = R\cos 45° = \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{P_4}{8\cdot tg45°} = \frac{P_4}{8} = \sqrt{\frac{S_4 ctg45°}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{S_4}$$

$$P_4 = 4a_4 = 8R\sin 45° = 8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}R = 4\sqrt{2R} = 8r\cdot tg45° = 8r = 2\sqrt{4S_4 tg45°} = 4\sqrt{S_4}$$

$$S_4 = \frac{4}{4}a_4^2\cdot ctg45° = a_4^2 = \frac{4}{2}R^2\sin 90° = 2R^2 = 4r^2 = \frac{P_4^2}{16}ctg45° = \frac{P_4^2}{16}$$

$n = 6$

$$a_6 = 2R\sin 30° = 2\cdot\frac{1}{2}R = R = 2r\cdot tg30° = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}r = \frac{2\sqrt{3}}{3}r = \frac{P_6}{6} = 2\sqrt{\frac{S_6 tg30°}{6}}\ 2\sqrt{\frac{S_6\cdot\sqrt{3}}{18}} = 2\sqrt{\frac{2\sqrt{3}S_6}{36}} =$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{2\sqrt{3}S_6}$$

$$R = \frac{a_6}{2\sin 30°} = \frac{a_6}{2\cdot\frac{1}{2}} = a_6 = \frac{r}{\cos 30°} = \frac{r}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}r = \frac{P_6}{12\cdot\sin 30°} = \frac{P_6}{12\cdot\frac{1}{2}} = \frac{P_6}{6} = \sqrt{\frac{2S_6}{6\sin 60°}} =$$

$$\sqrt{\frac{S_6}{3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}S_6}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{2\sqrt{3}S_6}$$

$$r=\frac{a_6}{2tg30°}=\frac{a_6}{2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}a_6=R\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}R=\frac{P_6}{2\cdot 6\cdot tg30°}=\frac{P_6}{2\cdot 6\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{12}P_6=\sqrt{\frac{S_6 ctg30°}{6}}=$$

$$\sqrt{\frac{S_6\sqrt{3}}{6}}=\sqrt{\frac{6\sqrt{3}S_6}{36}}=\frac{1}{6}\sqrt{6\sqrt{3}S_6}$$

$$P_6=6a_6=12R\sin 30°=12\cdot\frac{1}{2}R=6R=12r\cdot tg30°=12\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}r=4\sqrt{3}r=2\sqrt{6S_6 tg30°}=2\sqrt{6S_6\frac{\sqrt{3}}{3}}=$$

$$2\sqrt{2\sqrt{3}S_6}$$

$$S_6=\frac{6}{4}a_6^2\cdot ctg30°=\frac{3}{2}\cdot\sqrt{3}a_6^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}a_6^2=\frac{6}{2}R^2\sin 60°=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}R^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2=6r^2 tg30°=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}r^2=2\sqrt{3}r^2=$$

$$\frac{P_6^2}{24}ctg30°=\frac{\sqrt{3}}{24}P_6^2$$

А сейчас сведём полученные данные в сводную таблицу.

Правильные многоугольники

a_n – сторона, R – радиус описанной окружности, S_n – площадь, P_n – периметр, r – радиус вписанной окружности

кол-во вершин / элементы	n	3	4	6
a_n	$2R\cdot\sin\frac{180°}{n}$	$R\sqrt{3}$	$R\sqrt{2}$	R
	$2r\cdot tg\frac{180°}{n}$	$2\sqrt{3}r$	$2r$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}r$
	$\frac{P_n}{n}$	$\frac{P_3}{3}$	$\frac{P_4}{4}$	$\frac{P_6}{6}$
	$2\sqrt{\frac{S_n}{n}\cdot tg\frac{180°}{n}}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3\sqrt{3}S_3}$	$\sqrt{S_4}$	$\frac{1}{3}\sqrt{2\sqrt{3}S_6}$
R	$\frac{a_n}{2\sin\frac{180°}{n}}$	$\frac{a_3\sqrt{3}}{3}$	$\frac{a_4\sqrt{2}}{2}$	a_6
	$\frac{r}{\cos\frac{180°}{n}}$	$2r$	$r\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}r$
	$\frac{P_n}{2n\cdot\sin\frac{180°}{n}}$	$\frac{P_3\cdot\sqrt{3}}{9}$	$\frac{P_4\sqrt{2}}{8}$	$\frac{P_6}{6}$
	$\sqrt{\frac{2P_n}{n\cdot\sin\frac{360°}{n}}}$	$\frac{2}{3}\sqrt{\sqrt{3}S_3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2S_4}$	$\frac{1}{3}\sqrt{2\sqrt{3}S_6}$
r	$\frac{a_n}{2tg\frac{180°}{n}}$	$\frac{a_3\sqrt{3}}{6}$	$\frac{a_4}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}a_6$
	$R\cdot\cos\frac{180°}{n}$	$\frac{R}{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}R$

	$\dfrac{P_n}{2n \cdot tg\dfrac{180°}{n}}$	$\dfrac{P_3\sqrt{3}}{18}$	$\dfrac{P_4}{8}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{12}P_6$
	$\sqrt{\dfrac{S_n \cdot ctg\dfrac{180°}{n}}{n}}$	$\dfrac{1}{3}\sqrt{\sqrt{3}S_3}$	$\dfrac{1}{2}\sqrt{S_4}$	$\dfrac{1}{6}\sqrt{6\sqrt{3}S_6}$
P_n	$n \cdot a_n$	$3a_3$	$4a_4$	$6a_6$
	$2n \cdot R\sin\dfrac{180°}{n}$	$3\sqrt{3}R$	$4\sqrt{2}R$	$6R$
	$2n \cdot r \cdot tg\dfrac{180°}{n}$	$6\sqrt{3}r$	$8r$	$4\sqrt{3}r$
	$2\sqrt{n \cdot S_n \cdot tg\dfrac{180°}{n}}$	$2\sqrt{3\sqrt{3}S_3}$	$4\sqrt{S_4}$	$2\sqrt{2\sqrt{3}S_6}$
S_n	$\dfrac{n}{4}a_n^2 ctg\dfrac{180°}{n}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{4}a_3^2$	a_4^2	$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}a_6^2$
	$\dfrac{n}{2}R^2\sin\dfrac{360°}{n}$	$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}R^2$	$2R^2$	$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}R^2$
	$n \cdot r^2 tg\dfrac{180°}{n}$	$3\sqrt{3}r^2$	$4r^2$	$2\sqrt{3}r^2$
	$\dfrac{P_n^2 ctg\dfrac{180°}{n}}{4n}$	$\dfrac{P_3^2\sqrt{3}}{36}$	$\dfrac{P_4^2}{16}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{24}P_6^2$