# 2. Кредиты

## 2.1 Погашение кредита равными долями

Задача 1

31 декабря 2017 года Сергей взял в банке 2648000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплат кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк **x** рублей. Какой должна быть сумма **x**, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

Решение

1 января 2018 года Сергей будет должен банку не только 2648000 руб., но и 10% от этой суммы, т.е. 2648000 + 0,1\*2648000 = 1,1\*2648000 руб. Затем Сергей выплачивает х руб. и остается должен (1,1\*2648000 – х) руб.

1 января 2019 года Сергей будет должен банку оставшуюся сумму плюс проценты на нее, то есть (1,1\*2648000 – х) + 0,1\*(1,1\*2648000 – х) = 1,1\*(1,1\*2648000 – х). Затем выплачивается снова сумма в х руб., и остаток долга будет составлять (1,1\*(1,1\*2648000 – х) – х) руб.

Наконец, 1 января 2020 года банк еще раз начисляет проценты на остаток долга, в результате чего Сергей должен (1,1\*(1,1\*2648000–х)–х)+0,1\*(1,1\*(1,1\*2648000–х)–х)=1,1\*(1,1\*(1,1\*2648000 – х)-х) руб. В течение года Сергей в последний раз выплачивает х руб., после чего кредит считается погашенным (то есть остаток долга равен 0).

Приведенные рассуждения удобно представить в виде таблицы ДОЛГ-ВЫПЛАТА-ОСТАТОК

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 1 год (2018) | 2 год (2019) | 3 год (2020) |
| ДОЛГ | 1,1\*2648000 | 1,1\*(1,1\*2648000 – х) | 1,1\*(1,1\*(1,1\*2648000 –х) – х) |
| ВЫПЛАТА | х | х | х |
| ОСТАТОК долга | 1,1\*2648000 – х | 1,1\*(1,1\*2648000 –х) - х | 0 |

В приведенной таблице ОСТАТОК = ДОЛГ ­­- ВЫПЛАТА. Из данных правого столбца составим уравнение: 1,1\*(1,1\*(1,1\*2648000 –х) – х) – х = 0

Обычно числа в задачах подобраны так, чтобы сумма кредита хорошо делилась на коэффициент при Х. Если у Вас так не происходит – проверьте еще раз вычисления, велика вероятность арифметической ошибки!

1,1\* (1,1\*1,1\*2648000 – 1,1х – х) – х = 0

1,1\*1,1\*1,1\*2648000 – 1,21х – 1,1х – х = 0

1,331\***2648000** = **3,31**х

Х=1064800

Ответ: 1064800 руб.

Задача 2

В сентябре Федор взял кредит в 1,5 млн. руб. По условиям договора:

- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по август каждого года Федор выплачивает часть долга.

На какое минимальное количество лет может взять кредит Федор, чтобы не выплачивать более 450 тыс. руб. в год?

Решение

В явном виде нам не указано, что гасить кредит нужно равными долями, однако, это тот же тип задачи. Во-первых, логично, что чем больше мы выплачиваем, тем быстрее погасим кредит, а, во-вторых, у нас есть верхнее ограничение по сумме выплат – 450 тыс. руб. Значит, будем выплачивать по максимуму в 0,45 млн., чтобы расплатиться как можно быстрее.

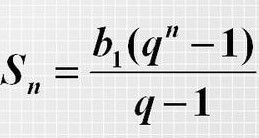
Составим таблицу, как в предыдущей задаче (для удобства все суммы будем считать в млн. руб.):

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 1 год | 2 год | 3 год |
| ДОЛГ на январь | 1,1\*1,5 | 1,1\*(1,1\*1,5 – 0,45)=1,12 - 0,45\*1,1 | 1,1\*(1,1\*(1,1\*1,5 – 0,45) – 0,45)=1,13\*1,5 ­­- 0,45\*1,12 - 0,45\*1,1 |
| ВЫПЛАТА с февраля по август | 0,45 | 0,45 | 0,45 |
| ОСТАТОК долга | 1,1\*1,5– 0,45 | 1,1\*(1,1\*1,5 – 0,45) – 0,45 = 1,12 - 0,45\*1,1 – 0,45 | 1,1\*(1,1\*(1,1\*1,5 – 0,45) – 0,45)=1,13\*1,5 ­­- 0,45\*1,12 - 0,45\*1,1 – 0,45 |
|  | 4 год | (n-1) год | n год |
| ДОЛГ на январь | 1,1\*(1,1\*(1,1\*(1,1\*1,5 –0,45) – 0,45) – 0,45) = 1,14\*1,5 – 0,45\*1,13 - 0,45\*1,12 – 0,45\*1,1 | 1,1n-1\*1,5 – 0,45\*1,1n-2 - 0,45\*1,12 – 0,45\*1,1 | 1,1n\*1,5 – 0,45\*1,1n-1 - 0,45\*1,12 – 0,45\*1,1 |
| ВЫПЛАТА с февраля по август | 0,45 | 0,45 | 0,45 |
| ОСТАТОК долга | 1,1\*(1,1\*(1,1\*(1,1\*1,5 –0,45) – 0,45) – о,45) -0,45 = 1,14\*1,5 – 0,45\*1,13 - 0,45\*1,12 – 0,45\*1,1 – 0,45 | 1,1n-1\*1,5 – 0,45\*1,1n-2 - 0,45\*1,12 – 0,45\*1,1 – 0,45 | 0 |

После n лет Федор расплатится по кредиту, то есть его остаток долга будет равен 0 (при решении может получиться и отрицательное число, это означает, что в последний год Федору необязательно выплачивать 450 тыс. руб., а достаточно меньшей суммы). Из данных правого столбца для n-го года составим уравнение:

1,1n\*1,5 – 0,45\*1,1n-1 - 0,45\*1,12 – 0,45\*1,1 – 0,45 = 0

1,1n\*1,5 – 0,45\*(1+1,1+1,12+….+1,1n-1)=0

Выражение в скобках – это сумма n членов геометрической прогрессии с первым членом b1=1 и последним членом bn=b1\*qn-1. Применяя формулу для вычисления суммы n членов геометрической прогрессии, получим:

1,1n\*1,5 – 0,45\*(1,1n-1)/(1,1-1)=0

1,1n\*1,5 – 4,5\*1,1n +4,5=0

1,1n = 1,5

4<n<5

Значит, Федор погасит кредит за 5 лет.

Ответ: 5.

Несмотря на явную простоту такого подхода, имеется «подводный камень»: не всегда учащимся удается доказать свое умение строить математическую модель, есть риск, что при проверке задание могут не зачесть или зачесть не полностью. Поэтому обязательно опишите, откуда взялось число 1,1 и почему мы продолжаем вычисления до появления отрицательного числа.

Иногда подобные задачи можно решить, не выводя формулу для n лет. Достаточно последовательно посчитать остаток долга в цифрах – после 1 года, 2 года и т.д. Как только остаток долга станет 0 или отрицательным, значит, искомый год найден.

В нашей задачe получим:

* после 1 года: 1,1\*1,5 – 0,45 = 1,2
* после 2 года 1,1\*1,2 – 0,45 = 0,87
* после 3 года 1,1\*0,87 – 0,45 = 0,507
* после 4 года 1,1\*0,507 – 0,45= 0,1077
* после 5 года 1,1\*0,1077 – 0,45 = **-0,33153**

Получив отрицательное число, делаем вывод, что на 5 году кредит будет полностью выплачен.

Ознакомьтесь с оформлением подобной задачи в разделе 5.

**Задачи для самостоятельной работы**

|  |  |
| --- | --- |
| 2.1.1 | 31 декабря 2017 года Пал Палыч взял в банке некоторую сумму денег в кредит под 10% годовых. По условиям договора: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Пал Палыч переводит в банк 2928200 рублей. Сколько взял Пал Палыч в банке, если смог выплатить долг четырьмя равными платежами? |
| 2.1.2 | Федора не смутила история с первым кредитом, и он берет в банке 2 млн. руб. под 5% годовых. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. На какое минимальное количество лет должен взять кредит Федор, чтобы не выплачивать более 350 тыс.руб. ежегодно? |

## 2.2 Равномерное уменьшение долга по сравнению с предыдущим периодом

Для данного типа задач существует характерная особенность – при заполнении таблицы мы отталкиваемся от графы «Остаток долга». Поскольку остатки долга за каждый период отличаются друг от друга на равную величину, чтобы найти эту величину достаточно поделить сумму долга на количество таких периодов. Например, если сумма кредита составляет 10 млн руб., а количество лет равно 4, то остатки будут отличаться на 10млн/4 = 2,5 млн. руб., а графа «Остаток долга примет» вид:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| В конце 1 года | В конце 2 года | В конце 3 года | В конце 4 года |
| 7,5 млн. | 5 млн. | 2,5 млн. | 0 млн. |

Замечу, что при неизвестной сумме кредита и неизвестном количестве периодов графу «Остаток» можно заполнить последовательностью чисел:

Обратите внимание: заполнять начинаем с правого конца таблицы, записывая число 0 (кредит полностью закрыт)

**S\*(n-1)/n, S\*(n-2)/n,…..,S\*2/n, S/n, 0.**

Задача 1

В январе планируется взять кредит на 5 месяцев. Условия по договору следующие:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2–го по 14-е число нужно выплатить часть долга;

- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Сколько процентов от суммы кредита составит общая сумма выплат за весь срок?

Решение

Пусть S – сумма кредита. Тогда остатки долга будут отличаться на S/5 руб. Заполним таблицу (сначала графу «Остаток», затем графу «Долг» и только потом «Выплату» как их разность):

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 месяц | 2 месяц | 3 месяц | 4 месяц | 5 месяц |
| ДОЛГ | 1,15\*S | 1,15\*4S/5 | 1,15\*3S/5 | 1,15\*2S/5 | 1,15\*S/5 |
| ВЫПЛАТА | 1,15\*S - 4S/5 | 1,15\*4S/5 - 3S/5 | 1,15\*3S/5 - 2S/5 | 1,15\*2S/5 - S/5 | 1,15\*S/5 |
| ОСТАТОК | 4S/5 | 3S/5 | 2S/5 | S/5 | 0 |

Общая сумма выплат (суммируем выплаты 1-5 месяцев): 1,15\*S - 4S/5 +1,15\*4S/5 - 3S/5 + 1,15\*3S/5 - 2S/5 + 1,15\*2S/5 - S/5 + 1,15\*S/5 = 1,15\*S(1+4/5+3/5+2/5+1/5) – S/5\*(4+3+2+1) = 3,45S – 2S = 1,45S. Это означает, что сумма выплат составляет 145% от суммы кредита.

Ответ: 145

Задача 2

Взят кредит на 18 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2–го по 14-е число нужно выплатить часть долга;

- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Какую сумму планируется взять в кредит, если известно, что за первые 9 месяцев нужно выплатить 2048 тыс. руб.?

Решение

Пусть S – сумма кредита. Тогда остатки долга будут отличаться на S/18 руб. Заполним таблицу на первые 9 месяцев:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 месяц | 2 месяц | 3 месяц | … | 8 месяц | 9 месяц |
| ДОЛГ | 1,02\*S | 1,02\*17S/18 | 1,02\*16S/18 | 1,02\*11S/18 | 1,02\*10S/18 |
| ВЫПЛАТА | 1,02\*S - 17S/18 | 1,02\*17S/18 - 16S/18 | 1,02\*16S/18 - 15S/18 | 1,02\*11S/18 - 10S/18 | 1,02\*10S/18 - 9S/18 |
| ОСТАТОК | 17S/18 | 16S/18 | 15S/18 | 10S/18 | 9S/18 |

В общем виде, для каждого месяца ДОЛГ = 1,02\*S\*(19-n)/18, ОСТАТОК = (18-n)\*S/18, а ВЫПЛАТА = 1,02\*S\*(19-n)/18 - (18-n)\*S/18, где n – номер месяца.

Просуммируем выплаты за 9 месяцев и приравняем к данной в условии величине:

(1,02\*S - 17S/18) + (1,02\*17S/18 - 16S/18) + (1,02\*16S/18 - 15S/18) +…+ (1,02\*11S/18 - 10S/18) + (1,02\*10S/18 - 9S/18) = 2048

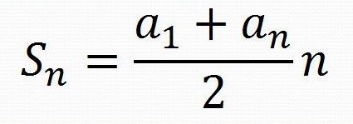
Сгруппируем отдельно подчеркнутые и неподчеркнутые слагаемые:

(1,02\***18**S/18 + 1,02\***17**S/18 + 1,02\***16**S/18 +… + 1,02\***11**S/18 + 1,02\***10**S/18) – (**17**S/18 + **16**S/18 + **15**S/18 + … +**10**S/18 + **9**S/18) = 2048

1,02\*S/18\*(18 +17 + … + 10) – S/18\*(17 + 16 + … + 9)=1024

Первая скобка – сумма первых 9 членов арифметической прогрессии при a1=10, a9=18.

Вторая скобка – тоже сумма первых 9 членов арифметической прогрессии при a1=9, a9=17.

Применяя формулу для суммы n членов арифметической прогрессии, получим:

(1,02\*S\*14\*9 – S\*13\*9)/18 = 2048

S=3200 (тыс. руб.)

В ответе, если условие задачи не требует иного, значения лучше указывать в единицах СИ.

Ответ: 3 200 000 руб.

Задача 3

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 7 млн. рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы: 1) каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года; 2) с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга; 3) в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года. На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 17,5 млн. рублей?

Решение

Эту задачу можно решить, как ранее, с помощью таблицы ДОЛГ-ВЫПЛАТА-ОСТАТОК, но есть и альтернативный вариант. По моему мнению, он проще для тех, кто хорошо понимает арифметические прогрессии.

Обозначим сумму кредита за а0 (это наши 7 млн. руб.) и а1, а2… аn – остатки после 1-го, 2-го, …n-го года. Выплаты же обозначим через х1, х2, … xn.

Тогда:

а1 = 1,2\* а0 - х1

а2 = 1,2\* а1 – х2

а3 = 1,2\* а2 – х3

…

an = 1,2\* аn-1 – хn

Просуммируем уравнения в системе:

а1 + …. + an = 1,2\*а0 + 1,2\*(а1 +… + аn-1) – (х1 +…+ хn)

Сумма х1 +…+ хn = 17,5 по условию задачи, an = 0, так как это - остаток долга в последний год. Числа а1, а2… аn – члены арифметической прогрессии (по условию разность между соседними остатками одинакова).

В левой части уравнения получим Sn= (а1+ an)\*n/2

В правой части в скобку (а1 +… + аn-1) добавим an. От этого ничего не изменится, так an = 0, но скобка превратится в Sn.

Sn = 1,2\*7+ 1,2\* Sn – 17,5

Sn = 45,5

Значит, 45,5 = (а1+ an)\*n/2 => **а1=91/n**

an = 0 = а0 + n\*d => d=-7/n

С другой стороны, а1 = a0 + d = 7 + d = 7 + (-7/n)

Следовательно, справедливо равенство:91/n = 7 - 7/n

n=14 (лет)

Ответ: 14

**Задачи для самостоятельной работы:**

|  |  |
| --- | --- |
| 2.2.1 | Жанна взяла в банке в кредит 1,2 млн рублей на срок 24 месяца. По договору Жанна должна возвращать банку часть денег в конце каждого месяца. Каждый месяц общая сумма долга возрастает на 2 %, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Жанной банку в конце месяца. Суммы, выплачиваемые Жанной, подбираются так, чтобы сумма долга уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину каждый месяц. Какую сумму Жанна вернёт банку в течение первого года кредитования? |
| 2.2.2 | Александр взял кредит в банке на срок 9 месяцев. В конце каждого месяца общая сумма оставшегося долга увеличивается на 12%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Александром. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину.  Сколько процентов от суммы кредита составила общая сумма, уплаченная Александром банку (сверх кредита)? |
| 2.2.3 | 15-го января планируется взять кредит в банке на некоторый срок (целое число месяцев). Условие его выплаты таковы:  - 1-го числа каждого месяца долго возрастёт на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;  - со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;  - 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.  На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит? |

## 2.3 Остаток долга по заданной таблице

Задача 1

В июле 2018 года планируется взять кредит в банке на 4 года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Месяц и год | Июль 2019 | Июль 2020 | Июль 2021 | Июль 2022 |
| Долг (в млн рублей) | 0,8S | 0,5S | 0,1S | 0 |

При каком наибольшем S общая сумма выплат будет меньше 50 млн рублей?

Решение

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 год | 2 год | 3 год | год |
| ДОЛГ | 1,15\*S | 1,15\*0,8S | 1,15\*0,5S | 1,15\*0,1S |
| ВЫПЛАТА | 1,15\*S - 0,8S | 1,15\*0,8S - 0,5S | 1,15\*0,5S - 0,1S | 1,15\*0,1S |
| ОСТАТОК | 0,8S | 0,5S | 0,1S | 0 |

Найдем общую сумму выплат и сравним ее с 50 млн. руб.

(1,15\*S - 0,8S) + (1,15\*0,8S - 0,5S) + (1,15\*0,5S - 0,1S) + (1,15\*0,1S) < 50

1,36S < 50

S < 36,76

Так как по условию задачи S – целое число, то выбираем ближайшее.

Ответ: 36

Задача 2

15 января планируется взять кредит в банке на 6 месяцев в размере 1 млн руб. Условия его возврата таковы:

− 1-го числа месяца долг увеличивается на r % по сравнению с концом предыдущего месяца, где r - целое число.

− Со 2-го по 14-е число необходимо выплатить часть долга.

− 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии с таблицей:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Месяц | Январь | Февраль | Март | Апрель | Май | Июнь | Июль |
| Долг | 1 | 0,6 | 0,4 | 0,3 | 0,2 | 0,1 | 0 |

Найдите наибольшее r, при котором сумма выплат будет меньше 1,2 млн руб.

Решение

Переведем r из процентов в десятичную дробь: r/100. Тогда долг на начало февраля будет считаться как (1 +r/100)\*1млн. = (1 +r/100), долг на начало марта (1 +r/100)\*0,6 млн = 0,6\*(1+r/100) и т.д.

После чего, как обычно, заполним графу ВЫПЛАТА = ДОЛГ - ОСТАТОК

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Февраль | Март | Апрель | Май | Июнь | Июль |
| ДОЛГ | (1 +r/100) | 0,6\*(1+r/100) | 0,4\*(1+r/100) | 0,3\*(1+r/100) | 0,2\*(1+r/100) | 01\*(1+r/100) |
| ВЫПЛАТА | (1 +r/100) - 0,6 | 0,6\*(1+r/100) - 0,4 | 0,4\*(1+r/100) - 0,3 | 0,3\*(1+r/100) - 0,2 | 0,2\*(1+r/100) - 0,1 | 01\*(1+r/100) |
| ОСТАТОК | 0,6 | 0,4 | 0,3 | 0,2 | 0,1 | 0 |

Осталось сложить все суммы выплат и сравнить с 1,2 млн.

(1 +r/100) - 0,6 + 0,6\*(1+r/100) - 0,4 + 0,4\*(1+r/100) - 0,3 + 0,3\*(1+r/100) - 0,2 + 0,2\*(1+r/100) - 0,1 + 01\*(1+r/100) < 1,2

Сгруппируем отдельно подчеркнутые и неподчеркнутые слагаемые.

(1+r/100)\*(1 + 0,6 + 0,4 + 0,3 + 0,2 +0,1) - (0,6+0,4+0,3+0,2+0,1) < 1,2

(1+r/100) < (1,2 + 1,6)/2,6

r/100 < 0, 077

r < 7,7

По условию задачи r – целое число. Следовательно, r=7.

Ответ: 7

**Задачи для самостоятельной работы**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2.3.1 | 16 января планируется взять кредит в банке на 6 месяцев в размере 1 млн. руб. По условиям договора:  − 1-го числа месяца долг увеличивается на r % по сравнению с концом предыдущего месяца, где r - целое число.  − Со 2-го по 15-е число необходимо выплатить часть долга.  − 16-го числа каждого месяца долг должен составлять сумму в соответствии с таблицей:   |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | Месяц | Февраль | Март | Апрель | Май | Июнь | Июль | | Долг | 0,6 | 0,4 | 0,3 | 0,2 | 0,1 | 0 |    Найдите наибольшее r, при котором сумма выплат будет меньше 1,25 млн. руб. |

# 3. Вклады

## 3.1 Сравнение выгоды

В задачах этого типа нужно представить себе весь процесс, «вжиться» в ситуацию и понять на каком этапе один вариант начинает перевешивать другой.

Задача 1

Вначале 2018 года Юрий приобрел ценную бумагу стоимостью 25000 рублей. Вконце каждого года цена бумаги увеличивается на 3000 рублей. Вначале любого года Юрий может продать бумагу и сразу положить вырученные деньги на банковский счет. В этом случае каждый год сумма на счете будет расти на 10 %. Через сколько лет Юрий должен продать ценную бумагу, чтобы через 5 лет после ее покупки сумма на его банковском счете была наибольшей?

Решение

У Юрия альтернатива: либо получать ежегодно по 3000 руб., либо попытаться превысить это доход за счет процентов, начисляемых банком. Может оказаться, что в определенный момент проценты на вклад будут больше дохода в 3000 руб., но возможен и вариант, что стабильный доход в 3000 руб. будет выгоднее в течение указанного в условии промежутка времени.

Пусть через N лет после покупки ценной бумаги Юрий решается ее продать. К тому времени стоимость бумаги будет составлять 19000 + N\*3000 руб.

Сколько Юрий заработает на процентах на следующий год? 0,1\*(19000 +N\*3000).

Вот эту величину и нужно сравнить с 3000 руб., которые Юрий рискнул потерять.

0,1\*(19000 + N\*3000) > 3000

N > (30000 – 19000)/3000

N > 3,3

Так как N – целое число, то Юрию будет достаточно 4 года.

Ответ: 4

Задача 2

Компания «Омега» работает с двумя банками под разные проценты годовых. В начале года она положила 60% прибыли в банк «Альфа», а оставшуюся часть - в банк «Бета». К концу 1 года сумма этих вкладов достигла 590 тыс. руб., а к концу 2-го года - 701 тыс. руб. Если бы компания первоначально положила 60% своей прибыли в банк «Бета», а оставшуюся часть в банк «Альфа», то по окончании 1-го года сумма вкладов стала бы равной 610 тыс. руб. Какова была бы сумма вкладов в этом случае к концу 2-го года?

Решение

Пусть S – сумма прибыли, которой распоряжается компания. Тогда в банк «Альфа» она положила 0,6S, а в банк «Бета» - 0,4S. Во втором случае деньги бы распределились 0,4S и 0,6S соответственно. Пусть x – проценты банка «Альфа», а y – проценты банка «Бета».

Тогда получим систему уравнений:

Под **x** и **y** понимаются величины (1 + r1/100) и (1 + r2/100), то есть коэффициенты (надбавки) на сумму остатка на счете. В задачах данного типа нет смысла «таскать хвост» из такого длинного выражения, поэтому будем упрощенно называть **x** и **y** процентами.

1. 0,6\*Sx + 0,4\*Sy = 590
2. 0,6\*Sx2 + 0,4\*Sy2 = 701
3. 0,4\*Sx + 0,6\*Sy = 610

Получили систему из трех уравнений с тремя неизвестными. Следовательно, система решаема. Как именно решать – дело вкуса, приведу вариант, который мне кажется менее трудозатратным.

Алгоритм:

1. Складываем (1) и (3): Sx + Sy = 1200
2. Выражаем Sx через Sy: Sx = 1200 – Sy и подставляем в (1): 0,6\*(1200 - Sy) + 0,4Sy = 590
3. Находим Sy = 650. Соответственно, Sx = 1200 – 650 =550
4. (2) представляем в виде 0,6\*x\*Sx + 0,4\*y\*Sy = 701 и подставляем найденные Sx и Sy. В итоге получим y = 13x/11
5. Теперь y, Sx и Sy ставим в (1). Получаем 0,6\*550\*x +0,4\*650\*y = 701. Находим x=1,1, y=1,3

Интересующая нас сумма вкладов к концу 2 года при альтернативном выборе 0,4Sx2 + 0,6Sy2. Подставив все найденные значения, получим 749 (тыс. руб.).

Ответ: 749000

**Задачи для самостоятельной работы**

|  |  |
| --- | --- |
| 3.1.1 | Алексей приобрёл ценную бумагу за 7 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 2 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10%. В течение какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через тридцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей? |
| 3.1.2 | В начале года Алексей 5/6 всех своих денег положил в банк А, а 1/6 - в банк Б. К концу 1-го года сумма вкладов стала равна 670 тыс. руб., к концу 2-го – 749 тыс. руб. Если бы Алексей 5/6 суммы положил в банк Б, а 1/6 - банк А, то по окончании 1-го года сумма составила бы 710 тыс. руб. Какова была бы в этом случае сумма вкладов по окончании 2-го года? |

## 3.2 Изменяющиеся проценты

Задача 1

В январе 2016 года предприниматель положил в банк некоторую сумму под х% годовых. Через год, в январе 2017 года, он снял 1/5 положенных денег, а оставшиеся деньги оставил в банке под у%. Известно, что (х+у)=30%. Каков должен быть х, чтобы в январе 2018 года сумма на счету предпринимателя была максимальной?

Решение

Рассмотрим, что происходит с суммой вклада S:

* 1 января 2017 года банк начислил х% за год хранения и сумма на вкладе стала S\*(1 + x/100)
* Предприниматель снял 1/5 первоначальных денег, то есть осталось: S\*(1 + x/100) – 1/5S
* 1 января 2018 года банк начислил у% за год хранения: (S\*(1 + x/100) -1/5S)\*( 1 + у/100)

Подставим у=30-х и после упрощения получим: S\*(4/5 + х/100)\*(130-х)/100 = S\*(80+х)(130-х)/50000

Данное выражение является квадратной функцией от переменной х. Возьмем производную, приравняем ее к нулю и найдем точку максимума: -2х+50=0 => X=25

Ответ: 25%

**Задачи для самостоятельной работы**

|  |  |
| --- | --- |
| 3.2.1 | Каждый год процент на вклад «Эффективный» увеличивается на 1%. При этом начальный процент составляет 5%, а максимальный процент - 12% и выше подняться не может. Максим положил в банк 1 млн. руб. с целью увеличить сумму до 1,5 млн. руб. Сколько лет потребуется Максиму? |

# 4. Задачи на оптимальный выбор

## 4.1 Производительность

Задача 1

У фермера есть два одинаковых поля по 10 га каждое. На каждом можно выращивать картофель и кукурузу, причем какую площадь занять под каждую культуру, фермер решает сам. Урожайность картофеля на 1 поле составляет 400 ц/га, а на 2 поле – 300 ц./га. Урожайность кукурузы на 1 поле составляет 300 ц/га, а на 2 поле – 400 ц/га. Картофель фермер продает по 5000 руб./ц, а кукурузу – по 6000 руб./ц. Какой максимальный доход может получить фермер?

Решение

Доход находится в прямой пропорциональной зависимости от площади, урожайности и цены, то есть Д = П\*У\*Ц. Обозначим х и у – площади, отведенные под картофель на 1 и 2 поле соответственно. Тогда под кукурузу будет отведено (10-х) и (10-у) гектаров соответственно. Занесем все данные в таблицы для 1-го и 2-го поля:

**1 поле**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Площадь | Урожайность | Цена |
| Картофель | х | 400 | 5000 |
| Кукуруза | 10-х | 300 | 6000 |

Доход с первого поля будет равен сумме доходов от продажи картофеля и кукурузы, то есть Д1=400\*х\*5000 + (10-х)\*300\*6000

**2 поле**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Площадь | Урожайность | Цена |
| Картофель | у | 300 | 5000 |
| Кукуруза | 10-у | 400 | 6000 |

Доход со второго поля тоже будет равен сумме доходов от продажи картофеля и кукурузы, то есть Д2=300\*у\*5000 + (10-у)\*400\*6000

Общий доход с двух полей, таким образом, Д=Д1+Д2=400\*х\*5000 + (10-х)\*300\*6000 + 300\*у\*5000 + (10-у)\*400\*6000 = 2\*105\*х – 9\*105\*у + 42\*106

Очевидно, данное выражение максимально при наибольшем х и наименьшем у. Следовательно, х=10, у=0 (то есть все 1 поле засеваем картофелем, а 2 поле – кукурузой). Осталось посчитать доход: Д=2\*105\*10 + 42\*106 =44\*106 руб.

Ответ: 44000000 руб.

Задача 2

В Шахтерске и Кузнецке имеется по 250 рабочих. Они готовы трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В Шахтерске один рабочий добывает за 1 час 0,2 кг алюминия или 0,1 кг никеля. В Кузнецке для добычи х кг алюминия требуется х2 человеко-часов, а для добычи у кг никеля требуется у2 человеко-часов. Какую наибольшую массу металлов можно добыть в двух городах за сутки, если для промышленности неважно, что использовать – никель или алюминий?

Решение

В Шахтерске с выбором все просто: поскольку успешнее добывается алюминий, то всех рабочих и направляем на его добычу. За 5 часов работы 250 рабочих добудут 250\*5\*0,2=250 кг.

В Кузнецке зависимость иная: для добычи 1 кг нужен 1 рабочий/час, для 2 кг – 4 рабочих/час, для 3 кг – 9 и т.д. Пусть на добыче алюминия будет работать t человек. Тогда на добычу никеля выйдут (250-t) человек. За 5 часов работы будет добыто √(5t) + √(5\*(250-t).

Введем функцию Z(t)= √(5t) + √(5\*(250-t). Найдем ее производную и приравняем к 0.

Z’(t)= 5/(2√(5t)) - 5/(2√(5(250-t))) = 0

t=125

Таким образом, в Кузнецке на никель и алюминий выйдут по 125 человек. Общая добыча в 2 городах составит: 250 + √(5\*125) + √(5\*(250-125) = 250+25+25 = 300 кг.

Ответ: 300

**Задачи для самостоятельной работы**

|  |  |
| --- | --- |
| 4.1.1 | У фермера есть два одинаковых поля по 10 га каждое. На каждом можно выращивать картофель и кукурузу, причем какую площадь занять под каждую культуру, фермер решает сам. Урожайность картофеля на 1 поле составляет 200 ц/га, а на 2 поле – 300 ц./га. Урожайность кукурузы на 1 поле составляет 250 ц/га, а на 2 поле – 200 ц/га. Картофель фермер продает по 1500 руб./ц, а кукурузу – по 1800 руб./ц. Какой максимальный доход может получить фермер? |
| 4.1.2 | В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте трудятся 100 рабочих по 7 часов в сутки. При этом один рабочий добывает в час 1 кг алюминия или 3 кг никеля. Во второй шахте трудятся 300 рабочих по 7 часов в день. При этом один рабочий добывает в час 3 кг алюминия или 1 кг никеля. Весь добытый металл отправляется на переплавку, где производится сплав из соотношения алюминий : никель =2:1.  Какое наибольшую массу сплава можно изготовить в сутки? |

## 4.2 Окупаемость

Задача 1

Строительство нового завода стоит 115 млн **рублей. Затраты на производство** x **тыс.** единиц п**родукции на таком заводе равны (0,5х2+х+9)** млн рублей в год. Е**сли продукцию завода продать по цене р** тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит **рх – 0,5(х2+х+9).** Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком н**аименьшем значении p** строительство завода окупится не более чем за 5 лет?

Решение

Прибыль за 1 год **рх – 0,5(х2+х+9) = -0,5х2 +х\*(р-1) – 9. Получили функцию F(х), которая показывает зависимость годовой прибыли от количества продукции. Чтобы найти наибольшее значение прибыли, возьмем производную: F’(x)=-x + p – 1, то есть при х=p-1 прибыль максимальна и равна (p-1)2/2 – 9.**

**За пять лет прибыль составит 5\*((p-1)2/2 – 9). Эта цифра должна быть не менее 115 тыс.руб.**

**Получим: 5\*((p-1)2/2 – 9)≥115**

**(p-1)2)≥64**

**Решая квадратное уравнение, получим 2 корня: р=-7 и р=9. Неравенству удовлетворяют интервалы р≥9 и р≤-7. Цена может быть только положительной величиной, поэтому оставляем только интервал р≥9. Очевидно, что минимальная цена р=9.**

**Ответ: 9**

**Задачи для самостоятельной работы**

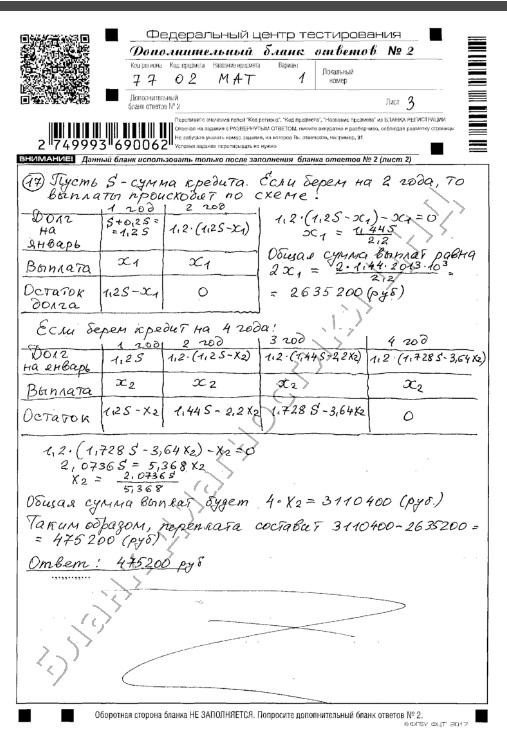
|  |  |
| --- | --- |
| 4.2.1 | Строительство нового завода стоит 122 млн **рублей. Затраты на производство** x **тыс.** единиц п**родукции на таком заводе равны (0,5х2 -2х+10)** млн рублей в год. Е**сли продукцию завода продать по цене р** тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит **рх – 0,5(х2-2х+10).** Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком н**аименьшем значении p** строительство завода окупится не более чем за 4 года? |

# 5. Пример оформления 17 задачи на экзаменационном бланке

В феврале 2018 года на Независимой диагностике (ЕГЭ математика, профильный уровень) это оформление задачи не вызвало нареканий у проверяющих. Соответственно, рекомендую и вам, уважаемые читатели, придерживаться стиля оформления с таблицей и кратким пояснением.

Задача

Дмитрий думает, на сколько лет взять кредит в банке под 20% годовых: на 2 или на 4 года. Условия кредита: выплачивать ежегодно **равными платежами**. Сумма кредита 2013000 руб. Какова будет переплата Дмитрия, если он возьмет кредит на 4 года?



# Ответы

**Ответы к задачам для самостоятельной работы**

|  |  |
| --- | --- |
| 2.1.1 | 9282000 |
| 2.1.2 | 7 |
| 2.2.1 | 822000 |
| 2.2.2 | 60 |
| 2.2.3 | 19 |
| 2.3.1 | 9 |
| 3.1.1 | 8 |
| 3.1.2 | 841 |
| 3.2.1 | 6 |
| 4.1.1 | 9 |
| 4.1.2 | 5400 |
| 4.2.1 | 7 |